ESTRARRE I LOGARITMI

(Un altro sassolino nella scarpa)

Daino Equinoziale

HENRY BRIGGS

Henry Briggs (1561-1630) fu un geometra e matematico applicato, primo professore di geometria al Gresham College di Londra. Più tardi divenne il primo Savilian Professor di Geometria all'Università di Oxford, nominato da Henry Savile (1549-1622) in persona.
Briggs non fu l'inventore (o scopritore?) dei logaritmi, onore che va a John Napier – Neperus - Nepero (1550-1617), ma fu colpito da quel'invenzione e ne vide subito la potenziale utilità nei calcoli numerici. Tuttavia, Napier si era trovato ad usare naturalmente come base dei logaritmi il numero e (numero trascendente = 2.718281828459045...), assai scomodo per fare calcoli numerici, e Briggs ebbe l'idea di usare come base il numero 10. Tra gli infiniti logaritmi possibili abbiamo quindi quelli naturali o di Napier, e quelli volgari, o decimali, o di Briggs. Egli pubblicò la sua prima tavola di questi logaritmi (*Logarithmorum Chilias Prima)* nel 1617. Più tardi, nel 1624, pubblicò la sua opera principale, col titolo di *Arithmetica Logarithmica*. Essa provvede i logaritmi decimali di 30.000 numeri naturali (1-20000 e 90000-100000), con quattordici cifre decimali, oltre a dettagliate tavole trigonometriche.
Il motto latino citato nel frontespizio, tradotto, afferma, più o meno:"Dio ci ha concesso l'uso della vita, dell'ingegno e del denaro, senza dirci fino a quando". Motto adatto per chi aveva intrapreso calcoli immani per creare le sue tavole di logaritmi.

In questo saggio si useranno soprattutto i suoi logaritmi. In caso di uso di logaritmi di base diversa, se ne darà indicazione.

I. INTRODUZIONE

Anche questa è una storia che incomincia molti anni fa. Quando mi lamentavo per la difficoltà di un'operazione di aritmetica (nei miei teneri anni, dodici o tredici, si trattava certamente dell'estrazione di una radice quadrata), mio zio mi diceva sempre:"Vedrai quando dovrai estrarre un logaritmo!". Io aspettavo con ansia mista di curiosità il momento in cui mi fosse chiesto di eseguire una tale operazione. Già, perché io, fin da quando avevo una decina d'anni, avevo una certa familiarità con i logaritmi. Circolavano a quel tempo per casa mia, e circolano ancora adesso, le mitiche tavole del Koehler (1885), il pane quotidiano di non so quante migliaia di matematici in quei tempi, in cui non c'erano ancora computer di alcun genere.

Per quanto non sapessi con precisione cosa fosse un logaritmo, mi era stata spiegata la meccanica delle tavole: se si volevano moltiplicare due numeri, si sommavano i loro logaritmi trovati sulle tavole; poi si andava a cercare, più laboriosamente, a che numero corrispondesse il logaritmo trovato, e una moltiplicazione di due numeri di quattro cifre poteva esser eseguita quasi in un baleno. E non parliamo delle radici quadrate: bastava dividere il logaritmo per due, e via.

Ma come si estraeva un logaritmo?

Attesi e attesi: nessuno me lo insegnò mai. Non so se ai tempi di mio zio, anni Venti circa, questo calcolo fosse insegnato, ma certo non lo si insegnava più ai miei tempi, in nessuna classe delle Medie e, credo, neppure dell'Università. Mi si " insegnarono" i logaritmi (che conoscevo già) in seconda liceo classico, ma non mi si diede alcuna idea di come se ne estraesse anche uno solo, per esempio quello di due. Magari, al lieceo scientifico... E figuriamoci se all'Università si perse il tempo di insegnarmi questa operazione! Poi vennero i primi computer e le Tavole passarono gradualmente nel solaio delle cose che hanno detto molto a qualcuno e non dicono più nulla a nessuno.

Curiosamente, la prima indicazione su come si estrae un logaritmo la ebbi in un libro di fisica, le Lectures on Physics del Feynman. Guarda un po', proprio un fisico, per cui la matematica è puramente uno strumento, mi doveva spiegare l'arcano (Metodo 1). Negli anni Settanta invece scoprii che nella costruzione delle tavole dei logaritmi naturali, nessuno si era sognato di estrarre logaritmi: essi erano stati costruiti calcolando pazientemente migliaia di potenze successive di un numero come 1.0000001 e poi verificando quale fosse l'esponente della potenza quando si raggiungeva (quasi) un numero intero (Metodo 2).

