LA CLASSIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI LINEARI DEL SECONDO ORDINE

Introduzione elementare con sguardo sulle curve caratteristiche e condizioni al contorno

Questo sassolino intenderei togliermelo dalle scarpe dopo poco meno di sessant'anni, in due tempi. **La prima parte (Sez. I, II, III)** sarà dedicata principalmente ad indicare come si è giunti alla classificazione delle equazioni alle derivate parziali, classificazione che culmina nell'equazione delle curve caratteristiche e nella distinzione in quattro tipi di equazioni; **la seconda parte (Sez. IV, V, a partire d pag.29)** sarà dedicata ad alcune applicazioni introduttive delle curve caratteristiche con indicazione delle condizioni al contorno richieste per la soluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali lineari del secondo ordine. **Un'*appendice (a partire da pag.42)*,** infine tratterà il Lemma di Gauss, il teorema della Divergenza, alcuni teoremi utili per illustrare le *funzioni armoniche (soluzioni dell'equazione di Laplace,* prototipo di uno dei tipi di equazioni). Infine, in A4, presenterò un'introduzione al concetto di Laplaciano. Quest'ultima presentazione non è farina del mio sacco, ma è poco più – poco meno - di una traduzione da un testo di W.W. Sawyer (*A Path to Modern Mathematics,* 1966). Essa dovrebbe essere accessibile a pedoni matematici (prima liceo scientifico). Il resto del mio saggio è piuttosto per matematici motociclisti, che siano alla fine del I corso di Analisi. Tutto questo, sperabilmente, sarà spiegato nel modo più chiaro possibile, omettendo le irritanti espressioni "con facili passaggi", e "si lascia allo studente" (a parte un unico caso veramente semplice).

La difficoltà che io provai fin da principio (il sassolino nella scarpa) era dovuta forse, come vedremo, ad una discutibile, ma giustificabile scelta didattica da parte del mio primo insegnante sul soggetto, che era anche autore del nostro libro di testo di Analisi II. La teoria introduttiva delle equazioni alle derivate parziali **(EDP)** mi fu ri-insegnata una seconda volta, ma ricordo che avevo sempre una sorta di blocco mentale che mi impediva di seguire il filo dei pur semplici ragionamenti. Fortunatamente, le curve caratteristiche non riemersero mai, né come teoria né come esercizio, né in pratica nella mia professione, nei venti anni seguenti, in cui mi occupai di fisica e di matematica. Trovai innumeri EDP, ma venivano tutte risolte esenzialmente per mezzo della "separazione delle variabili" (non so se questa separabilità fosse un dono della natura, o dei professori che assegnavano gli esercizi), la quale poi dava luogo a EDO (Equazioni alle derivate ordinarie) e quasi sempre a "problemi agli autovalori". Di conseguenza non dovetti mai fare lo sforzo di applicarmi al soggetto della classificazione delle EDP per comprenderlo a fondo.

Parlando con varie persone che a suo tempo avevano studiato le EDP, notai che i miei stessi dubbi li avevano anche loro, e anche loro li avevano sepolti nella loro memoria, non essendo mai incappati in un probema che risuscitasse quei dubbi.

I. Un testo oscuro.

Quando dico che il mio testo di Analisi II seguiva una discutibile scelta didattica, mi riferisco al fatto che le prime pagine sulle EDP del secondo ordine erano così strutturate:

(i) **Affermazione** (quasi letterale): "la determinazione di una formula comprendente tutte le soluzioni di una data equazione alle derivate parziali è assai difficile, o addirittura impossibile. Inoltre, essa è sovente di scarso interesse, perché non è sempre facile determinare per mezzo della soluzione generale le soluzioni soddisfacenti a determinate condizioni al contorno, come per esempio assicurare che esse assumono determinati valori su di una certa curva, che è quello che più importa nella pratica."

(ii) **Conseguenza:** "Pertanto, la teoria delle EDP, abbandonati i tentativi di determinare soluzioni dotate di un alto grado di generalità, si è soprattutto rivolta (*imitando l'indirizzo di ricerche imperniato sul teorema di esistenza per le equazioni differenziali ordinarie)*, a determinare, data un'equazione della specie in esame, se esistono soluzioni, e quante, soddisfacenti ad *acconce* condizioni al contorno."

(iii) **Il problema:** "Le equazioni più studiate da questo punto di vista sono le EDP del secondo ordine in due variabili indipendenti, del tipo:

$$(1a) \qquad A(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+f\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

che io, utilizzando spesso una notazione convenzionale più sbrigativa, scriverò anche come:

$$(1) \qquad \boldsymbol{A\,r + 2B\,s + Ct + f\,(x,y,z,p,q) = 0}$$

In cui il significato di r, s, t, p, q è definito in modo ovvio (si confrontino la 1a e la 1).

In particolare, anche la funzione f sia lineare in x, y, z, p, q, cioè:

$$\boldsymbol{f(x,y,z,p,q) = 2Dp + 2Eq + Fz + G}$$

Le equazioni che possono essere messe in questa forma presentano un interesse particolare in fisica matematica. "

E fin qui, tutto chiaro e nulla da eccepire. Per sottolineare l'ovvio, un'equazione è lineare se vi compaiono solo funzioni lineari delle derivate e delle funzioni, cioè nè prodotti nè potenze. Le EDP lineari del secondo ordine sono in fisica matematica (relativamente) semplici e interessanti. Erano quindi, un secolo fa, le più studiate.

(iv) **(Sorpresa!):** "Le equazioni del tipo (1) vengono classificate in quattro classi o tipi, dotate di proprietà essenzialmente distinte, secondo il segno della quantità:

$$\Delta = B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y) \tag{2}$$

Precisamente, l'equazione si dirà di tipo *ellittico, parabolico o iperbolico* secondo che la quantità Δ sia negativa, identicamente nulla, o positiva; mentre essa si dirà invece di tipo *misto* se, nella regione del piano x,y che si considera, la Δ cambia di segno o, almeno, si annulla, senza essere identicamente nulla."

Questo era tutto, e, per quanto mi riguarda, così la frittata fu fatta, e la nebbia scese, per sessant'anni.
Delle domande si imponevano immediatamente: anzitutto, da dove esce la relazione che determina se un'equazione è di tipo ellittico, parabolico o iperbolico? E poi, che significano questi nomi? Che significa *l'indirizzo di ricerche imperniato sul teorema di esistenza per le equazioni differenziali ordinarie ?* In quanto alle condizioni al contorno *acconce*, il mio testo non ne parlava più.

E' curioso come sessant'anni fa (per me il 1963) le EDP fossero all'avanguardia della matematica. Oggi, la matematica si è estesa in molteplici direzioni e ha sviluppato nuovi più compatti formalismi, per cui questo mio saggio, fedele ai miei antichi testi, ha un vago sapore archeologico. Ma tant'è, il mio scopo è che i concetti siano compresi nel modo più intuitivo possibile, con i mezzi più semplici, e penso che il mio saggio sia fedele, almeno nelle intenzioni, a questo mandato.

II. Le risposte

II.1 Origine dei nomi dei primi tre tipi di equazioni considerate.

Per la seconda domanda, *sul significato dei nomi*, mi impegnai e trovai finalmente una risposta assai di recente. **I nomi non significano nulla.** Essi furono dati in analogia con la teoria delle curve di secondo grado in due variabili, le cosiddette *coniche*, la cui equazione generale è

$$A x^2 + 2B\,xy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

in cui A, B, C, D, E, F questa volta sono costanti.
Passando a coordinate proiettive (o omogenee) $x=X/Z$, $y= Y/Z$, e moltiplicando per Z^2 si ottiene:

$$AX^2 + CY^2 + FZ^2 + 2BXY + 2DXZ + 2EYZ =0$$

L'intersezione con la retta all'infinito, Z=0, ci dà

$$AX^2 + 2BXY + CY^2=0,$$

equazione che, risolta, porge le coordinate (X, Y, 0) dei *due punti all'infinito* in cui la retta all'infinito (Z=0) intercetta la conica. In verità la soluzione dell'equazione ci dà il rapporto X/Y (oppure Y/X) per ciascun punto, dettaglio che non ci riguarda a questo livello. I punti sono due, ovviamente, perché l'equazione è quadratica. Che i punti siano all'infinito è del resto evidente dal fatto che la terza coordinata vale 0 per entrambi, avendo posto Z=0, mentre le coordinate ordinarie sono $x=X/Z$, $y= Y/Z$, cioè entrambe infinite. Ne segue che le coordinate ordinarie dei punti all'infinito sono $x = \infty$, $y = \infty$, per qualsiasi conica, mentre le coordinate proiettive (X, Y) possono essere e normalmente sono diverse. Risolvendo l'equazione di secondo grado, a seconda del valore del discriminante

$$\Delta = B^2 - AC$$

troveremo due punti reali, se il discriminante è positivo, due punti reali e coincidenti, se il discriminante è nullo; due punti immaginari, complessi coniugati, se il discriminante è negativo. Ciò significa che, non considerando i casi di coniche degeneri (questo saggio non vuol essere un trattato sulle curve coniche, degeneri o no), *se i due punti sono reali, la nostra conica è un'iperbole, se coincidono è una parabola, se sono complessi coniugati è un'ellisse,* perché tale è il comportamento delle coniche all'infinito. In particolare, le ellissi non arrivano all'infinito, e quindi le loro intersezioni con la retta all'infinito sono due punti immaginari, mentre la parabola è "tangente alla retta all'infinito". Invece, le iperboli sono curve reali che vanno all'infinito e quindi hanno intersezioni reali con la retta all'infinito.

Ecco dunque spiegato il motivo dei *nomi* dei tre primi tipi di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine in due variabili indipendenti: *una pura e semplice analogia tra due discriminanti,* e un metodo mnemonico per ricordare il risultato. Infatti, come nel caso delle coniche il valore positivo del discriminante porta a due *punti* reali e distinti (caratteristici dell'iperbole), o reali e coincidenti (caratteristici della parabola), o complessi (caratteristici dell'ellisse, che non incontra la retta all'infinito), nel caso delle EDP troveremo due *curve* reali, o coincidenti, o immaginarie – che però normalmente non avranno nulla a che vedere con le iperboli, le parabole o le ellissi.

Ma, naturalmente, questa analogia pone un interrogativo: il discriminante per le coniche è stato da me derivato in modo grossolano, ma evidente. E *il discriminante per le EDP, da dove viene?* A questa importante domanda risponderò nella Sezione II.2.

In quanto alle equazioni di tipo misto, queste erano forse la ragione per cui il testo che avevo sottomano era a mio parere così oscuro. Il fatto è che mentre A, B, C sono costanti per le coniche, esse sono funzioni di x e y per le EDP. E quindi il loro segno, o, più direttamente, il segno del discriminante, può mutare nella regione di interesse.

Un esempio ben noto è l'illusoriamente semplice equazione, nota come equazione di **Tricomi**, il primo a trattare in modo organico le equazioni di tipo misto:

$$r + xt = 0$$

dove r e t hanno le espressioni convenute in termini delle derivate seconde di z nell'equazione 1. Qui A =1, B=0, C= x, per cui $\Delta = - x$.
Ciò significa che l'equazione è di tipo iperbolico se $x < 0$, è di tipo parabolico se $x= 0$ (asse delle ordinate), ed è di tipo ellittico se $x> 0$. Il che, ovviamente, complica non poco le cose.
L'equazione, detta di **Tricomi**, o Euler-Tricomi, era destinata a rivelarsi di interesse fondamentale nello studio del moto transonico, vale a dire il moto di un corpo, per esempio un aereo, nella regione di passaggio dal moto subsonico al moto supersonico.
Questa transizione portava a forti instabilità nel volo dell'aereo, sperimentate dai piloti a partire dal 1941 (Tricomi aveva studiato l'equazione nel 1923, e il suo lavoro fu riscoperto e portato avanti da matematici e ingegneri alla fine della seconda guerra mondiale), nella regione chiamata in modo drammatico "muro del suono".

Il problema era che il nostro insegnante e autore del libro di testo era appunto il Prof. F.G. Tricomi, gentiluomo all'antica, che arrossendo ci disse di aver introdotto le equazioni di tipo misto e che una certa equazione portava il suo nome. Penso che per sola modestia questa parte del corso e del suo libro di testo, del resto eccellente, fu alquanto sacrificata.

II.2 Origine del discriminante nel caso delle EDP.

Nelle equazioni differenziali ordinarie (EDO), in cui la z è funzione di un'unica variabile, z(x), il compito di trovare una soluzione quando non si sia potuto ridurre il problema alle più eleganti "quadrature" è comunque semplice, perché la costruzione di una serie di Taylor è in molti casi possibile con la precisione voluta, purché, naturalmente, il raggio di convergenza della serie risultante non sia zero. *Di questa verifica non ci occuperemo, nonostante abbia una notevole importanza in generale.*

Per fissare le idee, supponiamo di avere una EDO del secondo ordine, della forma $z'' = F_2(x,z, z')$, e di volerne la soluzione , essendo noti i valori di z ed z' in un dato punto x_0. Chiameremo questi valori z_0 e z'_0 .
Derivando successivamente ambo i membri, ciò che è normalmente possibile, otteniamo $z^{(3)} = F_2'(x, z, z') = F_3(x, z, z', z'')$, in cui si è aggiunta la z'', che proviene derivando le eventuali z' presenti in F_2.
$y^{(4)} = F'_3\ (x, z, z',z'')\ = F_4\ (x, z, z', z'', z^{(3)})$
e successive.
Normalmente possiamo calcolare i valori delle derivate successive nel punto x_0 e inserirli nella serie di Taylor, che ci consente di calcolare la soluzione z(x) in qualsiasi punto x, beninteso, se il raggio di convergenza delle serie non è nullo. Il risultato è:

$$z(x) = z_0 + (x - x_0)z'_0 + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2\, z''_0 \ + \cdots$$

Ad esempio, l'equazione di primo grado $z' = z$, con condizioni iniziali z(0) =1, permette di ricostruire tutte le derivate successive. In questo caso la ricostruzione è particolarmente semplice, perché se z'=z, derivando ambo i membri troviamo z''=z', e quindi di nuovo z''=z e tutte le derivate successive similmente.
Abbiamo allora, per esempio, z(1) = z(0) (1 + 1+ ½+ 1/6 + 1/24 etc) = ***e*** (per z(0) =1.)

Lo stesso calcolo può essere fatto in generale con metodi assai più efficaci, che talvolta nascondono il fatto che, dopo tutto, si ha sempre a che fare con lo sviluppo in serie di Taylor.

Onestamente, non so se chi studia le equazioni differenziali ordinarie si renda conto della straordinarietà dello sviluppo in serie di Taylor: esso ci dice che una funzione ha in ogni punto x_0 i "semi" della sua estensione all'infinito in termini dei valori *in quel punto* della funzione e delle sue infinite derivate. Questo lo si comprenderebbe forse meglio prendendo l'avvio dal calcolo delle differenze finite, che implica che occorrano termini sempre più lontani da x_0 per costruire le differenze prime, seconde, terze che, opportunamente trattate, diverranno al limite le derivate prime, seconde, terze. Il fatto è che, passando al limite, tutte queste differenze si contraggono nell'intorno del punto x_0.

Supponiamo ora che z sia funzione di due variabili, z(x.y), e di voler calcolare mediante la serie di Taylor una funzione che sia una soluzione dell'EDP (1). In questo caso, le cose cambiano. Noi non ricostruiremo più la funzione a partire da un punto, ma da una **linea di contorno C(x,y) nel piano,** dove varranno determinate condizioni.

In Figura 1, per mostrare euristicamente l'evoluzione dalle EDO alle EDP, ho scelto come contorno C l'asse y, su cui è definita una curva K, che è **z(0, y_C),** dove l'indice C indica i valori sul contorno. In analogia con il caso a una dimensione, è anche tracciata la curva per i valori z(0+dx, yc), che, come confermato da una breve riflessione, è legata alla derivata normale al contorno, cioè **normale alla tangente al contorno** punto per punto (qui la derivata "normale" è in direzione parallela all'asse x).

Nelle **EDP**, i valori al contorno e quelli della derivata normale si suppongono assegnati, e **trovare la funzione z(x,y) che risolve l'equazione, assumendo sul contorno i valori assegnati, e valori assegnati per la derivata normale, costituisce il "Problema di Cauchy".** Non discuteremo per ora se queste siano quelle "*acconce*" condizioni al contorno di cui al termine della sez. I.

La derivata normale, da sola, non dice tutto, perché, come si vede dalla Figura 1 (pur nella sua imperfezione) le frecce viola non sono necessariamente nella direzione della massima pendenza (come talvolta si legge, usando la stessa parola "normale" per significati diversi). Tuttavia, si può pensare che la derivata normale, con l'ausilio della derivata tangenziale lungo il contorno, calcolabile dai dati del problema, possa darci un quadro completo della regione di contorno, che ci permette di estrapolare alla regione vicina e quindi al resto del dominio di interesse. Il fatto che la derivata tangenziale e la derivata normale costituiscano un sistema di assi ortogonali spiega anche perché Cauchy (se davvero lui fu l'ideatore dell'omonimo "problema") avesse ingegnosamente scelto la derivata normale come il più evidente analogo delle condizioni al contorno per le EDO. In questo modo, sfruttando la derivata tangenziale, *ci occorre in ogni punto un solo valore nuovo*, quello della derivata normale, per ricostruire "il rilievo" della regione vicino a un punto del contorno.

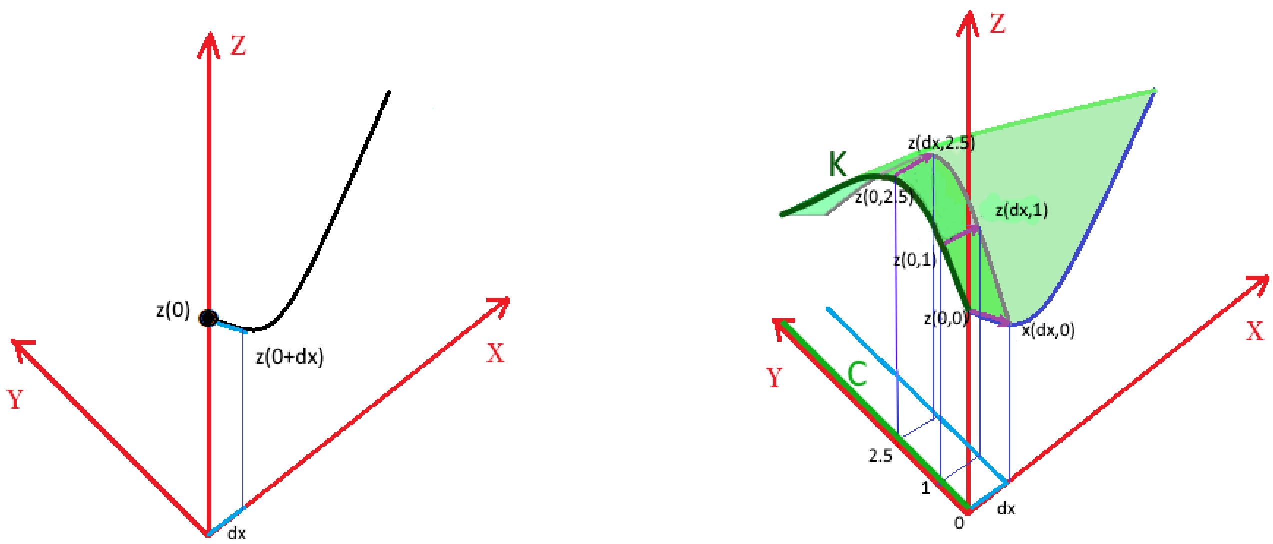


Figura 1

La figura 1 è solo un punto di partenza. Qui vediamo chiaramente i pregi della scelta della derivata normale, ma possiamo intuire come l'approccio possa essere esteso a un contorno meno regolare dell'asse y.

Ricordando l'introduzione della notazione abbreviata p, q, r, s, t (pag.2), e introducendo l'ovvia notazione p_C q_C etc, per indicare i valori al contorno delle derivate prime e seconde (e successive), la serie di Taylor assume in generale la forma:

(3) $$z(x,y) = z(x_C,y_C) + p_c(x - x_C) + q_c(y - y_C) + \frac{1}{2}(r_c\,(x - x_C)^2 + 2s_C\,(x - x_C)(y - y_C) + t_C(y - y_C)^2) \ldots.$$

Per prima cosa vediamo **come dalle equazioni della curva di contorno e dalla derivata normale si possano ottenere p_C e q_C.**

Qui, ricordare un po' di geometria differenziale elementare ci aiuta.
Date le equazioni parametriche che valgono per il contorno C, in funzione del parametro s, la lunghezza dell'arco, cioè

(4) $$x = \lambda(s); \quad y = \mu(s)$$

otteniamo i coseni direttori $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ della tangente, in quanto:

$$tg(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/ds}{dx/ds} = \frac{d\mu/ds}{d\lambda/ds}$$

Il versore tangente è quindi

$$\boldsymbol{t}(s) = \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)\mathrm{j}\,.$$

In quanto al versore normale, esso proviene da

$$tg(\theta') = \frac{\sin(\theta + \frac{\pi}{2})}{\cos(\theta + \frac{\pi}{2})} = \frac{\cos(\theta)}{-\sin(\theta)} = \cdots = \frac{d\lambda/ds}{-d\mu/ds}$$

E risulta eguale a

$$\boldsymbol{n}(s) = n_x\boldsymbol{i} + n_y\boldsymbol{j} = -\left(\frac{d\mu}{ds}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)\mathbf{j}$$

,

manifestamente perpendicolare al versore tangente, in quanto il prodotto interno dei due versori è nullo. Essi sono anche manifestamente unitari, perché, come è noto,

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

E

$$\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{ds^2} = 1$$

In tutto questo sono nascoste tacitamente diverse convenzioni, ciascuna delle quali, però, non fa altro che definire in modo quasi arbitrario i segni dei versori, ma sempre in modo che il loro prodotto interno sia nullo.
Una **prima convenzione** è che il contorno della regione di interesse sia percorso in senso antiorario; una **seconda convenzione** è che la normale sia diretta verso l'interno della regione di interesse; una **terza convenzione**, che in questo caso (cioè grazie alla prima convenzione) coincide con la seconda, è che l'angolo fra il verso positivo della tangente e il verso positivo della normale valga $\pi/2$, ma contato in senso anti-orario. Tutto ciò è riassunto in Figura 2 (che, si noti bene, segue convenzioni diverse dalla Figura 1 – quali?).

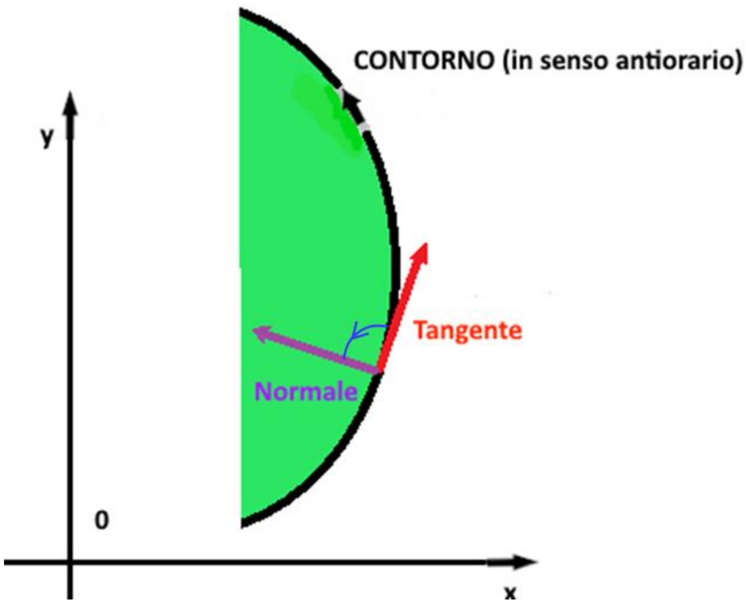


Figura 2

Come ci bastava per le EDO poter calcolare i valori delle varie derivate nel punto x_0, così nel caso delle EDP dobbiamo vedere se possiamo calcolare le varie derivate parziali in due variabili (r,s,t e *derivate successive*) sul contorno

$$x = \lambda(s); \quad y = \mu(s)$$

per costruire la soluzione.

Ora, noi abbiamo un vettore che ci dà il modo di variare della funzione cercata z in un punto (x,y). Si tratta del vettore gradiente, che ha due componenti:

$$grad(z) = \frac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

Per esempio, il prodotto interno del gradiente e dello spostamento elementare (cioè la proiezione del gradiente sullo spostamento)

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\, dx + \boldsymbol{j}\, dy$$

ci dà, come è noto, il differenziale totale dz:

$$dz = grad(z) \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

Possiamo ora vedere se le componenti (cioè le proiezioni del vettore gradiente sul *vettore tangente* al contorno e sul *vettore normale* al medesimo) ci permettano di ricavare *le derivate prime* ***sul contorno***. Questi valori, a pensarci bene, dovrebbero essere i dati del "problema di Cauchy": se il calcolo fosse impossibile, il problema stesso di Cauchy sarebbe discutibile fin dall'enunciato.

Abbiamo così due equazioni, chiamando n(s) la derivata normale, che è un dato del problema, per mancanza di una migliore notazione (alcuni usano l'espressione $\frac{\partial z}{\partial n}$, che, lo confesso, non è più convincente dell'altra):

(4) $$\left(\frac{dz}{ds}\right)_C = grad(z) \cdot \boldsymbol{t}(s) = (\partial z/\partial x)_C \frac{d\lambda}{\mathrm{ds}} + (\partial z/\partial y)_C \frac{d\mu}{\mathrm{ds}}$$

$$n_C(s) = grad(z) \cdot \boldsymbol{n}(s) = -(\partial z/\partial x)_C \frac{d\mu}{\mathrm{ds}} + (\partial z/\partial y)_C \frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}$$

La prima equazione dà la variazione di z(x,y) lungo il contorno, ed è ricavata dal fatto che un dato del problema di Cauchy è la z(s), lungo il contorno. Anche se in partenza le derivate parziali $(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y})$ sono valide per ogni punto del dominio, la soluzione ce ne darà i valori p_C e q_C sul contorno, ciò che cercavamo, poiché il gradiente è "proiettato" sul contorno.

Vista da lontano, questa coppia di equazioni può sembrare preoccupante, ma non è altro che un sistema algebrico di due equazioni in due incognite (rosse) con sei termini noti (blu), che possiamo risolvere mediante la regola di Cramer.
La soluzione del problema richiede che il determinante dei coefficienti sia diverso da zero. Ma il nostro determinante lo è sempre, perché, come si calcola dai dati di Eq.4, altro non è che

$$\left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}\right)^2 = +1$$

La soluzione della coppia di equazioni, tenendo conto del denominatore = +1, è (Regola di Cramer)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_C = -N(s)\left(\frac{d\mu}{ds}\right) + \left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right)\left(\frac{dz}{ds}\right)_C = p_C$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_C = N(s)\left(\frac{d\lambda}{ds}\right) + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)\left(\frac{dz}{ds}\right)_C = q_C$$

Come è già stato notato, questo risultato era quasi dovuto, essendo in ultima analisi metà dei dati del problema di Cauchy.

È forse utile avvertire a questo punto che differenti convenzioni (sulla direzione della normale alla tangente, sul senso di percorrenza del contorno del domino di interesse, sull'ordine delle equazioni da risolvere) possono dare diversi valori per p_C e q_C. Una breve discussione di questi punti, di modesta importanza, è data in Appendice A1.
Tuttavia, ciò che a noi importava era dimostrare che p_C e q_C possono essere derivate dalle condizioni al Contorno scelte da Cauchy.

II.3 La determinazione delle derivate parziali seconde.

Lasciate così da parte le quasi superflue osservazioni nate dalla scelta di arbitrarie convenzioni (Appendice A1), l'interrogativo principale è se, da quanto abbiamo in nostro possesso, cioè i valori di $z(x_C,y_C)$ al contorno C e le due derivate prime p_C e q_C, possiamo calcolare anzitutto i valori delle derivate seconde sul contorno.

Già si vede che la difficoltà sorge soprattutto dalla presenza nello sviluppo in serie di Taylor del termine "misto":

$$2s_C\ (x - x_C)(y - y_C).$$

Se questo termine non esistesse, tutte le derivate successive potrebbero essere calcolate ottenendo due serie di derivate, quelle rispetto alla sola x e quelle rispetto alla sola y. Ora, vi sono diverse equazioni (per esempio quella delle onde), che non contengono il termine "misto", ma si può mostrare che esso non manca neppure in queste equazioni, pur essendo nascosto, perché ricomparirebbe nella "forma canonica " dell'equazione delle onde (pag.25).

Abbiamo dunque tre incognite, r, s, t (valori al contorno: ci si consenta di sottintendere d'ora in avanti l'indice C, specialmente quando le derivate sono fatte rispetto al parametro s, *che per noi ha senso solo sul contorno*). Le derivate $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_C$ e $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_C$ cioè p(s) e q(s) ci sono note, ove x e y sono entrambe funzione di s, il parametro della curva di contorno, e quindi possiamo scrivere le loro derivate rispetto a s come:

$$\frac{dp}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{d\lambda}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{d\mu}{ds}$$

$$\frac{dq}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}$$

Ci occorre una terza equazione, e questa è la (1)

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = A(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Usando la notazione abbreviata:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= r\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}} + s\frac{d\mu}{\mathrm{ds}} \\ \frac{dq}{ds} &= \qquad\quad s\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}} + t\frac{d\mu}{\mathrm{ds}} \\ \\ f &= A\,r + 2B\,s + C\,t \end{aligned}$$

Di nuovo, non ci dobbiamo spaventare. Abbiamo un sistema algebrico di tre equazioni in tre incognite, r, s, t. Dei termini noti ci basta sapere che sono noti, ma la loro forma, per ora, non ci interessa (e del resto non esiste una forma generale particolarmente significativa a questo livello). Però sappiamo dalla teoria dei determinanti che **il nostro problema ha una e una sola soluzione se il determinante dei coefficienti (indipendentemente dai termini noti) è diverso da zero.**
Notiamo inoltre che, poiché la nostra discussione si limiterà al determinante dei coefficienti, e questo avrà a che fare solo colle derivate seconde, le convenzioni di segno, che abbiamo incontrato *e possono avere una conseguenza solo sui termini noti*, non ci riguardano più.

Il determinante viene calcolato dalla terza riga e vale:

(5) $$A\left(\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}\right)^2 - 2B\,\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\frac{d\mu}{\mathrm{ds}} + C\left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right)^2$$

Se questo determinante è diverso da zero, allora si possono ricavare da quanto sappiamo le incognite, cioè le tre derivate seconde, e, come vedremo, tutte le altre, per cui potremo calcolare la soluzione in base alla serie di Taylor.

Se questo determinante è eguale a zero, in genere non lo è dappertutto, ma solo per determinati valori delle $\mu(s)$ *e* $\lambda(s)$, dove s è l'arco di contorno, che definiscono delle "curve caratteristiche", a **partire dalle quali non** è possibile calcolare le derivate seconde e quindi costruire la serie di Taylor. *Le curve caratteristiche, in altre parole, non possono essere curve di contorno del problema.*

II.3.A. Determinante diverso da zero.

II.3.A.1. "Se il determinante è diverso da zero, non solo si possono determinare le tre derivate seconde, ma anche le quattro derivate terze, e le derivate quarte etc., in modo che l'intera serie di Taylor può essere costruita".

A questo proposito, molti testi dicono tranquillamente che *con ulteriore differenziazione, si può trovare un simile sistema di equazioni simultanee per le derivate terze e di ordine superiore. Le condizioni perché il sistema sia risolubile fanno riferimento allo stesso determinante visto per le derivate seconde".*

Facile a dirsi: l'esercizio, in effetti, non è difficilissimo, ma non è così immediato a farsi. Facciamolo come esempio.

Per ottenere il nostro risultato, senza uscire da un determinante 3x3, possiamo in primo luogo cercare le derivate (terze!) di r,s,t rispetto a x. Facendo poi le derivate di r,s,t rispetto a y, si trovano altre tre derivate terze, due delle quali sono però già comprese fra le derivate di r,s,t rispetto a x.
In altre parole, possiamo introdurre una facile notazione, in cui l'indice sottoscritto indica la variabile di derivazione, e contare le derivate differenti (quattro in tutto) come segue:

$$r_x = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3};\ r_y = s_x = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\ ;\ s_y = t_x = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\ ;\ t_y = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

Si notino le eguaglianze $r_y = s_x$ e $s_y = t_x$.
Abbiamo ora bisogno di tre equazioni, nelle quali, si ricordi, le derivate seconde sono state ricavate e quindi sono note, mentre le nuove incognite sono r_x, s_x, t_x.
Se ora prendiamo l'equazione $f = A\,r + 2B\,s + C\,t$, dove

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = f(x, y, z, p, q)$$

e la deriviamo rispetto a x, notiamo che
$\frac{\partial}{\partial x}(Ar + 2Bs + Ct) = A_x r + 2B_x s + C_x t + Ar_x + 2B\,s_x + Ct_x$. Ma a secondo membro i primi tre termini sono noti, perché r, s, t sono già state ricavate, e perciò finiranno nel termine noto, che a sua volta sarà già stato derivato rispetto a x.
La nostra prima equazione sarà quindi:

$$F_x(x, y, z, p, q, r, s, t, A_x, B_x, C_x \dots) = A(x,y)\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2B(x,y)\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$$

O, più brevemente:
$F_x = Ar_x + 2B\,s_x + Ct_x$.

Le altre due equazioni sono assai simili a quelle usate in precedenza. Là si derivavano rispetto a x e a y le derivate prime, e ne discendevano due equazioni che, unite alla precedente, permettevano di dedurre le incognite, cioè le tre derivate seconde. Qui si derivano rispetto a s le derivate seconde così ottenute, e quindi non più incognite:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}} + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}$$

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}$$

(**Nella seconda equazione, primo membro, la lettera s ha due significati, discendenti da due convenzioni. Si abbia cura di non confonderli**).