In verità un'altra indicazione l'avevo trovata su una rivista americana, lo American Journal of Mathematics, in un breve articolo divulgativo: per trovare il logaritmo di due si nota che

$$2^{10} = 1024 \cong 10^3$$

Cioè

$$10^{\,10\,Log\,2} = 10^3$$

Da cui

$$10\,Log\,2 = 3 \quad \text{e quindi} \quad Log\,2 = \frac{3}{10} = 0.3 \text{ (in realtà 0.30103)}$$

Con quest'idea in mente potevo farmi delle tavole rozzissime. Per esempio 5 era 10/2 e quindi il suo logaritmo era 0.7 (è 0.69897), e quello di sette è poco meno della metà del Log 50, in questa approssimazione 1.7, la cui metà è 0.85 (il valore vero è piuttosto 0.845...). In quanto al logaritmo di 3, uno può notare che 9 è assai vicino a 10, e quindi il Log3 dovrebbe essere vicino a 0.5. Ma, meglio ancora, $3^4 \cong 10 \times 8 = 10 \times 2^3$, e il Log 2^3 = 3 Log 2= 0.9, per cui il logaritmo di 81 è vicino a 1.9, dividiamo per 4 e troviamo che Log 3 = 0.475..., mentre il valore vero è 0.47710... Niente male. Confrontare con i valori veri i valori che noi troviamo in qualche modo ingegnoso *sapendo unicamente il Log2* può dare qualche soddisfazione.   Potrebbe essere un gioco da farsi a scuola quando si spiegano i logaritmi, che in futuro saranno utili ad una minima percentuale di studenti, ma che, opportunamente presentati, possono divertirli (per un poco) tutti.

Ma questi sono trucchi, non rispondono a un metodo.

Il sassolino nella scarpa era trovare questo metodo: sapevo da un esempio illustre che già alla fine del Settecento studenti sedicenni estraevano come materia del corso di matematica i logaritmi con un numero di cifre fissato dagli insegnanti. Come facevano? Darò ora di seguito un metodo "analogico" di trovare i logaritmi, poi il Metodo 1 (esposto dal Feynman) e infine il Metodo 2 (usato a fine Settecento).

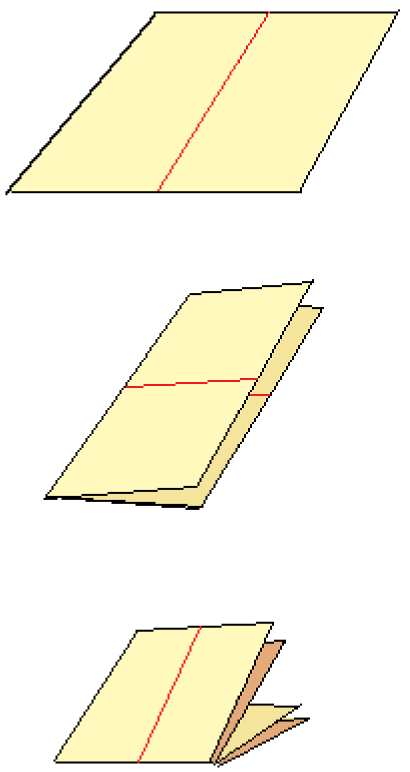
II. LA MACCHINA PER FARE LE MOLTIPLICAZIONI.

(Per matematici che imparano a camminare e non hanno paura dei numeri)

Per addentrarci nell’estrazione dei logaritmi è bene sapere almeno che cosa sono. Chi lo sa può tranquillamente saltare questa parte e leggersi la Parte IV. Chi non lo sa dovrebbe leggere questa Parte II e successive , spero utilmente. Se, dopo la lettura, ne sa meno di prima o prova un forte sentimento di repulsione per i logaritmi e ciò che essi rappresentano, ciò che sovente accade, be’, allora, è meglio che lasci perdere il resto.

Per prima cosa costruiamo una *macchina per fare le moltiplicazioni*. Un tempo gli ingegneri si distinguevano dagli altri mortali perché avevano sempre in tasca un piccolo strumento per fare moltiplicazioni anche complicate. Io ricordo che ci volle del bello e del buono per convincermi che non si trattava di un gioco di prestigio con un trucco. Il bello del regolo, notai, era che dava correttamente l'ordine di grandezza senza occuparsi delle ultime cifre del risultato.