Tutte le derivate sono, naturalmente, calcolate sul contorno del dominio di interesse.
La notazione abbreviata è:

$F_x = \quad Ar_x + 2B\,s_x + Ct_x$.
$\frac{dr}{ds} = r_x\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}} + s_x\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}$
$\frac{d\boldsymbol{s}}{ds} = \qquad \boldsymbol{s_x}\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}} + t_x\frac{d\mu}{\mathrm{ds}} \quad = \quad \boldsymbol{r_y}\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}} + s_y\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}$

In questo sistema lineare di tre equazioni e tre incognite (in rosso), il determinante dei coefficienti è lo stesso (5) che avevamo per dedurre le r, s, t. Il determinante, diverso da zero per ipotesi, permetteva di ricavare le incognite, cioè le derivate seconde, dati i coefficenti e i termini noti. Ora il determinante, che essendo lo stesso è ancora differente da zero, permette di ricavare le incognite, cioè le derivate terze.

Ma, si osserverà, manca l'ultima derivata terza, la t_y. Questa può essere derivata dall'equazione

$$\frac{dt}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}$$

In forma abbreviata
$\frac{dt}{ds} = t_x\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}} + t_y\frac{d\mu}{\mathrm{ds}} = s_y\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}} + t_y\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}$
In cui t_x è stato derivato dal sistema precedente, e l'unica incognita è appunto t_y, immediatamente ricavabile.

Più istruttivo, però, è procedere da capo scrivendo un nuovo sistema.

Anzitutto si derivi rispetto a y l'equazione $f \;=\; A\,r + 2B\;s + C\;t$, ottenendo:
$\frac{\partial}{\partial y}\,(Ar + 2Bs + Ct) = \;A_y r + \;2B_y s + C_y t + Ar_y + 2B\;s_y + Ct_y,$
e si isolino a secondo membro le derivate $Ar_y + 2B\;s_y + Ct_y$, ponendo il resto nel termine noto f, derivato rispetto a y, ottenendo così:

$F_y = Ar_y + 2B\;s_y + Ct_y$

alla quale aggiungeremo le equazioni, trasformate nelle stesse incognite:
$\frac{ds}{ds} = \;\boldsymbol{r_y}\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}} + s_y\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}$
$\frac{dt}{ds} = \qquad\qquad s_y\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}} + \;t_y\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}$

Otteniamo così un sistema simile al precedente, con identico determinante (5) dei coefficienti. Questo ci permette di completare il lavoro e affermare che il calcolo di tutte le derivate terze (e, si può intuire, di ordine superiore) richiederà sempre lo stesso determinante. Quindi il sistema algebrico sarà sempre risolubile, e la nostra serie di Taylor potrà essere estesa a quanti termini si desiderano, producendo la soluzione desiderata.

II.3. A.2: "Se il determinante è diverso da zero, la soluzione del problema di Cauchy è unica per un'equazione lineare".

Supponiamo di avere due soluzioni z_1 e z_2 della stessa equazione (lineare):

$$Ar + 2Bs + Ct + \;2Dp + 2Eq + Fz + G = 0$$

Con le stesse condizioni al contorno:

$$p_C = -N(s)\left(\frac{d\mu}{ds}\right) + \left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right)\,(\frac{dz}{ds})_C$$

$$q_C = \left(\frac{d\mu}{ds}\right)\,(\frac{dz}{ds})_C + N(s)\left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right)$$

Introduciamo la funzione differenza $Z = z_2 - z_1$, e tutte le derivate della funzione differenza come P, Q, R, S, T.
Nella dimostrazione di questo teorema, **la linearità** gioca subito un ruolo importante, in quanto è proprietà delle equazioni lineari che le combinazioni lineari (somme e differenze di prodotti per numeri scalari) di soluzioni di un'equazione siano ancora soluzioni della medesima equazione. Noi stiamo appunto usando la differenza di due soluzioni.
L'equazione originale avrà una variante, poiché, facendo la differenza delle due equazioni per z_1 e z_2 , si vede che il termine costante G scompare, e restiamo con:

AR+ 2BS+ CT + 2DP +2EQ+FZ= 0.
Avremo anche Z = P = Q = 0 (differenze di due dati al contorno eguali) da cui

AR + 2BS+ CT = 0 . Inoltre:

$$R\frac{d\lambda}{ds} + S\frac{d\mu}{ds} \quad (+0) = 0$$

$$(0+) \quad S\frac{d\lambda}{ds} + T\frac{d\mu}{ds} = 0$$

nel quale tutti i termini noti sono eguali a 0.
(Ricordo che tutte le funzioni e le loro derivate sono definite sulla curva di contorno.)
Il determinante dei coefficienti (escludendo le incognite in rosso), calcolato rispetto alla prima riga, è oramai una vecchia conoscenza:

$$A\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 - 2B\frac{d\lambda}{ds}\frac{d\mu}{ds} + C\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2$$

Il determinante è dunque noto, ed *abbiamo ammesso per ipotesi che sia diverso da zero.* **Ma ora la situazione si è capovolta.** Un teorema (*che in genere viene fatto derivare senza lunghi discorsi dalla regola di Cramer*) afferma che un sistema di tre equazioni in tre incognite in cui il determinante dei coefficienti sia **diverso** da zero **ha una e una sola soluzione**. Ma il nostro sistema omogeneo, cioè i cui termini noti sono eguali a zero (ciò che è qui reso possibile dalla scomparsa della costante G), ha una soluzione ovvia, in cui R, S, T sono eguali a zero. Quindi, essa è anche l'unica soluzione. Questo è l'inizio della dimostrazione, perché occorrerebbe mostrare che anche le derivate terze e quarte e successive sono nulle. Ma per questo occorre solo dimostrare, seguendo le linee di II.1 (e questa volta noi non lo faremo, perché è realmente facile), che il sistema algebrico che risulta dalle nostre soluzioni alla ricerca delle derivate successive ha sempre lo stesso determinante, il che ci assicura che tutte le derivate del nostro sviluppo in serie di Taylor sono calcolabili, ma sono anche tutte nulle.

La funzione Z risulterebbe dunque identicamente nulla, il che equivale a dire che z_1 e z_2 sono la stessa funzione, o, anche, che il sistema ha una sola soluzione.

E se il determinante di questo sistema omogeneo fosse eguale a zero (sulla curva C)?
Allora, come discende dalla teoria dei determinanti applicata ai sistemi di equazioni algebriche lineari, potremmo avere almeno una soluzione per la nostra differenza Z, cioè la soluzione del problema di Cauchy non sarebbe unica.
Come vedremo nella prossima sezione, ponendo eguale a zero il determinante svolto, cioè:

$$A\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 - 2B\frac{d\lambda}{ds}\frac{d\mu}{ds} + C\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = 0$$

vengono definite le famose curve caratteristiche, che hanno diverse proprietà. Ne abbiamo appena trovata una: *se il contorno è una curva caratteristica, il problema di Cauchy può avere (almeno) due soluzioni analitiche distinte.*

II.3 B: Determinante eguale a zero.

II.3 B.1 Direzioni e curve caratteristiche.

Dire che il determinante è eguale a zero equivale a dire che è eguale a zero l'espressione

$$A(\frac{d\mu}{\mathrm{ds}})^2 - \ 2B\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\frac{d\mu}{\mathrm{ds}} + C\left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right)^2 = 0$$

A sua volta, questa espressione definisce in ogni punto **due** "direzioni", che sono dette "direzioni caratteristiche. " Le curve nel piano x,y le cui tangenti coincidono in ogni punto con le direzioni caratteristiche sono dette "curve caratteristiche". Più brevemente potremo dire che le curve caratteristiche sono in ogni punto tangenti alle direzioni caratteristiche. Ricordiamo ora che le curve

$$\mathrm{x} = \lambda(\mathrm{s}); \quad \mathrm{y} = \mu(\mathrm{s})$$

che noi abbiamo utilizzato sinora, sono le curve che definiscono il contorno C. Abbiamo quindi trovato che per ogni EDP lineare di secondo ordine esiste una rete di curve caratteristiche tali che se la curva C sulla quale ci sono date le condizioni al contorno è una di esse, o tangente ad una di esse, le derivate seconde sul contorno (e successive) non possono essere calcolate, e quindi non può essere calcolata neppure la soluzione del nostro problema di Cauchy in serie di Taylor.

Il determinante

$6a$
$$A(\frac{d\mu}{\mathrm{ds}})^2 - \ 2B\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\frac{d\mu}{\mathrm{ds}} + C\left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right)^2 = 0$$

ricordando la (4) può essere scritto come:

$6b$
$$A(\frac{dy}{\mathrm{ds}})^2 - \ 2B\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{ds}}\frac{dy}{\mathrm{ds}} + C\left(\frac{dx}{\mathrm{ds}}\right)^2 = 0$$

o ancora (moltiplicando per ds^2) come:

$6c$
$$A(\mathrm{dy})^2 - \ 2B\mathrm{dx}\ \mathrm{dy} + C(\mathrm{dx})^2 = 0$$

o anche (dividendo per dx^2) come :

$6d$ $$A(\frac{dy}{dx})^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0$$

che mette in luce l'equazione della tangente alle due curve caratteristiche. In questa forma, si mette in evidenza il fatto che la locuzione "rete" di caratteristiche è inesatta. In verità in ogni punto esistono due direzioni caratteristiche, lungo le quali il problema di Cauchy non può esser risolto.

Si tratta sempre della stessa equazione di secondo grado, le cui soluzioni non sono due numeri (distinti o coincidenti, reali o immaginari), ma curve, anch'esse distinte o coincidenti, reali o immaginarie. La "qualità" delle curve, come quella dei numeri per le equazioni algebriche, dipende dal valore del discriminante dell'equazione.

Questo, come è noto, è dato da

(2) $$\Delta = B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y)$$

(destinato a comparire sotto radice quadrata tanto nelle equazioni di secondo grado algebriche, quanto nella teoria delle EDP.)

1. Se esso è positivo, la radice quadrata sarà reale e avremo due curve reali. Questo caso porta il nome di caso "iperbolico", per le ragioni date in II.1.
2. Se il discriminante è nullo, avremo due curve reali e coincidenti (caso "parabolico").
3. Finalmente, se il discriminante è negativo, avremo due curve immaginarie (caso "ellittico".)

Inutile ripetere che sorgono problemi se, dato che A, B, C non sono costanti ma dipendono da x,y, il discriminante può variare da negativo a positivo, cambiando il tipo dell'equazione (**tipo misto,** che noi non considereremo).

In forma implicita, le equazioni delle curve caratteristiche, soluzioni di una delle (6) saranno per noi:

$$\boldsymbol{\varphi(x,y) = cost;\ \psi(x,y) = cost.}$$

E, con questo, siamo arrivati in porto.
O quasi.

Vorrei ora dare qualche idea dell'utilizzazione delle curve caratteristiche, che hanno effettivamente un ruolo cruciale nella teoria, diciamo elementare, delle EDP. Non sarà la parte più breve di questo saggio!

III. Applicazioni elementari delle curve caratteristiche.

III.1. Tre equazioni esemplari.

III.1a. L'equazione delle corde vibranti. Caso di equazione di tipo iperbolico

Come è noto dalla fisica, l'equazione delle corde vibranti è data da:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

Ove t è il tempo (che noi identifichiamo con la variabile y) e c la velocità di propagazione delle onde. Paragone con la (1) afferma che A=1, B=0, C= $-\frac{1}{c^2}$. C può essere posto =-1, usando per la velocità c opportune unità, che rendano c=1.

L'equazione delle caratteristiche vale (6d):

$$6d \qquad A(\frac{dy}{\mathrm{dx}})^2 - 2B\frac{dy}{\mathrm{dx}} + C = 0$$

$$cio\text{è} \qquad (\frac{dt}{\mathrm{dx}})^2 - 1 = 0$$

$$o\ meglio \qquad (\frac{dx}{\mathrm{dt}})^2 = 1$$

Le due soluzioni sono due famiglie di rette. Useremo i due simboli ξ ed η come "candidate coordinate naturali", la cui validità va ancora verificata.

Dalla $\frac{dx}{\mathrm{dt}} = +1$, la soluzione

$$\varphi(x,t) = \xi\,(x,t) = x - t = cost$$

Dalla $\frac{dx}{\mathrm{dt}} = -1$,

$$\psi(x,t) = \eta(x,t) = x + t = cost$$

III.1b L'Equazione di Laplace. Caso di equazione di tipo ellittico.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Qui: A = 1, B=0, C=1

L'equazione delle caratteristiche vale (6d):

$6d$ $$A(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}})^2 - 2B\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + C = 0$$

cioè $$(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}})^2 + 1 = 0$$

o meglio $$(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}})^2 = -1$$

Le due soluzioni sono due famiglie di rette, ma rette alquanto peculiari:

Dalla $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = +i$

$$\varphi(x,t) = \xi(x,y) = y - ix = cost$$

Dalla $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -i$

$$\psi(x,t) = \eta(x,y) = y + ix = cost$$

Sono queste le rette *isotrope* del piano, anzi, variando la costante, *fasci di rette isotrope* nel piano. Come si vede, una eventuale discussione geometrica (che noi vorremmo privilegiare a modo di esempio) è resa impossibile dall'impossibilità di disegnare le caratteristiche, interessanti curve che posseggono proprietà patologiche.

Per esempio, scrivendo y = ix +c e y =-ix +c per le due rette isotrope, e applicando la regola che due rette sono perpendicolari se il prodotto dei loro coefficienti angolari mm' vale -1, troviamo che ogni retta isotropa è perpendicolare a se stessa, assai difficile a rendersi graficamente. Altre interessanti proprietà, che furono applicate alla relatività ristretta, provengono dal fatto che $dy^2 + dx^2 = 0$.

III.1c L'Equazione di diffusione. Caso di equazione di tipo parabolico.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Usando apposite unità, a questo si riduce un'equazione di diffusione, come l'equazione della propagazione del calore in una dimensione. In tal caso, la funzione è la temperatura T , la variabile x è lo spazio e la variabile y è il tempo t . A un coefficiente D che normalmente compare in questa equazione è stato il valore 1, in base a un opportuno sistema di unità.

Qui: A=1, B=C=0.

L'equazione delle caratteristiche da utilizzare è la 6c

$6c$ $$A\,(\mathrm{dy})^2 - 2B\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} + C(\mathrm{dx})^2 = 0$$

La cui soluzione generale è:

$$dy = (B \pm \sqrt{B^2 - C})\, dx = 0$$

Qui dy =0 , da cui segue

y = const.

In altre parole, abbiamo una sola famiglia di caratteristiche, costituita dalle parallele all'asse x.

III.2. Dalle curve caratteristiche alle coordinate "naturali"; forma "canonica" delle equazioni – con riserve.

Le caratteristiche permettono di ridurre le equazioni a "forma normale" o "forma canonica", fornendo – più o meno direttamente - delle coordinate "naturali".

Si supponga di sostituire nella (1) nuove variabili $\xi(x,y)$ e $\eta(x,y)$.
La sostituzione produce una nuova equazione:

(7) $A'\ (\xi,\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} + 2B'\ (\xi,\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} + C'\ (\xi,\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} + 2D'(\xi,\eta)\ \frac{\partial z}{\partial\xi} + 2E'(\xi,\eta)\ \frac{\partial z}{\partial\eta} + F'(\xi,\eta)z + G = 0$

Le caratteristiche risulteranno da una nuova equazione:
(8) $A'\ (\xi,\eta)\ d\eta^2 - 2B'\ (\xi,\eta)d\xi\ d\eta + C'\ (\xi,\eta)d\xi^2 = 0$

È anzitutto essenziale accettare che **il cambiamento di variabili da (x, y) a (ξ,η) non muta il tipo dell'equazione,** cioè se l'equazione iniziale (1) è di tipo iperbolico, ellittico o parabolico, la (7) - cioè la (1) trascritta in termini di $\xi(x,y)$ e $\eta(x,y)$ – resta dello stesso tipo.

Si può affermare che le coordinate definite in base alle curve caratteristiche costituiscono una sorta di coordinate "naturali" per l'equazione. Tuttavia, come vedremo, il nome è ingannevole quanto basta. Di fatto, esso è utilizzabile appieno solo nel caso delle equazioni di tipo iperbolico: qui le curve caratteristiche sono le coordinate naturali.
Nel caso ellittico per scelta e in quello parabolico per forza, *le coordinate che rendono più semplice le equazioni derivano dalle curve caratteristiche, ma non sono le curve caratteristiche.*

Infatti, le curve caratteristiche in caso di equazioni di ***tipo ellittico*** sono due famiglie di curve complesse coniugate in ogni punto (non possono essere altro che due, perché l'equazione che le genera è di secondo grado). Scegliendole come coordinate, siamo obbligati ad entrare nel campo complesso, per cui si preferisce scegliere altri approcci. In quanto al *tipo parabolico*, le due famiglie di curve coordinate evidentemente coincidono, e quindi non possono formare un sistema di coordinate completo nel piano, ma ci danno al più una sola coordinata.

Oltre a questa confusione tra coordinate naturali e caratteristiche, non sempre viene data una chiara discussione di questo punto sui sacri testi.

Anzitutto, è evidente che il il cambio di coordinate non cambia il fatto che l'equazione (7) (cioè la (1) trasformata in termini di $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$) **mantenga la sua validità,** cioè il suo membro di sinistra sia eguale a zero. Quindi, per quanto l'aspetto esterno ad esempio di A(x,y) possa essere diverso da A'(ξ, η), le sue relazioni con altre funzioni devono restare invariate.

D'altra parte, è abbastanza chiaro che le derivate rispetto a x e y non possono diventare derivate rispetto ξ e η semplicemente con un cambiamento di lettere: occorre tenere conto delle relazioni fra le due coppie di variabili.
Ma per alcuni autori, ciò è irrilevante. La nuova equazione per le caratteristiche (8) può assumere forme assai differenti a seconda della specifica forma delle trasformazioni $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$, ma le curve caratteristiche che ne risultano in termini di ξ e η devono sempre comunque corrispondere alle caratteristiche in termini di x e y. Ora, nel tipo iperbolico, tali caratteristiche sono curve che, scelte come contorno del dominio di interesse, hanno l'importante conseguenza intrinseca di non permettere la soluzione del problema di Cauchy. Questo fatto non può dipendere dalle coordinate usate: se l'equazione (1) possiede due famiglie di caratteristiche reali, anche la (7) avrà ancora due famiglie di caratteristiche reali, e via dicendo. In altre parole, il tipo dell'equazione non cambierà. Se cambiasse, potremmo trovare trasformazioni che ci portano alla EDP del secondo ordine ***del tipo e della forma*** più conveniente. Potremmo, ad esempio, trovare una trasformazione di coordinate che trasforma un'equazione della diffusione del calore (di tipo parabolico) in una equazione delle corde vibranti (di tipo iperbolico). Questo avrebbe conseguenze anche sulle condizioni al contorno che, come vedremo, sono diverse per i tre tipi di equazioni. La natura di un problema fisico non può cambiare semplicemente in base a una trasformazione di coordinate.

Se questo ragionamento è abbastanza convincente, si può saltare il formalismo che segue.

Continuando invece nel formalismo, noto ancora che alcuni autori, nel passare da un sistema di coordinate all'altro, usano le stesse lettere A, B, C per i coefficienti, mentre altri, che io ho seguito, usano A', B', C'.
Il problema è di secondaria importanza nell'esempio che viene fatto quasi universalmente, delle corde vibranti, con c=1 (in apposite unità.) Questo esempio insegna senza insegnare,

perché in questo caso A, B, C sono **costanti,** e quindi non mutano passando da un sistema di coordinate all'altro. Inoltre, nell'equazione delle corde vibranti abbiamo B =0, cioè manca il termine **s**, misto, il che comporta discreti vantaggi.
Il fatto è che noi vogliamo ridurre a forma canonica il *caso generale.*

Ma anche qui, la forma normale o forma canonica delle equazioni, basata sulle curve caratteristiche, non è sempre utilizzata. In altre parole , le curve caratteristiche come **coordinate** non sono completamente naturali, e non producono sempre direttamente una **forma riconosciuta come canonica** delle equazioni.

Quello che interessa, è la trasformazione dei termini di secondo ordine, cioè del trio

$$A'\ (\xi,\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+2B'\ (\xi,\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}+C'\ (\xi,\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$

termini che sono anche i soli che entrano nell'equazione (8), dalla quale si ricavano le curve caratteristiche, il concetto base per la classificazione e il trattamento delle nostre EDP.

Ripeto che, nel caso generale, le curve caratteristiche, soluzioni della (8), cioè $\varphi(x,y)=const\ \ e\ \ \psi(x,y)=const$ non sono ancora necessariamente le coordinate $\xi\ \ e\ \ \eta$.

Abbiamo, usando la solita notazione che fa uso di indici ($\frac{\partial \xi}{\partial x}=\xi_x\ etc.$)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\varphi_x+\frac{\partial z}{\partial \eta}\psi_x\ \ ;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\varphi_y+\frac{\partial z}{\partial \eta}\psi_y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\varphi_x+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\psi_x=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\varphi_x+\frac{\partial z}{\partial \eta}\psi_x\right)\varphi_x+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\varphi_x+\frac{\partial z}{\partial \eta}\psi_x\right)\psi_x$$
$$=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}{\varphi_x}^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\varphi_x\psi_x+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}{\psi_x}^2+..$$

E, mutatis mutandis:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}{\varphi_y}^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\varphi_y\psi_y+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}{\psi_y}^2+..$$

Resta ora il termine più complicato:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\varphi_x+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\psi_x=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\varphi_y+\frac{\partial z}{\partial \eta}\psi_y\right)\varphi_x+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\varphi_x+\frac{\partial z}{\partial \eta}\psi_x\right)\psi_x$$
$$=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\varphi_x\varphi_y+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\varphi_x\psi_y+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\varphi_y\psi_x+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\psi_x\psi_y+..$$

I **termini riassunti come +.. coinvolgono solo le derivate prime di z rispetto a ξ, η** . Ad esempio, $\frac{\partial \varphi_x}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)$, e simili. Essi saranno quindi posti nel termine noto che chiameremo più sotto K.

(1) Moltiplicando $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ per A(x,y); $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ per C(x,y) e $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ per 2B; (2) raccogliendo i termini contenenti $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$, quelli contenenti $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$, e quelli contenenti $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}$; (3) scrivendo A, B, C in termini di ξ e di η, allora i coefficienti delle tre derivate seconde rispetto a ξ ed η saranno A′, B′, C′, quindi ampiamente differenti dagli originali A, B, C.

Avremo l'espressione dei tre termini contenenti le derivate seconde

$$A'\ (\xi,\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2B'\ (\xi,\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + C'\ (\xi,\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$

Come:

(9) $$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(A{\varphi_x}^2 + 2B\ \varphi_y\varphi_x + C{\varphi_y}^2\right) + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\left(A\varphi_x\psi_x + B\left(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x\right) + C\varphi_y\psi_y\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\left(A{\psi_x}^2 + 2B\psi_x\psi_y + C{\psi_y}^2\right)$$

Ma le equazioni da applicare qui sono le equazioni delle caratteristiche (valide per tutti i tipi di equazioni):

$6d$ $$A\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)^2 - 2B\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + C = 0\ .$$

Lungo una curva della famiglia di caratteristiche $\varphi = costante$ il differenziale totale $d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$. Si può allora porre $\frac{dx}{dy} = -\frac{\varphi_y}{\varphi_x}$ e inverso, per cui la 6d diventa

$$A{\varphi_x}^2 + 2B\varphi_y\varphi_x + C{\varphi_y}^2 = 0$$

In questo modo si annulla il coefficiente di $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$.

Ora i tre tipi di equazioni (escluso il tipo "misto") possono essere trattati - ma solo fino a un certo punto - insieme:

A) Equazioni di tipo iperbolico:

Le nuove coordinate sono date da: $\xi = \varphi(x,y)$; $\eta = \psi(x,y)$, dove le due funzioni ψ e φ sono ricavate dalla (6), come più volte mostrato da pag. 19 a pag.24.

Anche lungo la famiglia di caratteristiche, reali, $\psi = costante$, il differenziale totale $d\psi = \psi_x dx + \psi_y dy = 0$, da cui segue che $A{\psi_x}^2 + 2B\psi_x\psi_y + C{\psi_y}^2 = 0$, per cui si annulla anche il coefficiente di $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$.

Ora possiamo scrivere che il termine $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}$ è eguale al termine a secondo membro, K, in cui non compaiono derivate seconde, diviso per il coefficiente di $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}$. Ne risulta la forma **canonica o normale** della nostra equazione di tipo iperbolico:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{K\left(z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}, \xi, \eta\right)}{2\left(A\,\varphi_x\psi_x + B\left(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x\right) + C\,\psi_y\varphi_y\right)}$$

Nella equazione delle corde vibranti (che è la più semplice di tipo iperbolico)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

Le nuove coordinate, ricavate dalle caratteristiche, come sappiamo da pag.19 e come ritroveremo fra poco, sono $\varphi = \xi(x,y) = x - y$; $\psi = \eta(x,y) = x + y$. In tal caso $\varphi_x = 1$, $\psi_x = 1$; $\varphi_y = -1$, $\psi_y = 1$. Da cui:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\varphi_x + \frac{\partial z}{\partial \eta}\psi_x = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\varphi_y + \frac{\partial z}{\partial \eta}\psi_y = -\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}$$

Da una siffatta equazione, procedendo alle derivate seconde non risulteranno alcune derivate prime.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\varphi_x + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\psi_x = +\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = +\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\varphi_y + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\psi_y = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(-\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(-\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = +\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\varphi_x + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\psi_x = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(-\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = -\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$

senza ulteriori termini con derivate prime da aggiungere *al termine noto che di partenza è nullo.*

Per A = 1, B = 0, C = -1, la (9) diventa:

$$(9') \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}(1 + 0 - 1) + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}(1 + 0 + 1) + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}(1 + 0 - 1) = 0$$

Qui emerge il termine che chiamammo “s” che pareva assente dall’equazione (vedi pag. 11):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Come già visto, le curve caratteristiche sono la soluzione di

$$(\frac{dx}{dy})^2 = 1$$

Per questa semplicissima equazione di tipo iperbolico, le curve caratteristiche costituiscono, come si è visto, due famiglie di rette:

Dalla $\frac{dx}{dy} = +1$, la soluzione

$$\xi\ (x, y) = x - y = cost$$

Dalla $\frac{dx}{dy} = -1$, la soluzione

$$\eta(x, y) = x + y = cost$$

Le due famiglie di curve sono in questo caso manifestamente perpendicolari, in quanto il prodotto delle due tangenti ($\frac{dx}{dy}$ = +1 e $\frac{dx}{dy} = -1$) è -1.

Le equazioni di tipo iperbolico sono le più semplici da trattare, grazie al fatto che si hanno due famiglie di caratteristiche, entrambe reali, facili da raffigurarsi graficamente.

Vediamo ora di ottenere lo stesso risultato in un modo più intuitivo, che ci permetterà di ottenere le coordinate ideali per gli altri tipi di equazione.
Prendiamo come esempio un'equazione che sappiamo essere di tipo iperbolico, con coordinate reali. Che sia di tipo iperbolico lo sapremo dal discriminante costruito sui coefficienti A, B, C.

Il nostro obiettivo, però, è in ultima analisi quello di cambiare gli indici dei due assi ortogonali da (x, y) a (ξ, η) nel nuovo piano (ξ, η).

Questo può avvenire solo se l'equazione delle caratteristiche si riduce a

$$d\xi\ d\eta = 0$$

Da cui le due famiglie, desiderate, $\xi = cost$ e $\eta = cost.$

Ciò richiede che sia: A' = 0, C'=0 e -2B' a piacere, ma diversa da zero. Con questi valori di A' e C', e dividendo tutto per 2B' otteniamo l'equazione in forma "normale" o anche "forma canonica" di tipo iperbolico:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} + 2d(\xi,\eta)\ \frac{\partial z}{\partial\xi} + 2e(\xi,\eta)\ \frac{\partial z}{\partial\eta} + f(\xi,\eta)z + g = 0$$

In particolare, la nostra equazione delle corde vibranti si ridurrà a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

Di qui discende direttamente la soluzione detta di D'Alembert, che vedremo più avanti (Sez. IV.1, pag.30).

B) Equazioni di tipo parabolico.

In questo caso, come si è annunciato, la coincidenza delle due soluzioni ci permette di definire una sola coordinata, per cui ne dovremo inventare una seconda.

Sia la prima coordinata, soluzione dell'equazione dell'equazione delle caratteristiche, $\xi = \varphi(x,y)$. Essa verrà trattata come in pag. 24, ed annullerà il coefficiente di $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}$ nell'equazione (9).

Scegliendo ξ come asse y, la coordinata ortogonale ad essa non può essere altro che l'asse x. In altre parole, le nuove coordinate saranno:

$$\xi = \varphi(x,y) \qquad \text{e} \qquad \eta = \psi(x,y) = x.$$

Dall'espressione $\eta = \psi(x,y) = x$, abbiamo $\psi_x = 1,\ \psi_y = 0.$ Il secondo termine dell'eq.(9):

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}\left(A\varphi_x\psi_x + B\left(\cancel{\varphi_x\psi_y} + \varphi_y\psi_x\right) + \cancel{C\varphi_y\psi_y}\right)$$

Diventa quindi:

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}\left(A\varphi_x + B\varphi_y\right)$$

Ma il coefficiente $\left(A\varphi_x + B\varphi_y\right) = 0$. Infatti $\left(A\varphi_x + B\varphi_y\right)^2 = A^2\varphi_x{}^2 + 2AB\varphi_x\varphi_y + B^2\,\varphi_y{}^2$, e, nel caso parabolico, il discriminante vale $AC - B^2 = 0$. Quindi, dividendo per A e scrivendo $B^2/A = C$ troviamo: $\frac{\left(A\varphi_x + B\varphi_y\right)^2}{A} = A\varphi_x{}^2 + 2B\,\varphi_y\varphi_x + C\varphi_y{}^2 = 0$ dall'equazione delle caratteristiche. *Cdd.*

Di tutta l'equazione resta quindi solo l'ultimo termine,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\left(A\psi_x{}^2 + \cancel{2B\psi_x\psi_y + C\psi_y{}^2}\right) + \cdots = A\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} + \cdots$$

Che è la forma **normale** parabolica.

C) Equazioni di tipo ellittico

Passando ora alle equazioni di tipo ellittico, abbiamo due opzioni.
La prima è quella di risolvere la nostra equazione delle caratteristiche per x e y, che ci dà due soluzioni complesse coniugate, $\varphi = f + ig$; $\psi = f - ig$, in cui f e g sono reali,
L'equazione di Laplace, ad esempio, verrebbe ridotta a quella delle corde vibranti, con caratteristiche $\xi = x + iy$ e $\eta = x - iy$, con velocità c = i, immaginaria.
In questo modo, si ricadrebbe nel caso precedente, e si potrebbe dire che anche per le equazioni ellittiche vale la stessa forma normale di quelle iperboliche, ma al prezzo di perdere la realtà delle variabili ξ ed η.
Onestamente, *questa sarebbe la vera forma canonica o normale delle equazioni ellittiche*, ma in una trattazione elementare viene comunemente abbandonata.

La seconda opzione (che seguiremo) è quella di restare nel campo reale. Scegliamo dunque le soluzioni:

$$\xi(x,y) = \varphi + \psi = 2f$$
$$\eta(x,y) = \frac{1}{i}(\varphi - \psi) = 2g$$

In termini di ξ ed η, le equazioni delle caratteristiche sono

$$\xi \pm i\eta = cost.$$

L'equazione delle caratteristiche

6c' $$A'(d\eta)^2 - 2B'\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + C'(\mathrm{d}\xi)^2 = 0$$

Viene soddisfatta per B' = 0, A' = C' , $\mathrm{d}\xi$ arbitrario e $d\eta = \pm i\, \mathrm{d}\xi$.

Inserendo nella (7)

(7) $$A'(\xi,\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2B'(\xi,\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + C'(\xi,\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + 2D'(\xi,\eta)\frac{\partial z}{\partial \xi} + 2E'(\xi,\eta)\frac{\partial z}{\partial \eta} + F'(\xi,\eta)z + G = 0$$

i valori di A', B', C' , dividendo per A', e dando nuovi nomi alle D'/A' etc si trova:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = d(\xi,\eta)\frac{\partial z}{\partial \xi} + e(\xi,\eta)\frac{\partial z}{\partial \eta} + f(\xi,\eta)z + g$$

Che "si può considerare" come la forma canonica delle equazioni ellittiche. Infatti, quando il secondo membro è eguale a zero, ricadiamo nel prototipo delle equazioni ellittiche, cioè l'equazione di Laplace.

IV. Introduzione al legame fra i tipi delle equazioni e le condizioni al contorno "a loro acconce", che permettono una soluzione unica.

Scopo di questa parte del mio saggio è indicare quali condizioni al contorno siano adeguate per i vari tipi di EDP lineari del II ordine, e quali ne siano le ragioni. Il metodo che seguirò sarà quello di utilizzare le tre equazioni più semplici o più note dei vari tipi, e di estrarne il massimo possibile di informazioni. Dico subito che questa può solo essere considerata un'introduzione elementare al problema.

Il cosiddetto "**Problema di Cauchy**", nel caso di una EDP lineare del II ordine, è quello di trovare la funzione che soddisfa l'equazione. In aggiunta, (e qui il problema diventa problema di Cauchy) la **funzione** deve assumere su una data linea di contorno determinati valori. Non basta: anche la **derivata normale** della funzione deve assumere sulla linea di contorno determinati valori. Le condizioni di Cauchy appaiono come la logica estensione delle condizioni che si applicano alle EDO del II ordine: là si assegna l'equazione, e con essa i valori della soluzione e della sua derivata prima in un punto x_0. Senza questi dati non si potrebbe costruire una soluzione generale o una soluzione basata sulla serie di Taylor.

Le condizioni al contorno non vanno quindi viste unicamente come un problema in più: esse hanno la funzione di limitare (nel caso ideale) a una sola il numero di soluzioni possibili, e al tempo stesso di darci un punto (anzi, una linea) di partenza per i nostri calcoli.

Ragionando sulle condizioni al contorno dette di Cauchy e sull'equazione stessa, abbiamo definito un determinante che ci ha permesso di individuare certe curve caratteristiche che non possono essere utilizzate come contorno. La natura di queste curve, a sua volta, ci ha permesso di definire tre tipi di EDP lineari del II ordine (più un tipo misto, che non menzioneremo più).
Già dalla natura delle curve caratteristiche (reali e distinte, o coincidenti, o complesse), si vede che i tre tipi di equazioni vanno trattati in modo diverso, e la domanda si pone, se si debba insistere nell'imporre le condizioni di Cauchy per tutti i tipi, o se altre condizioni al contorno siano più adeguate.