Questo ci può aiutare risolvere un piccolo classico problema.
Supponiamo di avere un foglio di carta spesso un decimo di millimetro. Lo pieghiamo 50 volte (ogni volta raddoppiando lo spessore). Che spessore raggiungiamo?



NUMERO PIEGHE	SPESSORI
0	1
1	2
2	4

Ed ora facciamoci una tabella:

numero di pieghe	spessore in decimi di millimetri
1	2
2	4
3	8
4	16

Ferma un momento. E zero pieghe? Bé, zero pieghe ci dà spessore 1. Daccapo.

numero di pieghe	spessore in decimi di millimetro
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024

Dunque, con dieci pieghe siamo già a 1000 decimi di millimetro, 10 cm. Non sembra ancora molto. Ma qualcuno può già incominciare a preoccuparsi: ogni 10 pieghe il risultato viene moltiplicato per circa mille..... Che succederà con 50 pieghe?

Rifacciamo:

numero di pieghe	spessore in decimi di millimetro
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	2097152

22	4194304
23	8388608
24	16777216
25	33554432
26	67108864
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824
31	2147483648
32	4294967296
33	8589934592
34	17179869184
35	34359738368
36	68719476736
37	137438953472
38	274877906944
39	549755813888
40	1099511627776
41	2199023255552
42	4398046511104
43	8796093022208
44	17592186044416
45	35184372088832
46	70368744177664
47	140737488355328
48	281474976710656
49	562949953421312
50	1125899906842624

Tutto ciò lo si fa se si ha un po' di pazienza e si sa moltiplicare per due, senza perderci di coraggio davanti ai grandi numeri che ci ritroviamo (oppure basta usare Google e scrivere il calcolo che si desidera... Google lo sa fare).

Quelli che hanno spirito di osservazione noteranno qualche aria di famiglia tra le prime cifre dei numeri da 1 a 10 e quelli 20 a 30, una somiglianza che si vede ancora, un po' meno chiara, tra 30 e 40, tra 40 e 50. Inoltre vedrebbero che in pratica tra due numeri i cui numeri d'ordine differiscono di dieci il rapporto è un po' più di 1000. Ora vedete lo sterminato numero che risulta alla fine.
Piegando 50 volte un foglio di carta spesso un decimo di millimetro (sempre raddoppiando) si arriva a 1 125 899 906 842 624 decimi di millimetro.
(Google vi dà i numeri esatti almeno fino a 2^{40}. Poi incomincia a dare numeri approssimati).

Chi aveva osservato che con 10 pieghe si hanno 1000 decimi di millimetro avrebbe potuto notare che se il foglio iniziale fosse stato spesso un metro, lo spessore dopo dieci pieghe sarebbe stato 1024 metri. In altre parole, non importa quale sia il numero di partenza, un decimo di millimetro o un metro, piegando dieci volte si moltiplica lo spessore iniziale per mille.
A questo punto vediamo che mettendo come spessore iniziale 1024 decimi di millimetro, piegando dieci volte troveremmo 1024 x 1024 decimi di millimetro, cioè circa 100 metri. Questo equivale ad aver piegato venti volte il nostro foglio iniziale spesso un decimo di millimetro.
Piegando ancora 10 volte (in tutto 30) saremmo già a 100 km. Con 10 altre pieghe (in tutto

quaranta) si arriverebbe a 100 000 km. Infine, con le ultime 10 piegature si arriverebbe allo sterminato numero di 100 000 000 di km, 10^{15} decimi di millimetro, 10^{11} metri, 10^{8} km, cioè due terzi della distanza dalla Terra al Sole. .

A questo punto bisogna che facciate un esercizio. Moltiplicate due numeri a caso della seconda colonna e fate due osservazioni, una sui corrispondenti numeri della prima colonna e una sui numeri della seconda colonna.

Esempio:

11	2048
23	8388608

Risultato: 17 179 869 184

Che cosa osservate, guardando le tavole qui sopra?

(RIFLETTERE SENZA LEGGERE OLTRE PER UN INTERVALLO DI TEMPO SUFFICIENTE)

Bene, avreste dovuto osservare due cose:
- primo, che il risultato del prodotto di due numeri della seconda colonna è un altro numero della seconda colonna;
- secondo, il "numero di pieghe" del risultato è al somma dei numeri di pieghe dei due numeri fattori.