Paradossalmente, il teorema che utilizza le condizioni di Cauchy per vedere se sia possibile risolvere l'EDP prescritta, rivela che a determinate equazioni le condizioni di Cauchy non sono applicabili. In particolare, esse possono rivelarsi troppo esigenti, o "sovradeterminate". Vengono quindi in mente due possibilità di alleviare le condizioni:

1) Vengono assegnati solo i valori delle funzione sul contorno (condizioni di **Dirichlet**)
2) Vengono assegnati solo i valori della derivata normale sul contorno (condizioni di **Neumann**).

Ma, francamente, utilizzare le condizioni del problema di Cauchy per dimostrare che vi sono tipi di equazioni a cui le condizioni di Cauchy non si applicano (ma fino a che punto?), mi sembra alquanto azzardato. Ma tutti lo fanno, e i risultati danno loro ragione.

IV.1 Equazioni di tipo iperbolico.

Già nel caso dell'equazione delle corde vibranti ci possiamo trovare a dover ridurre le nostre pretese. Vediamo questo caso, e, come introduzione, risolviamo finalmente col metodo di d'Alembert l'equazione a cui siamo giunti da tempo.
L'equazione, come è noto, in coordinate "naturali" $\xi = x - y$ e $\eta = (x + y)$ è:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

La soluzione è semplice: scriviamo l'equazione come

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right) = 0$$

Questa equazione ci dice che la funzione $\frac{\partial z}{\partial\xi}$ è al più una funzione (arbitraria) che non comprende la variabile η, quindi si tratta di una funzione F(ξ) della sola ξ.
Integriamo ora una seconda volta,

$$z(\xi, \eta) = \int F(\xi)\, d\,\xi + g(\,\eta) = f(\xi) + g(\,\eta) = f(x - y) + g(x + y)\,.$$

La F(ξ) nasce come una "costante" rispetto a η, ma del tutto arbitraria, e la g(η) è una costante arbitraria rispetto a ξ, e quindi può essere funzione, anch'essa del tutto arbitraria,) della sola η.
E la costante arbitraria che dovrebbe seguire l'integrazione? Normalmente si precorrono i tempi. Dato che la z(x) è data dalla somma delle due funzioni f+g (vedi sotto, iii.1 e iii.2), si vede che la costante di integrazione scompare nella funzione soluzione.

L'integrale rispetto a ξ certamente contiene la ξ, e quindi la soluzione generale sarà

$$z(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\,\eta) = f(x - y) + g(x + y).$$

Le due funzioni f e g sono arbitrarie, e sono **tutte** le soluzioni dell'equazione. La soluzione, come si vede, è quanto si può generale.

Il problema è ora quello di utilizzare le condizioni al contorno di Cauchy per determinare le funzioni f(x - y) e g(x + y) per un determinato problema.
Supponiamo di imporre le condizioni di Cauchy sul contorno C dato da un tratto dell'asse x (y=0). Qui avremo

(i) z(x,0) cioè $z_0(x) = f(x) + g(x)$.

La seconda condizione al contorno, che ci dà il valore al contorno y=0 (asse x) della normale al contorno, che è l'asse x, quindi la derivata rispetto a y, è

$$n(x,0) = \frac{\partial z_0}{\partial y} = \frac{\partial z_0}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z_0}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -f'(x) + g'(x)$$

(Scrivo $\frac{\partial z_0}{\partial y}$ per $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0$ per comodità di scrittura).
Integrando la seconda equazione rispetto a x, per riavere la f e la g, otteniamo

$$(ii) \qquad \int n(x,0)\,dx = \int_a^x \frac{\partial z_0}{\partial y}\,dx = -f(x) + g(x)$$

(avendo indicato in rosso le incognite e in blu i termini noti).

I limiti di integrazione, che utilizzeremo in generale, dove non saranno scritti, sono scelti come segue: il limite inferiore è un "a" arbitrario e il limite superiore è x, generico. Come vedremo, non vanno sottovalutati. Invece, come è già stato annunciato, l'integrale di n(x,0) prevede una costante arbitraria K. Essa però scompare nella somma f+g (vedi sotto) e quindi viene omessa.

Sommando membro a membro la (i) e la (ii), abbiamo

$$(iii.1) \qquad z_0(x) + \int \frac{\partial z_0}{\partial y}dx = 2\,g(x) \qquad \text{cioè} \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(z_0(x) + \int \frac{\partial z_0}{\partial y}dx\right) + K$$

Dove, per evitare confusione, abbiamo scritto $z_0(x)$ invece di $z(x,0)$.
La differenza produce

$$(iii.2) \qquad z_0(x) - \int \frac{\partial z_0}{\partial y}dx = 2\,f(x) \qquad \text{cioè} \quad f(x) = \frac{1}{2}\left(z_0(x) - \int \frac{\partial z_0}{\partial y}dx\right) - K$$

La costante di integrazione K (o due costanti diverse) devono scomparire nella somma data in (i)
Una volta trovate le due funzioni f(x) e g(x), non dobbiamo fare altro che sostituire nelle due funzioni la x con x-y in f(x) e con x+y in g(x). Ma la fretta di concludere rapidamente un soggetto che probabilmente lo studioso non incontrerà mai più, fa talvolta omettere

delle importanti osservazioni anche ad autori esperti. In effetti, lo studioso inesperto, facendo la somma f(x) + g(x) concluderebbe che

$$z(x,y) = f(x-y) + g(x+y) = \frac{1}{2}\left(z_0(x-y) + z_0(x+y)\right)$$

poiché, così come sono scritti in vari testi, i due integrali sembrano cancellarsi. Il fatto che sovente non si dice è che, come si è annunciato per la (ii), tanto in f(x) quanto in g(x) gli **integrali** vanno entrambi considerati da un limite inferiore a piacere $\boldsymbol{a}$ a un limite superiore $\boldsymbol{x}$. *La ragione (pratica) è che questi integrali, quando si calcolino soluzioni di un problema, in cui in genere concorrono entrambi, vengono combinati in modo da eliminare la* $\boldsymbol{a}$ **arbitraria.**

In quanto ai limiti superiori, x, vanno anch'essi tramutati in (x-y) per f(x) e in (x+y) per g(x) quando si scrive la soluzione generale. Qui allora valgono le regole elementari del calcolo integrale secondo cui

$$-\int_M^{x-y} \dots dx = +\int_{x-y}^{M} \dots dx$$

e che

$$\int_a^M \Phi dx + \int_M^b \Phi dx = \int_a^b \Phi dx$$

Ne risulta che la soluzione generale è:

$(v) \quad z(x,y) = f(x-y) + g(x+y) = \frac{1}{2}\left(z_0(x-y) + z_0(x+y) + \int_{x-y}^{x+y} \frac{\partial z_0}{\partial y} dx \right)$

Osserviamo ora le conseguenze di ciò che è stato fatto.

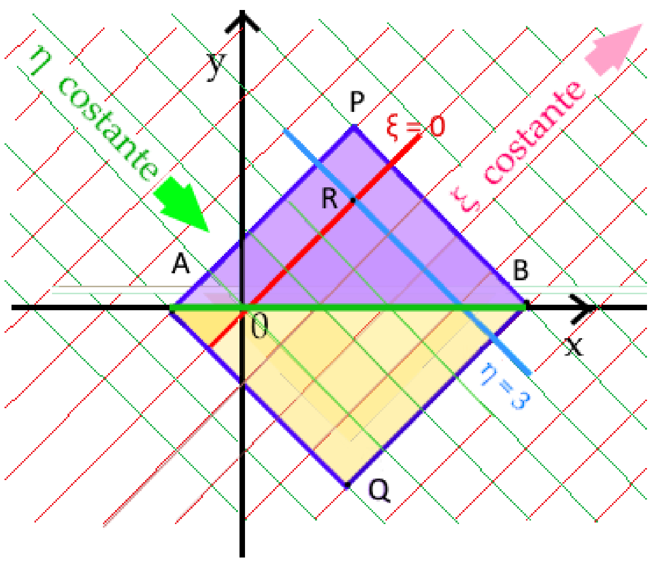


Fig.3

Il caso dell'equazione iperbolica da noi descritta diviene il caso dell'equazione classica delle corde vibranti (data in III.1.a) ponendo y = ct, dove c è la velocità delle onde. Abbiamo scelto un contorno aperto, il segmento verde AB dell'asse x, su cui sono date le condizioni iniziali $z_0(x)$, cioè il profilo della corda tesa fra A e B, e $\frac{\partial z_0}{\partial y}$(x), la velocità punto per punto, entrambi all'istante zero, cioè per ct =y =0.

Poiché questo è il contorno, e per l'andamento delle caratteristiche ξ= cost, η=cost, vediamo che "con i nostri mezzi" la funzione è determinata solo nel triangolo APB oppure nel triangolo AQB separatamente.
Sappiamo che la soluzione è data da

$$z(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) = f(x-y) + g(x+y).$$

E abbiamo potuto ricavare dalle condizioni al contorno (y =0) i valori delle due funzioni f(x) e g(x), equazioni (iii)1 e (iii) 2. Nel punto R($\xi = 0$, $\eta = 3$) ovvero R(x=1.5, y=1.5) la soluzione sarà:

$$z(1.5, 1.5) = f(\xi = 0) + g(\eta = 3),$$

cioè, applicando la (v)

$$z(1.5, 1.5) = \frac{1}{2}\left(z_0(0) + z(3) + \int_0^3 \frac{\partial z_0}{\partial y} dx\right)$$

che provengono direttamente dalle condizioni al contorno, che in questo caso è la retta y=0, ove il solo parametro è s= x.
Poiché le due funzioni f e g dipendono separatamente da ξ e da η, è chiaro che per ξ= cost avremo anche f(ξ)= cost = f(x=0) , e g(η)= cost = g(x = 3). Sia l'una che l'altra, però, contengono solo parte dell'integrale.

Dal fatto che la soluzione in un punto (x,y) è data dalla somma dei valori presentati dalle curve caratteristiche, vediamo che le curve caratteristiche propagano dal contorno una parziale informazione separatamente, frase che dice molto in poche parole, ma che , a mio parere, è di non immediata comprensione. Qui spero di averla chiarita, almeno per chi ha avuto le mie difficoltà.

Possiamo credere che le stesse considerazioni valgano per un caso di forma più comune, come quello riportato in Fig.4 [1] : note le condizioni al contorno sul tratto AB della curva S, che non è più il comodo asse x, si ottengono "facilmente" le soluzioni nelle due aree APB e AQB.

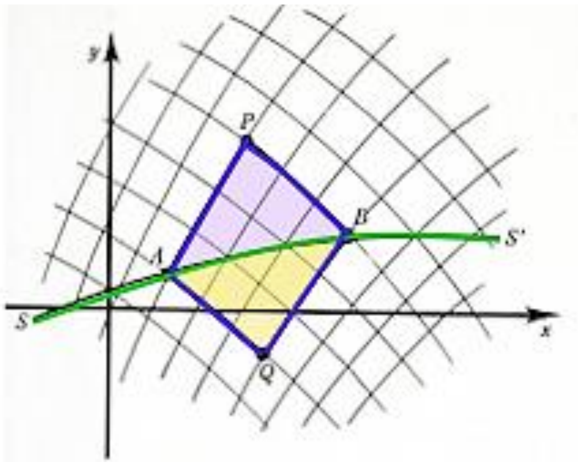


Fig.4

E le soluzioni al di fuori delle due aree triangolari? In fisica matematica, non ha molta importanza conoscere la soluzione per un tempo t= y/c limitato, ma, se possibile, la si vorrebbe per t=infinito.

E qui mi spiace, ma come annunziato, la mia è solo un'introduzione al problema, in cui mi accontento di dare una modesta introduzione alle EDP lineari del II ordine, in particolare chiarire i segreti della loro classificazione. La soluzione delle equazioni non è l'obiettivo di questo saggio.

Naturalmente, il lettore dovrebbe porsi lui stesso le domande, se qualcosa è restato oscuro. Nel caso delle equazioni iperboliche appena trattate, il problema più ovvio nasce appunto dall'osservazione che la soluzione col metodo delle caratteristiche esiste per ora solo nelle due aree triangolari APB e AQB. *Almeno una delle due curve caratteristiche non raggiunge punti al di fuori di queste due aree*, e quindi ci mancano dei dati, soprattutto se vogliamo vedere, nel caso delle onde, lontano nel futuro o nel passato, che per noi è la coordinata y =ct. A questa assenza si può supplire con altre condizioni e in altri modi. Ma lascerò eventualmente questo argomento per un altro saggio, che, se dovrà trattare anche le soluzioni delle equazioni di tipo ellittico e parabolico, sarà più voluminoso di questo.

Continuiamo ora a estrarre concetti dalle equazioni di tipo iperbolico.

Vediamo che cosa accade quando il contorno (ABC in color verde, in Fig. 5, con l'interno del dominio di interesse sulla destra) è tangente a una curva caratteristica, come avviene nel punto B. In Fig.5 il contorno è tangente a una curva ξ. Ne segue che nella maggior parte dei casi (escludiamo che C sia un punto di flesso) , in un intorno più o meno grande del punto B, compreso nel dominio di interesse, le caratteristiche della famiglia della caratteristica tangente tagliano il contorno in due punti .

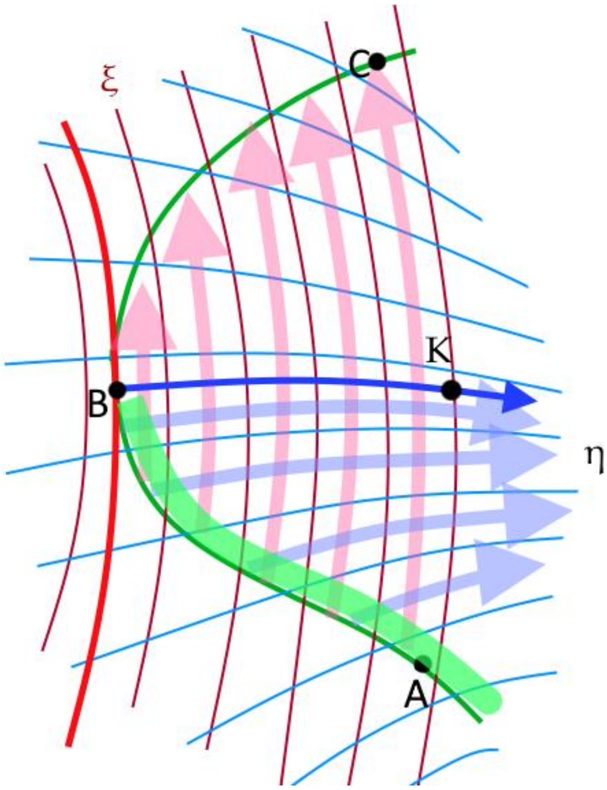


Fig.5

Se noi assegniamo le condizioni al contorno di Cauchy (funzione e derivata normale) nel tratto AB, evidenziato in figura, vediamo che la soluzione può esser determinata nella regione ABK e sua continuazione sulla destra.

Se ora vogliamo completare sul tratto BC l'assegnazione delle condizioni al contorno, vediamo che è possibile assegnare i valori delle caratteristiche della famiglia η (famiglia delle caratteristiche "orizzontali"), mentre i valori delle caratteristiche della famiglia ξ sono già determinati dalle condizioni di Cauchy sul tratto AB. Infatti, i valori delle caratteristiche ξ sul tratto BC non possono essere assegnati a piacere, perché o risultano ridondanti, non essendo altro che i valori provenienti dal tratto AB, o li contraddicono, nel qual caso il sistema non ha soluzione (o, se si preferisce non ha un'unica soluzione). Ne risulta che, in un modo o nell'altro, il sistema è *"sovradeterminato".*

Possiamo quindi dire che ci bastano metà delle condizioni di Cauchy per il tratto BC, quindi o le condizioni di Dirichlet, che assegnano i valori della soluzione sul contorno, o le condizioni di Neumann, che assegnano i valori della derivata normale.

Vediamo anche che se il contorno è chiuso, il problema della sovradeterminazione (se assegniamo i valori delle funzione e della derivata normale sull'intero contorno,) sono ancora più gravi.

IV.2 Equazioni di tipo ellittico

Nel caso di queste equazioni, che nella forma naturale non si distinguerebbero dalle equazioni di tipo iperbolico, il problema è che le condizioni al contorno si basano sempre sulle curve $\varphi = \text{cost}\ \ e\ \ \psi = cost$, che risolvono la 6c', e non sono curve reali.

Tuttavia, un caso particolare non molto diverso formalmente dall'equazione delle corde vibranti, è **l'equazione di Laplace:**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

(per quanto riguarda il significato intuitivo del Laplaciano $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, darò un'introduzione per principianti-pedoni in A4).

Noi cercheremo luce sulle condizioni al contorno più "acconce" facendo riferimento a questa equazione, che, oltre ad essere in certo senso il prototipo delle equazioni ellittiche, fu fortunatamente tra le prime ad essere esplorata dai matematici, per cui le sue soluzioni, dette funzioni "*armoniche*", sono state studiate a fondo da vari punti di vista.

In Appendice A3 vedremo di affrontare in maggior dettaglio i teoremi introduttivi che riguardano queste funzioni (tenendo conto del fatto che in A2 espongo in modo semi-intuitivo il **Lemma di Gauss,** e l'annesso **Teorema della divergenza**, che stanno sullo sfondo di molto di ciò che segue). Si assumerà che le funzioni a cui ci riferiremo siano sempre finite e continue con le loro derivate prime nello spazio S in cui le consideriamo. Le funzioni armoniche di cui ci occuperemo, sono in genere analizzate in tre dimensioni, poi facilmente ridotte a due. *Noi partiremo direttamente da due dimensioni* e per noi lo spazio S sarà il piano.

Ora, **per le funzioni armoniche** valgono due importanti teoremi (entrambi dimostrati in appendice):

1. ***Teorema di unicità nel caso delle soluzioni del problema di Dirichlet, per un contorno chiuso.***

*Se di una funzione V armonica (quindi $\Delta V=0$) e regolare (come già stipulato) in uno spazio finito S (delimitato da un contorno chiuso) si assegnano i valori sul contorno (**problema di Dirichlet)**, V è univocamente determinata nello spazio S.*

2. ***Teorema di unicità (a meno di una costante) nel caso del problema di Neumann, per un contorno chiuso.***

Se di una funzione V armonica (quindi $\Delta V=0$) e regolare in un spazio finito S (delimitato da un contorno chiuso) si assegnano i valori della derivata normale $grad\,V\ \cdot \boldsymbol{n}$ *sul contorno* ***(problema di Neumann)****, la V è univocamente determinata nello spazio S****, a meno di una costante.***

Sebbene i due teoremi di unicità non garantiscano che la soluzione esista, e ancor meno ci indichino il modo di ottenerla, essi però ci dicono che **le condizioni di Cauchy sono sovrabbondanti per le soluzioni dell'equazione di Laplace (funzioni armoniche.)** Infatti, se un'equazione soddisfa alle condizioni di Dirichlet, un'equazione che soddisfa alle condizioni di Neumann sul medesimo contorno deve essere la stessa, e viceversa (nel secondo caso a meno di una costante).

Estendendo, forse ottimisticamente, questo concetto dalle equazioni di Laplace a quelle generali di tipo ellittico, concludiamo quindi che per ottenere le soluzioni di un'equazione di quest'ultimo tipo, *generalmente richieste in un dominio limitato da un contorno chiuso*, sono sufficienti o le condizioni di Dirichlet o quelle di Neumann.

IV.3 Equazioni di tipo parabolico.

Anche qui vedremo quali informazioni generali si possano ottenere dalla più semplice equazione di tipo parabolico, quella della "conduzione del calore", che scriveremo come

IV.3.1
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{d}\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

Come si è detto (pag.19), c'è una sola famiglia di caratteristiche, quella di y (qui t) = costante, cioè la famiglia delle parallele all'asse x.

Teorema: Supponiamo che la curva γ su cui si assegnano i valori richiesti dal **problema di Cauchy** (cioè i valori della soluzione z, e i valori della derivata normale) abbia gli estremi A e B su una stessa caratteristica $t = t_0$ e sia tutta posta al di sotto di essa (e che la z sia regolare in tutta l'area D racchiusa dalla curva γ) . Il tratto AB chiude il contorno.

In tal caso la soluzione z(x,t) resta univocamente determinata in tutta la regione D assegnando su γ soltanto i valori della z. *La sua derivata normale resterà quindi determinata da questi.*

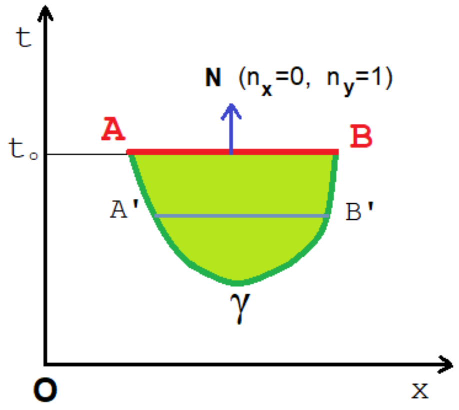


Fig. 6

Supponiamo dunque che ci siano due soluzioni z_1 e z_2 entrambe regolari, che assumono su γ gli stessi valori. Il teorema sarà allora dimostrato se la funzione $w = z_1 - z_2$ sarà nulla nell'intera regione D.

Se moltiplichiamo per w la nostra equazione IV.3.1 scritta per la funzione w, abbiamo:

IV.3.2 $$\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{w^2}{2d}\right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = 0$$

Incominciamo col verificare che il trucco sia valido. Eseguendo le derivate:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{d}w\frac{\partial w}{\partial t} - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{d}\frac{\partial w}{\partial t}\right) = 0$$

Il contorno chiuso ci mette in guardia: per risolvere il problema si mira naturalmente a considerare il lemma di Gauss, che si riferisce appunto a contorni chiusi. La formulazione del teorema nella forma che ci serve è:

A4 $$\iint \frac{\partial f}{\partial y} dx\, dy = -\oint f(x,y) dx$$

A5 $$\iint \frac{\partial f}{\partial x} dx\, dy = +\oint f(x,y) dy$$

Ma, meglio ancora, possiamo scrivere: $dy = \frac{dy}{ds} ds = \left(\frac{d\mu}{ds}\right) ds$ dove $y = \mu(s)$; e similmente $dx = \frac{dx}{ds} ds = \left(\frac{d\lambda}{ds}\right) ds$ dove $x = \lambda(s)$. Come abbiamo già visto, $\boldsymbol{n}(s) = n_x \boldsymbol{i} + n_y \boldsymbol{j} = -\left(\frac{d\mu}{ds}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)\mathbf{j} =$

cioè, possiamo interpretare dx e dy in termini dei coseni direttori della normale esterna. Qui, naturalmente, x resta come è, ma y diventa t.

Integriamo ora la IV.3.2 sull'intera regione D. Grazie al lemma di Gauss i primi due termini sono trasformabili nei due integrali curvilinei, mentre il terzo termine resta com'è, integrato su D.

$$\oint w \frac{\partial w}{\partial x} n_x \, ds - \oint \frac{w^2}{2d} \, n_t ds - \iint \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dxdy = 0$$

Tuttavia, sulla curva (aperta) γ, la w(z,t) (differenza di due soluzioni che hanno eguali valori sul contorno) è nulla. Resta solo il valore sulla parallela a x **che chiude il contorno, da A a B.** Qui , però conosciamo i coefficienti della normale esterna, cioè $n_x = 0, n_t = 1$. Resta quindi solo:

IV. 3.3
$$\int_A^B \frac{w^2}{2d} \, dx + \iint \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dxdy = 0$$

Ma ciò è assurdo, perché entrambi gli integrandi sono ovunque positivi, a meno che siano **w = 0 su AB, e $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ ovunque in D.** La seconda equazione ci dice che w è costante su ogni retta A'B' parallela a x e interna a C. Ma siccome gli estremi sono sul contorno γ, ove w è nulla, **w sarà nulla sull'intera parallela A'B', e quindi, poiché AB è arbitraria, ovunque in D - Cbd.**

Come si vede, che $\frac{\partial w}{\partial x}$=0, cioè che le due derivate normali siano eguali sul contorno, è derivato dalla dimostrazione del teorema.

Un esempio di applicazione del teorema è nella figura seguente. Sia un filo orizzontale di lunghezza AL = l, e ne siano assegnate (i) la distribuzione iniziale di temperatura T sul filo e (ii) le temperature agli estremi per un intervallo di tempo 0 <t < T. Le condizioni al contorno appaiono in rosso in Fig.7 come assegnate sulla spezzata AOLB. Con questo abbiamo i dati per la z(x, t), cioè la temperatura, su tutto il percorso aperto AOLB. Secondo il teorema, questi dati sono sufficienti per determinare in modo univoco la soluzione, cioè la temperatura "in tutto il rettangolo", cioè sull'intero filo (da O a L) e per tutto l'intervallo di tempo AO = LB.

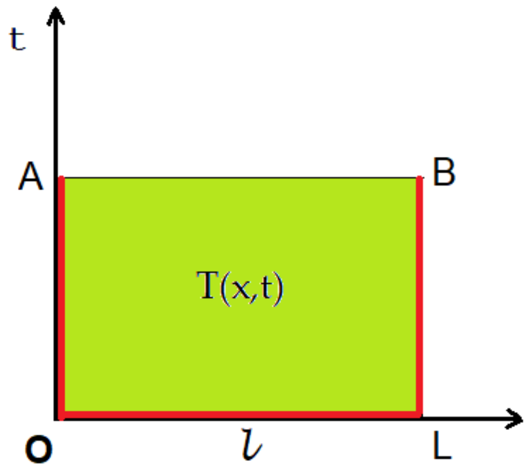


Fig.7

Da notare che il teorema non sarebbe valido se la curva γ fosse al di sopra della caratteristica AB. Infatti, in questo caso il coefficiente $n_t = -1$, i due integrali in IV.3.3 sarebbero di segno discorde, e non potremmo dimostrare il teorema per assurdo.

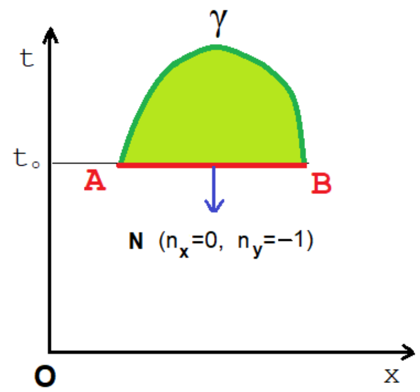


Fig.8

Ne segue che, se assegnassimo la temperatura del filo per tempi superiori a T, non si potrebbe sapere nulla della temperatura nei tempi precedenti. Si potrebbero verificare instabilità e comportamenti imprevisti.

Normalmente, nei sacri testi (è ovvio che quello presente non è tale), si osserva che i processi di diffusione (come quello di propagazione del calore) si comportano diversamente dai problemi meccanici (come quello delle corde vibranti), perché i fenomeni meccanici sono reversibili, mentre la diffusione del calore è un fenomeno irreversibile, si tira in ballo l'entropia etc. La differenza si rifletterebbe nelle equazioni che reggono i differenti fenomeni, e precisamente nella presenza di termini lineari in t, che danno luogo a soluzioni differenti quando cambiano segno.

Questo commento, sempre presente in una discussione preliminare delle equazioni paraboliche, non mi convince del tutto, perché non è escluso che in una equazione di tipo iperbolico compaiano termini lineari nel tempo, senza per questo alterare il tipo dell'equazione. Mi si dovrebbe allora convincere del fatto che non esistono fenomeni meccanici le cui equazioni richiedano un termine lineare nel tempo.

V. Conclusioni circa le condizioni al contorno.

Possiamo ora riassumere in una tavola alcune conclusioni (da Morse & Feshbach, "*Methods of Theoretical Physics*", 1953):

Condizioni al contorno	Contorno	Equazioni di tipo iperbolico	Equazioni di tipo ellittico	Equazioni di tipo parabolico
Dirichlet (funzione) oppure Neumann (derivata normale)	Aperto	Condizioni insufficienti	Condizioni insufficienti	Unica e stabile soluzione in direzione positiva, instabile in direzione negativa.
	Chiuso	Soluzione non unica	Soluzione unica e stabile	Soluzione super-specificata
Cauchy (funzione & derivata normale)	Aperto	Soluzione unica e stabile	Soluzione instabile	Soluzione super-specificata
	Chiuso	Soluzione super-specificata	Soluzione super-specificata	Soluzione super-specificata

E con questo, la mia introduzione alla Classificazione delle EDP lineari del II ordine è finita.

APPENDICI

A1. Variazioni sul tema, per i "super pignoli" (lettura da evitarsi per coloro le cui idee si confondono facilmente)

Alcuni tra gli improbabili lettori (il terrore degli insegnanti) noteranno che in certi testi le due equazioni sono date in ordine inverso, prima l'equazione per la normale poi quella per la tangente, anche se l'ordine logico (e naturale) sarebbe l'opposto. La cosa sembra priva di conseguenze, e in un certo senso lo è, ma i pignoli si possono chiedere perché le equazioni (4) siano scritte come

$$N(s) = -\frac{\partial z}{\partial x}\frac{d\mu}{\mathrm{ds}} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}$$
$$(\frac{dz}{ds})_C = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}$$

invece che nell'ordine "naturale" da me utilizzato (prima la derivata tangenziale, poi quella normale).

Così facendo, il determinante dei coefficienti, che nella regola di Cramer va al denominatore, diventa negativo:

$$-\left(\left(\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right)^2\right) = -1$$

Ma anche le equazioni sono scambiate, e quindi anche i nuovi determinanti a numeratore danno risultati differenti in segno, cioè:

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_C = N(s)\left(\frac{d\mu}{ds}\right) - \left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right)(\frac{dz}{ds})_C$$

$$(\frac{\partial z}{\partial y})_C = -\left(\frac{d\mu}{ds}\right)(\frac{dz}{ds})_C - N(s)\left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right)$$

Cambiando segno, poiché il denominatore vle -1, riotteniamo gli stessi valori di $p_C\ e\ q_C$. Quindi i determinanti cambiano, ma i risultati rimangono gli stessi. Non c'è nulla di magico in tutto ciò, c'è solo una regola (che molti dimenticano) del calcolo dei determinanti, secondo la quale **scambiando le due equazioni abbiamo scambiato le righe dei due determinanti, a numeratore e a denominatore, e scambiando un numero dispari di volte le righe di un determinante, (e qui il cambiamento si può fare in un solo modo), il determinante cambia segno**. Per cui, cambiando segno a numeratore e denominatore, la soluzione rimane la stessa.

Sarebbe un bel guaio se così non fosse, perché la soluzione non può dipendere dall'ordine arbitrario in cui scriviamo le equazioni.

Un po' più complicato è il caso che si presenta in altri testi, che usano come vettore normale non il nostro $\boldsymbol{n}(s) = -\left(\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right)\mathrm{j}$, ma l'opposto $+\left(\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right)\mathbf{j}$ che, date le altre convenzioni, nel nostro caso punta verso l'esterno del dominio di interesse. Questo nuovo vettore è ancora perpendicolare a $\boldsymbol{t}(s) = \left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}\right)\mathbf{j}$, come si voleva e come si deduce facendo il prodotto interno, ma è opposto alla nostra scelta. Ciò lo si prova facendo la somma dei due versori, vecchio e nuovo, e trovando che essa vale 0.
Le due equazioni date dalle proiezioni del gradiente sul vettore tangente e sul vettore normale sono ora:

$$(\frac{dz}{ds})_C = grad(z) \cdot \boldsymbol{t}(s) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}$$

$$N(s) = grad(z) \cdot \boldsymbol{n}(s) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d\mu}{\mathrm{ds}} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}$$

Tenendo conto del determinate dei coefficienti = -1 (a denominatore) se le equazioni sono prese nell'ordine da noi dato, troviamo che **il risultato è diverso:**

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_C = N(s)\left(\frac{d\mu}{ds}\right) + \left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right)(\frac{dz}{ds})_C = p_C$$

$$(\frac{\partial z}{\partial y})_C = \left(\frac{d\mu}{ds}\right)(\frac{dz}{ds})_C - N(s)\left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right) = q_C$$

Il fatto è che la derivata normale alla tangente $N'(s) = grad(z) \cdot \boldsymbol{n}'(s)$ è opposta a quella presa nel caso precedente, perché, mentre il gradiente è quello che è, **n'**(s) è opposto a **n**(s).

D'altra parte, lo scopo di questo esercizio, come abbiamo insistito, non è quello di ottenere dei valori per p_c e q_c, che si suppongono parte dei dati del problema di Cauchy, ma di far vedere che i dati desiderati (***eventualmente da interpretarsi***) possono essere ottenuti dai valori della funzione su un dato contorno e dalla derivata normale alla tangente.

Come si sarà notato, nel saggio intero, nei risultati non sono mai entrati i valori precisi di p_C e q_C.

A2. IL LEMMA DI GAUSS.

Il Lemma di Gauss ha più di un nome, può essere confuso con teoremi affini che si derivano facilmente l'uno dall'altro, ed è attribuito a più di un matematico del tardo Settecento-primo Ottocento, tanto da far perdere presto l'orientamente e rendere difficile la ricerca di riferimenti.

Per me il lemma di Gauss è il seguente, tal quale appariva nel mio testo di Analisi II:

Se la funzione f(x,y) è continua assieme con le sue due derivate prime nell'area D, di contorno γ, sussistono le formule:

A1 $$\oint f(x,y)dx = -\iint \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy$$

A2 $$\oint f(x,y)dy = -\iint \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy$$

(dove l'integrale curvilineo è calcolato sulla linea di contorno γ, mentre l'integrale doppio è calcolato sul dominio D).

Così stava scritto, e non una sola volta, sul mio venerato testo di Analisi II. Il fatto è che non è vero. Come scopersi dopo infiniti tentativi, perché non potevo credere che il mio testo contenesse un errore di stampa, le formule corrette differiscono per un semplice segno "+" nella A2:

A3 $$\iint \frac{\partial f}{\partial y} dx\, dy = -\oint f(x,y) dx$$

A4 $$\iint \frac{\partial f}{\partial x} dx\, dy = +\oint f(x,y) dy$$

Vedremo una forma più simmetrica in Equazioni A5 e A6 nella sezione A2b qui di seguito.

Questo "lemma", o "teorema preliminare" il cui nome già incute timore, è facile da dimostrarsi e da utilizzarsi *formalmente*, ma sovente chi lo fa non ha la minima idea di cosa stia facendo. Se ha in mente una chiara immagine del compito che si assume, la dimostrazione diventa intuitiva.

Per me, il disegno chiave che mi ha mostrato la luce, non è il solito disegno

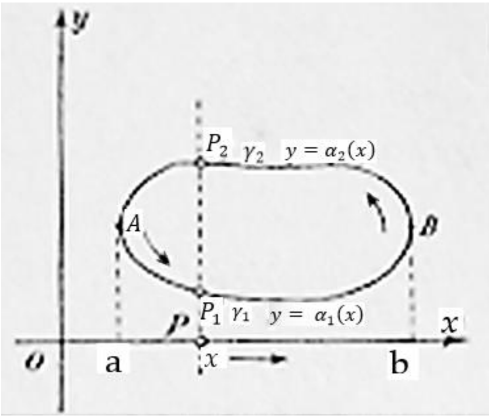


Fig.A1

che mostra, per così dire, il piano di lavoro formale, ma il disegno tridimensionale qui sotto, che mi sono dovuto fare io:

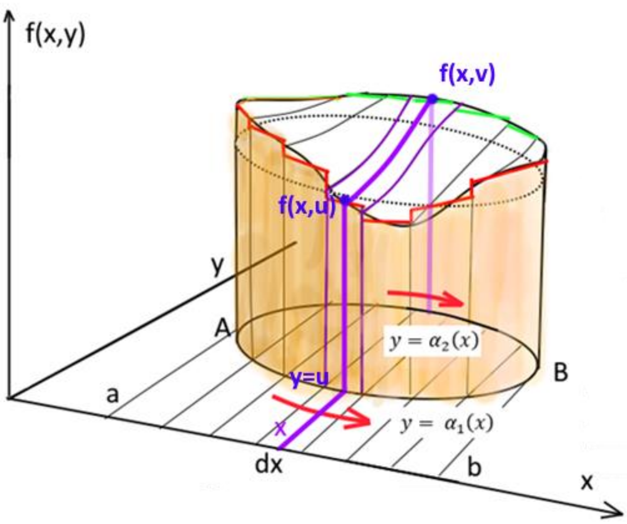


Fig.A2

La Figura A2 mette in chiaro alcune cose:

1) E' come se ci trovassimo davnti a un fortino coperto e circondato da mura, del quale ciò che ci importa è , per così dire, l'area delle mura (qui color mattone.) Dell'interno (volume) e del tetto (superficie data dalla funzione f(x,y)) alla fine non ci importerà nulla.
2) L'area delle mura viene calcolata tagliandole a fette di valore dx intorno al punto x, e poi calcolando le altezze dei "merli" corrispondenti , dal piano (x,y). Se il dominio C è chiuso, e le mura non incontrano mai una verticale Nord –Sud più di due volte, la fetta andrà dalla parte "meridionale" alla parte "settentrionale" delle mura, cioè nella direzione di y crescente. Se le mura incontrassero più volte una linea parallelaalle ordinate, la dimostrazione del teorema richiederebbe qualche ulteriore accorgimento, anche complicato, ma non essenziale, per cui lasciamo da parte questo caso, che offuscherebbe la semplicità del teorema.
   Il problema è come trovare i valori dell'altezza delle mura dalle due parti opposte. **Ma la cosa è semplice, se noi conosciamo la funzione f,** perché l'integrale del gradiente (calcolabile) di f(x,y) in funzione di y è banale. Abbiamo infatti:

   $$\int_u^v \frac{df(x,y)}{dy} dy = f(x,v) - f(x,u)$$

   (la variabile x non entra in gioco.)

3) Muovendo x con dx da a a b l'estremo inferiore dell'integrale muove sulla curva $y = \alpha_1(x)$ in senso orario e quindi positivo, e l'estremo superiore muove sulla curva $y = \alpha_2(x)$, ma in senso antiorario, cioè negativo. In conclusione, quando metteremo tutto insieme, e passeremo al limite per dx -> 0, avremo che i valori dell'estremo superiore saranno negativi per il senso di percorrenza, e i valori dell'estremo inferiori saranno negativi per la formula fondamentale del calcolo integrale. I valori sull'intera curva avranno quindi un segno negativo.

   Di qui il teorema A1. **Per il teorema A2, la situazione è la stessa , mutatis mutandis.**
   (I più astuti noterebbero però che le due situazioni, tratte da Fig. A1, non sono esattamente simmetrihe. Bisogna ricorrere, come annunciato, a qualche trucco, perché ci sono alcune rette parallele all'asse x che incontrano il contorno in più di un punto. La situazione può essere riportata all'ordine, ma questi trucchi, non ci riguardano veramente.)

Vediamo ora i formalismi.

Anzitutto è ovvio che si può scrivere:

$$\iint \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

In cui a e b sono le a minima e la massima ascissa dei punti del dominio C, al quale si intende esteso il primo membro.

$$\int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy = f\,(x, \alpha_2(x)) - f\,(x, \alpha_1(x))$$

E quindi:

$$A3 \qquad \iint \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = \int_a^b f\,(x, \alpha_2(x))\,dx - \int_a^b f\,(x, \alpha_1(x))\,dx$$

Ovvero, tenendo conto dei versi in cui muovono i due punti P_1 e P_2 sul contorno quando b va da *a* a *b*:

$$\iint \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = -\int_{\gamma_2} f(x,y)dx - \int_{\gamma_1} f(x,y)dx = -\oint_{\gamma} f(x,y)dx$$

Come si è fatto notare, i segni dei due integrali a secondo membro, che si combinano in un unico segno negativo nel terzo membro, provengono dal fatto che il primo integrale avrebbe segno positivo in quanto limite superiore di integrazione, ma diviene negativo perché, come da Fig.A2, percorre il contorno del dominio, γ, in senso orario, cioè negativo; mentre il secondo integrale ha segno negativo in quanto limite inferiore di integrazione, ma percorso in senso positivo, e quindi non cambia segno e resta negativo.

Come si è detto, in modo analogo, *mutatis mutandis*, si ricava l'equazione gemella, che ci darà, insieme con la precedente, i risultati voluti.

Questa affermazione è vera, ma solo facendo bene attenzione nel *mutare mutandis*, perché nel caso in esame si produce una sorpresa, cioè il segno dell'integrale curvilineo è positivo. Si veda la Fig. A3.

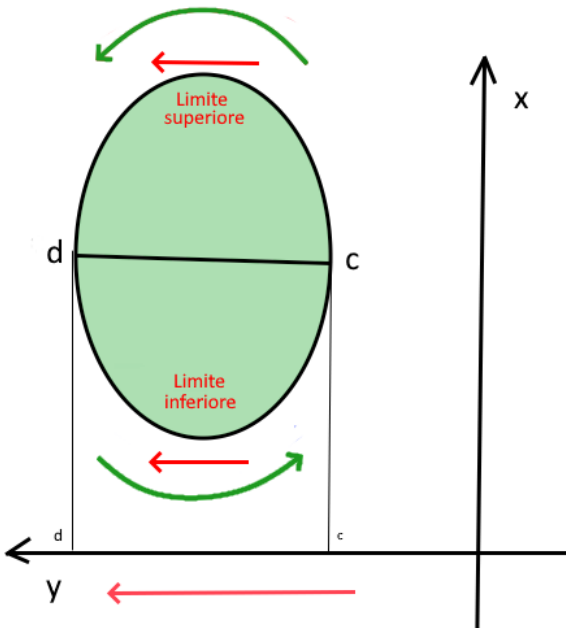


Fig.A3

Se il percorso di integrazione è nel senso delle ordinate crescenti, cioè da c a d sull'asse y, il limite superiore di integrazione, percorso in senso antiorario (freccia verde), è concorde in direzione, e quindi dà un contributo positivo, mentre il limite inferiore è percorso in senso opposto, e quindi cambia segno, producendo un contributo positivo. La FigA2 mostrava invece il contrario: il limite inferiore percorso in senso orario (negativo), e quello superiore in senso antiorario.

Da questo vede che l'equazione A4 presenta un segno positivo a secondo membro. Come promesso, potremo costruire una ancor maggiore simmetria nelle equazioni A5 e A6 nella Sezione seguente.

A2b. IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Dal lemma di Gauss si passa facilmente al teorema della divergenza, nel nostro caso nel piano, in due dimensioni.

Supponiamo ora di applicare le A4 e A5 a due funzioni diverse, la A5 alla funzione f e la A4 alla funzione g, per cui potremo scrivere, con notazione abbreviata:

$$\iint (f_x + g_y) dx\, dy = \oint (f\, dy - g\, dx)$$

Ora introduciamo alcuni concetti dal calcolo vettoriale. Possiamo senz'altro inventare un vettore **v**= f **i** + g **j**. In tal caso, il primo membro può essere scritto

$$\iint div\, \boldsymbol{v}\, dx\, dy$$

Ove div sta per divergenza. Formalmente la divergenza può essere ottenuta facendo il prodotto interno (valido solo in coordinate cartesiane):

$$\left(\boldsymbol{i}\ \frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\ \frac{\partial}{\partial y}\right)\ (\mathbf{i}\ \mathrm{f}\ +\mathbf{j}\ \mathrm{g}\ )$$

Incidentalmente, il "vettore" $\left(\boldsymbol{i}\ \frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\ \frac{\partial}{\partial y}\right)=\boldsymbol{\nabla}$ è detto "nabla", e ricordando qualche regola di algebra, può abbreviare – euristicamente - i calcoli. Qualche regola utile è che *si applica* alle funzioni scalari, trasformandole in vettori, ma opera mediante *prodotto interno (o esterno)* sui vettori. Inoltre, si comporta come il *segno di derivata*, per esempio se è applicato a un prodotto, $\boldsymbol{\nabla}$(U W)= U $\boldsymbol{\nabla}$V + V $\boldsymbol{\nabla}$U.

Quindi, in $\boldsymbol{\nabla}\cdot(V\ \boldsymbol{\nabla}\mathrm{V})$ considerando che V è uno scalare, prima $\boldsymbol{\nabla}$ si applica a V, dandoci $\boldsymbol{\nabla}\mathrm{V}\cdot\ \boldsymbol{\nabla}\mathrm{V}$, o anche $(\boldsymbol{\nabla}\mathrm{V})^2$, e poi, scavalcato V, ci produce $V(\boldsymbol{\nabla}\cdot\ \boldsymbol{\nabla}\mathrm{V})$ cioè V div(gradV), cioè V ΔV. *L'operatore div(grad) è il Laplaciano (come si verifica subito operando con* $\left(\boldsymbol{i}\ \frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\ \frac{\partial}{\partial y}\right)$ *– vedi sotto)*

Inoltre, possiamo scrivere: $\mathrm{dy}=\frac{dy}{ds}ds=\left(\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}\right)ds$ dove y = μ(s); e similmente $\mathrm{dx}=\frac{dx}{ds}ds=\left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right)ds$ dove x = λ(s). Il secondo membro diventa quindi

$$\oint\left(f\left(\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}\right)-g\left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right)\right)ds$$

Ma l'integrando non è altro che un prodotto interno di vettori a noi noti:

$$\oint(f\ \boldsymbol{i}\ +g\ \boldsymbol{j})\ (\left(\frac{d\mu}{\mathrm{ds}}\right)\mathbf{i}-\left(\frac{d\lambda}{\mathrm{ds}}\right)\mathrm{j}\ )ds=\oint v\ \cdot\boldsymbol{n}\ ds$$

Dove **n** è il versore della normale **esterna** alla curva, i cui versori sono, come si può verificare, **n_x =dy/ds, n_y = dx/ds.**

Anche il Lemma di Gauss può essere così riscritto in forma più simmetrica (il segno "-" è parte della componente o coseno direttore del versore):

A6 $$\iint\frac{\partial f}{\partial y}dx\ dy=-\oint f(x,y)\frac{dx}{ds}ds=\oint f(x,y)n_y ds$$

A7 $$\iint\frac{\partial f}{\partial x}dx\ dy=+\oint f(x,y)\frac{dy}{ds}ds=\oint f(x,y)n_x\ ds$$

Mettendo insieme il puzzle abbiamo (nel piano):

$$\iint div\, \boldsymbol{v}\, dx\, dy \;=\; \oint v \cdot \boldsymbol{n}\, ds$$

Che è il teorema della divergenza, che si suppone già noto al lettore, soprattutto in tre dimensioni e soprattutto per le sue applicazioni alla meccanica dei fluidi e alla teoria dell'elettromagnetismo. A noi qui interessano solo le proprietà formali.

Usando il formalismo di cui sopra, la **divergenza al vettore grad (f)** diventa

$$div\,(grad\, f) = \left(\boldsymbol{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\,\left(\boldsymbol{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f$$

e il teorema della divergenza ci assicura che

$$\iint \Delta f\; dx\; dy \;=\; \oint grad(f) \cdot \boldsymbol{n}\, ds \text{ o anche } \oint \boldsymbol{\nabla f} \cdot \boldsymbol{n}\, ds$$

A primo membro appare il Laplaciano, a secondo membro compare la proiezione del gradiente sulla normale esterna, o derivata direzionale sulla direzione della normale esterna.

A3. FUNZIONI ARMONICHE E LORO CONDIZIONI AL CONTORNO

Sono dette funzioni armoniche le funzioni che soddisfano l'equazione (di Laplace):

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0}$$

Teorema I (preliminare), o *Teorema della media per le funzioni armoniche*, e alcune conseguenze.

La media dei valori che una funzione armonica V assume su una circonferenza σqualsiasi compresa nel dominio piano S sotto studio, è eguale al valore che essa assume nel centro della circonferenza σ, e viceversa (Ne vedremo una forma embrionale più avanti).

Dimostrazione:

La media *sulla circonferenza σ di raggio r* è:

$$\overline{V(r)} = \frac{1}{2\pi r}\int V(r,\varphi)\, ds = \frac{1}{2\pi r}\int V(r,\varphi)\, r d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int V(r,\varphi)\, d\varphi$$

Si è usata la relazione ds = r dφ. La derivata di $\overline{V(r)}$ va fatta rispetto all'unica variabile r, essendosi integrato su φ.

$$\frac{d\overline{V}}{dr} = \left(\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V(r,\varphi)}{\partial r}\, d\varphi\right) = \frac{1}{2\pi}\int grad\, V(r,\,\varphi) \cdot \boldsymbol{n}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi r}\int \boldsymbol{\nabla} V \cdot \boldsymbol{n}\;\, ds$$

Il punto cruciale è il passaggio dalla seconda alla terza equazione, basato sul fatto che che il raggio è sempre perpendicolare alla tangente sulla circonferenza, per cui la derivata radiale di V è anche la proiezione del gradiente sulla direzione della normale, che è la direzione del raggio. Il passaggio dalla terza alla quarta equazione proviene dal fatto che, essendo l'integrale fatto su dφ, si può moltiplicare e dividere per r, dentro o fuori a piacere. Di nuovo, si è usata la relazione ds = r dφ.

Questa equazione è necessaria, perché così passiamo da $\bar{V}$ (funzione di cui a questo punto non sappiamo se sia armonica) a V, che è armonica per ipotesi.

Ora vale il **teorema della divergenza**, applicato alla funzione f = V:

$$\iint \Delta V\, dx\, dy \;=\; \oint grad(V) \cdot \boldsymbol{n}\, ds$$

E, essendo la funzione V armonica, e quindi $\Delta V = 0$, sarà anche $\oint \boldsymbol{\nabla} V \cdot \boldsymbol{n}\, ds = 0$.

Questa però a sua volta comporta che sia $\frac{d\bar{V}}{dr} = 0,$ da cui

$$\overline{V(r)} = const$$

Riducendo a zero il raggio della circonferenza su cui calcoliamo la media, fino a contenere il solo centro, troviamo che $\overline{V(0)}$ = V_c , il valore nel centro.

Immaginando il cerchio sezionato in anelli concentrici infinitesimi, la media di V su ogni anello sarebbe sempre eguale a V_c, valore nel centro, e quindi ogni media sarebbe la stessa, cioè V_c avrebbe il valore della media dei valori di V in tutti i punti interni al dominio.

Ma a questo punto il teorema può essere esteso a dominii chiusi di qualsiasi forma.

Più stringente ancora, una funzione V armonica e regolare in un dominio D, non può avere al suo interno punti di massimo o di minimo. Infatti, se nel punto P vi fosse un massimo V_M, esisterebbe un intorno di P tale che in tutti i suoi punti sarebbe $V < V_M$, e ciò varrebbe anche in un cerchietto di centro P, interno all'intorno. Ma allora non sarebbe rispettato il teorema precedente (che, si ricordi, abbiamo dimostrato per un cerchio), perché la media dei valori sul contorno, tutti inferiori al valore nel centro P, che è un massimo, non potrebbe essere eguale al massimo.

Affermiamo ora che, se V ha un valore costante su una curva chiusa nel piano, allora V deve essere costante nell'intera regione all'interno della curva chiusa. In effetti, un valore non costante può solo essere dato dalla presenza di massimi o di minimi, o comunque di alture e di avvallamenti *che terminano prima di raggiungere il contorno, dove il valore è costante.* Intorno a ciascuno di questi punti o regioni di massimo o di minimo si può disegnare il solito cerchietto eccezionale che viola il teorema precedente. I massimi e i minimi della funzione sono quindi solo sul contorno, e per questo essa è detta "funzione *estremata al contorno*".

Ne segue che se una funzione armonica e regolare V ha un valore nullo su una curva chiusa nel piano, essa è nulla nella regione interna alla curva. Infatti, essendo costante, è eguale al valore sul contorno, che è zero.

Teorema II – ***Preparatorio dei teoremi di unicità per le funzioni armoniche***

Per avere risultati simili a quelli già ottenuti in forma più generale, si ricordi l'identità, facilmente (anche se non rapidamente) verificabile rigorosamente,

$$\mathrm{div}(V\ \mathrm{grad}V) = (\mathrm{grad}V)^2 + V\Delta V$$

"Dimostrazione euristica":

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(V\ \boldsymbol{\nabla}\mathrm{V}\ ) = (\boldsymbol{\nabla}V)\ \boldsymbol{\nabla}\mathrm{V}\ + \mathrm{V}\ \Delta\mathrm{V} = \ (\boldsymbol{\nabla}V)^{\ 2} + \ \mathrm{V}\Delta\mathrm{V}$$

(questa relazione è stata vista poco sopra.)

Se ora applichiamo il teorema della divergenza, abbiamo:

$$\int \boldsymbol{\nabla}\cdot(V\ \boldsymbol{\nabla}\mathrm{V}\ )\ dxdy = \oint V\boldsymbol{\nabla}V\ \cdot \boldsymbol{n}\ ds$$

Ma il primo membro diventa $\int((\boldsymbol{\nabla}V)\ \boldsymbol{\nabla}\mathrm{V}\ + \mathrm{V}\ \Delta\mathrm{V}\ )$ dx dy, ove $\Delta\mathrm{V} = 0$, essendo V una funzione armonica. Quindi, per una funzione armonica:

$$\int(grad\ V)^{\ 2} = \oint V gradV\ \cdot N\ ds$$

Teorema III – ***di unicità nel caso delle soluzioni del problema di Dirichlet.***

Se di una funzione V armonica (quindi $\Delta V=0$) e regolare (come già stipulato) in un spazio finito D (delimitato da un contorno chiuso) si assegnano i valori sul contorno (***problema di Dirichlet***), *allora V è univocamente determinata nello spazio S.*

Se vi fossero due funzioni V_1 e V_2 armoniche che assumono lo stesso valore F (funzione assegnata) sul contorno, la loro differenza W sarebbe una funzione nulla sul contorno, e quindi identicamente nulla nell'intero dominio.

Altra dimostrazione proviene dal Teorema II, applicato alla funzione W, che è armonica essendo la differenza di due funzioni armoniche, per cui:

$$\int(grad\ W)^{\ 2} = 0$$

E quindi W = costante. Ma tale costante $W = V_1 - V_2$ è nulla sul contorno, e quindi è nulla ovunque, cioè V_1 e V_2 coincidono.

Teorema IV– ***di unicità (a meno di una costante) nel caso del problema di Neumann.***

Se di una funzione V armonica (quindi $\Delta V=0$) e regolare in un spazio finito S (delimitato da un contorno chiuso) si assegnano i valori della derivata normale $grad\ f\ \cdot \boldsymbol{n}$ sul contorno (problema di Neumann), la V è univocamente determinata nello spazio S, ***a meno di una costante.***

Applichiamo la formula, valida per le funzioni armoniche, alla funzione $W = V_1 - V_2$, differenza di due funzioni armoniche tali che grad $V_1 \cdot \boldsymbol{n}$ = grad $V_2 \cdot \boldsymbol{n}$ sul contorno.

Abbiamo:

$$\int (grad\ W)^2 dx\ dy = \oint W grad W\ \cdot \boldsymbol{n}\ ds$$

Anche qui, per la funzione W, $\oint W grad\ W \cdot \boldsymbol{n}\ ds = 0$ sul contorno. Infatti, in questo caso, sarebbe nullo il gradiente della differenza $W = V_1 – V_2$ in ogni punto del contorno, e quindi sarebbe nullo il secondo membro.

Anche *grad W* è funzione armonica, che sarebbe nulla all'interno dell'intero dominio, per cui, di nuovo W = costante.

In questo caso, però, non abbiamo alcuna informazione sul valore di tale costante.

Abbiamo però $V_1 - V_2$ = costante, che però è quanto si voleva dimostrare.

Conclusioni.

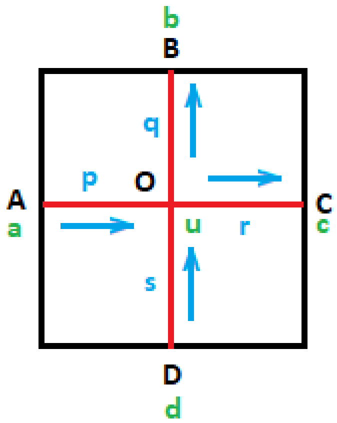
Sebbene i due teoremi di unicità non garantiscano che la soluzione esista, e ancor meno ci indichino il modo di ottenerla, essi però ci dicono che **le condizioni di Cauchy sono sovrabbondanti per le soluzioni dell'equazione di Laplace in un contorno chiuso (funzioni armoniche.)** Infatti, se un'equazione soddisfa alle condizioni di Dirichlet, aggiungere che soddisfa anche alle condizioni di Neumann non può dirci nulla di nuovo e viceversa.

Estendendo, forse ottimisticamente, questo concetto dalle equazioni di Laplace a quelle generali d tipo ellittico, otteniamo quindi che per ottenere le soluzioni di un'equazione di quest'ultimo tipo, *generalmente richieste in un dominio limitato da un contorno chiuso*, sono sufficienti o le condizioni di Dirichlet o quelle di Neumann.

A4. INTRODUZIONE ELEMENTARE AL LAPLACIANO

Versione elementare basata sul calcolo delle differenze finite. La presentazione, di cui questa sarà poco più di una traduzione, proviene dal mio favorito divulgatore in matematica, W.W. Sawyer (*A Path to Modern Mathematics*, 1966).

Supponiamo di scegliere un esempio in due dimensioni.
Sia un foglio di rame con batterie connesse al suo contorno. Come risultato, una corrente elettrica fluirà attraverso il foglio. Noi vogliamo investigare la distribuzione spaziale bidimensionale di questa corrente.
Per una trattazione elementare supponiamo di sostituire il foglio con una rete di rame a maglie quadrate finissime. Come un fazzoletto assomiglia (da lontano) a un foglio continuo, così la nostra rete di rame potrà assomigliare a un foglio di rame, purché le maglie siano abbastanza minute. E' ragionevole pensare che la distribuzione di correnti nella rete possa in questo caso approssimare da vicino la distribuzione di correnti nel foglio.
Ma, minute o no, possiamo pensare di ingrandire le maglie in modo da disegnare la rete su un foglio quadrettato su cui segneremo un'origine e due assi, x e y, paralleli ai lati perpendicolari dei quadretti. A questo punto, per seguire meglio il ragionamento, consideriamo una cella elementare: una croce greca, che congiunge cinque punti : il centro, in cui porremo l'origine O, e i quattro punti a distanza h da O sui quattro bracci della croce, precisamente A a ovest, B a nord, C a est, D a sud.



Esaminiamo ora come fluisce la corrente elettrica nella rete. Valgono due leggi assai semplici:
La prima legge la possiamo chiamare "equazione di continuità". Essa afferma che le correnti elettriche scorrono nella rete come acqua attraverso una rete di tubi. In particolare, scelto un punto sulla rete come origine O, con coordinate (0, 0), ci sono quattro correnti che arriveranno o usciranno dal punto O. Siano *ad esempio*:
i) proveniente dal punto A (-h, 0), corrente p
ii) in uscita verso il punto B (0,h), corrente q
iii) in uscita verso il punto C(h,0), corrente r

iv) proveniente dal punto D(0, -h), corrente s
Qui, evidentemente, h è la distanza dall'origine a ciascuno dei quattro altri punti.
Ora, se non ci sono sorgenti d'acqua (di elettricità) in O, la somma delle correnti entranti deve essere eguale a quella delle correnti uscenti. Quindi, per noi, p+s = q+r.
Questa è, evidentemente, una forma rudimentale della *"equazione di continuità"*. Come specifica la domanda, essa ci dice "dove sono le sorgenti del campo", sia esso elettrico o idrico. Parlando di acqua, se p+s-q-r fosse minore di zero (entra più acqua di quella che esce) ne dedurremmo che in O c'è una sorgente di corrente. Invece, se fosse maggiore di zero ne dedurremmo la presenza di uno scarico. Parlando di corrente elettrica, potremmo immaginare un sorgente di corrente positiva o negativa.
La seconda legge è la legge di Ohm. Ad ogni punto (x,y) associamo un potenziale V(x,y) (per punti si intendono solo i punti della rete che hanno per coordinate multipli interi di h, agli incroci dei fili della maglia). Il potenziale è come l'elevazione per l'acqua: come l'acqua fluisce dai punti che hanno maggior elevazione a quelli che stanno più in basso, così la corrente elettrica (positiva) fluisce dai punti che hanno maggior potenziale a quelli che hanno minor potenziale. **Chiamiamo u, a, b, c, d il potenziale nei punti O, A, B, C, D**. Se una corrente p entra in O da A, ciò significa che a > u. La caduta di potenziale tra A e O è a-u Volt. La legge di Ohm afferma che la differenza di potenziale tra due punti A e O (Volt) è proporzionale alla corrente I (Ampere).

La differenza di V tra due punti = R I (dove R è la resistenza e I la corrente che scorre fra quei due punti). Per semplicità, supponiamo R=1 in apposite unità di resistenza, e quindi la corrente p sia non solo proporzionale alla differenza di potenziale, ma sia eguale in valore numerico a tale differenza. Ciò valga per tutte le correnti.
Quindi:
p = a-u
q = u-b
r = u-c
s = d-u
Sostituendo nell'equazione p+s=q+r, otteniamo:
(a-u)+(d-u) = (u-b)+(u-c)
E poi, combinando "opportunamente" i termini:

(A1) $$((c-u)-(u-a)) + ((b-u)-(u-d))=0$$

"opportunamente" significa che abbiamo notato che a,u,c sono lungo l'asse x; mentre b, u, d sono lungo l'asse y. Null'altro è cambiato.

A questo punto mostriamo un esempio di **calcolo infinitesimale non proprio infinitesimale,** per principianti.
Supponiamo di avere una funzione che a intervalli regolari h assume valori i valori a , b, c, d. La derivata prima si ottiene, facendo il limite del rapporto fra la differenza dei valori della funzione a distanza h, diviso h:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Qui abbiamo chiamato "differenza prima" Δf della funzione il numeratore prima di calcolare il limite . A sua volta, h è la differenza prima della distanza tra x+h e h, cioè Δx. Nel cosiddetto calcolo delle differenze finite, ci si arresta prima di cercare il limite.

Esiste in matematica un ramo quasi ignorato nei corsi fino al terzo anno, detto del **calcolo alle differenze finite. Si tratta in realtà di uno dei rami più utili, che,** oltre ad altre mille applicazioni, si presta alla comprensione intuitiva di problemi complicati, mediante calcoli algebricamente semplici, in cui rapporti di differenze sono osstituiti alle derivate e sommatorie agli integrali. Tuttavia, raramente il calcolo alle differenze finite ci dà soluzioni teoriche semplici "in termini finiti" quando il problema passa dalla fase intuitiva a quella applicativa. Esso è invece assai sovente usato per il calcolo numerico delle soluzioni delle equazioni algebriche, differenziali e integrali. Noi qui cercheremo di utilizzarlo solo per avere un'idea intuitiva del problema delle condizioni al contorno dell EDP lineari del II ordine.

Tornando alla nostra unica maglia minima, possiamo arrivare ad un concetto rudimentale di Laplaciano.
Dobbiamo però fare ancora un passo: ci occorre un'approssimazione della **derivata seconda. Facile: al numeratore ci sarà la differenza seconda, cioè la differenza delle differenze.** Ciascuna di esse è divisa per Δx = h, per approssimare la derivata prima. Questa differenza seconda sarà a sua volta divisa per Δx=h. Quindi, l'approssimazione della derivata seconda a cui ci arresteremo sarà:

$$((c-u)/h - (u-a)/h)/h = (c-2u+a)/h^2$$

Ci dice qualcosa, questa "quasi derivata"? Evidentemente ci dice se la "curva" (in realtà spezzata) per cui calcoliamo la nostra derivata in u è concava o convessa: qui vediamo che il numeratore c-2u+a può essere scritto 2((c+a)/2 -u). Se il numeratore è negativo, ciò vuol dire che u è maggiore della media di c e a, cioè del valore p che la spezzata assumerebbe se a, u, c fossero allineati. Di conseguenza, la spezzata ha un massimo in u. Un teorema analogo vale per la derivata seconda del calcolo differenziale.

L'equazione (1), pur ottenuta in modo così elementare, ci dà alcune informazioni preziose:

$$((c-u)-(u-a)) + ((b-u)-(u-d))=0$$

1) Dividendo per h^2 (ciò che possiamo sempre fare) abbiamo:

(A2) $$(c-2u+a)/h^2 + (d-2u+b)/h^2 = 0$$

Ma questa, se confrontiamo con il nostro “calcolo infinitesimale non proprio infinitesimale”, non è altro che la somma delle “derivate seconde (approssimate) del potenziale” lungo l’asse x e lungo l’asse y, cioè le derivate parziali seconde, che, passando al limite per maglie infinitesimali, come si apprende al secondo anno di analisi matematica, diventa

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

o, anche:

Laplaciano del potenziale = ΔV= 0 (in due dimensioni).

L’estensione al caso tridimensionale non è difficile.

Dunque, se in una data regione non ci sono sorgenti di corrente, avremo che ΔV = 0 (ove Δ è il simbolo tradizionale del laplaciano e V è il potenziale). Il risultato è valido, anche se ottenuto in modo poco formale e poco rigoroso.

Ma l’equazione A1 ci dice altro ancora:
2) Portando le u dell’equazione a secondo membro abbiamo:

a+b+c+d =4u, cioè u = (1/4)(a+b+c+d):

il potenziale in un punto è la media dei potenziali dei quattro punti contigui.
Dunque abbiamo un’indicazione che riguarda una funzione in una regione in cui essa rispetta l’equazione Δ(V)= 0. Essendo u la media dei potenziali nei quattro punti contigui (a,b,c,d), **esso non può essere un massimo della funzione**, in quanto, per essere tale, dovrebbe essere maggiore di ciascuno di essi. Ciò vale in generale **per tutti i punti della regione in cui Δ(f(x,y)) = 0.**

Tuttavia, ciò che più ci importa è che **noi possiamo considerare il nostro problema come una forma minimale del problema di quali condizioni al contorno siano “acconce” alle EDP di tipo ellittico.** Noi deduciamo che il valore incognito u(O) è noto una volta che sia noto il valore della funzione sui quattro punti del contorno (perché qui ci sono solo quattro punti) , e addirittura ne è il valor medio. In altre parole, per dirla in modo più pomposo, abbiamo qui un’indicazione del fatto che per le EDP di tipo ellittico, le condizioni di Dirichlet (in cui sono assegnati i valori della funzione al contorno) sono adeguate.

Si può pensare che questo esempio sia in realtà troppo semplice, perché , dati i valori di V nei quattro punti, deve *sempre* essere possibile calcolare il valore nel punto centrale, Ma questo non è vero. Supponiamo di prendere, invece dell’equazione modello di tipo ellittico, l’equazione modello di tipo iperbolico, che scriveremo:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

La nostra equazione (A2), con un segno cambiato, diverrà:

(A3) $(c-2u+a)/h^2 - (d-2u+b)/h^2 = 0$

Che diventa: $(c+a)-(d+b) = 0$, avendo posto $h = 1$

Qui si vede che il valore di z(0,0), u, è scomparso dall'equazione, e non c'è modo di recuperarlo: non c'è neppure alcuna indicazione che esso valga zero. In altre parole, ci occorre ulteriore informazione, che in questo caso è il valore stesso di u. Questo valore, che conclude il problema, *mettendo in questo caso troppo semplice la soluzione fra i dati*, è nondimeno un parente prossimo della derivata normale, anzi, delle quattro derivate normali, che verso i quattro punti di contorno darebbero, **nella nostra approssimazione**, (u-a)/h; (u-b)/h; (u-c)/h; (u-d)/h.

In altre parole, il nostro mini-esempio suggerisce che l'equazione di tipo iperbolico possa solo essere risolta se sono dati i valori al contorno (a, b, c, d), nonché i valori della derivata normale (u-a)/h; (u-b)/h; (u-c)/h; (u-d)/h (qui un valore unico).

Vale a dire, abbiamo un'indicazione che **per la soluzione di una EDP di tipo iperbolico, le condizioni dette di Cauchy (valori al contorno della funzione e della derivata normale) sono quelle adeguate, più che altro perché quelle di Dirichlet sono inadeguate.**

Sembrerà strano, ma tra le varie spiegazioni intuitive elementari delle condizioni al contorno necessarie per i vari tipi di EDP lineari del II ordine, questa – a mio parere - è non solo la spiegazione più elementare, ma anche la più comprensibile.

NOTE

(1) da *Mathews & Walker, Mathematical Methods of Physics*, 1964, libro raccomandabile anche se non recentissimo – anche perché ispirato da un corso di lezioni del Prof. R.P. Feynman, del quale si riconosce ogni tanto il tocco magico.