Non c'e niente di strano in tutto questo.

I numeri della prima colonna ci dicono quanti numeri 2 moltiplichiamo fra loro. La seconda colonna ci dà il risultato. *Stiamo insomma lavorando con le potenze di 2: la prima colonna ci dà gli esponenti, la seconda il risultato dell'elevazione a potenza con quell'esponente.*

Un 5 nella prima colonna vuol dire che moltiplichiamo 2 x 2 x2 x 2 x 2 (= 32). Ricordiamo che la prima riga corrisponde all'esponente 0 e quindi al numero 1, e quindi non ci dà fastidio – confonde solo un poco le idee.
Moltiplicare il numero che si trova nella quarta riga per il numero che si trova nella sesta riga vuol dire moltiplicare (2 x 2 x 2) x (2 x 2 x 2 x 2 x 2). Vediamo subito che le parentesi sono irrilevanti. In ultima analisi moltiplichiamo 2 otto volte per se stesso (cioè 3 + 5 volte).

Ora prendete un foglio di carta a quadretti, e poi scrivete vicino al margine sinistro del foglio gli esponenti e i numeri sulla riga . Rifate lo stesso schema, ma verso il margine destro di un altro foglio. Ora vedete che se fate scorrere un foglio accanto all'altro, potete simulare la somma dei due numeri che indicano gli esponenti, e potete tranquillamente fare 2^{10} x 2^{15}.
E le divisioni? prendiamo coraggio e notiamo che invece di sommare gli esponenti, o su carta o meccanicamente, li dobbiamo sottrarre.

Bene, noi possiamo moltiplicare e dividere tra loro le potenze di 2 con questi due foglietti. Ma gli altri numeri? Domanda, su questa scala in margine, dove sarà il numero 10?
Sarà tra l'esponente 3 (perché 2^3=8) e l'esponente 4 (perché 2^4=16), più vicino a 3 che a 4.
Se pensate molto vedete che una migliore approssimazione viene dal fatto che 2^{10} = 1024, cioè circa 10^3. Ma teniamo semmai questo metodo per dopo.

Possiamo divertirci ad identificare numeri che non sono potenze di 2 ma sono vicini ad esse.

2 l'abbiamo
10 lo si trova come detto
3 è 30 (vicino a 32), diviso 10
4 lo abbiamo
5 è 10/2
6 è 2x3
7 è tra 4 e 8, un po' più piccolo del secondo
8 lo abbiamo
9 è 3 x 3

Potete fare altre operazioni e verificare che i conti tornano.

E intanto vediamo che introdurre degli esponenti intermedi tra gli esponenti interi non è un'operazione insensata.

Ma certo gli ingegneri non si sarebbero accontentati di un metodo così impreciso.

Che cosa dobbiamo fare per rendere il metodo più preciso?
Semplice. Dobbiamo usare una "base" diversa. Se usiamo 3, vediamo che i numeri della seconda colonna sono ancora più spaziati fra loro e quindi il nostro sistema sarà ancora più impreciso.

D'altra parte, se usiamo come base 1, vediamo che tutte le potenze di 1 sono sempre 1. Di lì non ci si muove. E allora? Che base dobbiamo scegliere?

RIFLETTERE SENZA GUARDARE OLTRE PER UN INTERVALLO DI TEMPO SUFFICIENTE

E allora si deve prendere una base vicina a 1 quanto possibile. Per esempio 1.1, 1.01 o 1.001. Le primissime tavole dei logaritmi furono costruite nel XVI sec da Neper e Briggs, prendendo come base 1.0000001. Santa pazienza! Chi farebbe oggi una cosa del genere, anche se sapesse che è utilissima? Stiamo parlando di centomila potenze di un numero.

Per il piacere di dare un esempio, scriviamo la tabella con base 1,1, e usiamo solo due cifre decimali.

esponente	potenza	
0	1,00	
1	1,10	
2	1,21	
3	1,33	
4	1,46	
5	1,61	
6	1,77	
7	1,95	
8	2,14	2
9	2,36	
10	2,59	
11	2,85	
12	3,14	3
13	3,45	
14	3,80	
15	4,18	4
16	4,59	
17	5,05	5
18	5,56	

19	6,12
20	6,28
21	7,70
22	8,14
23	8,95
24	9,85
25	10,83

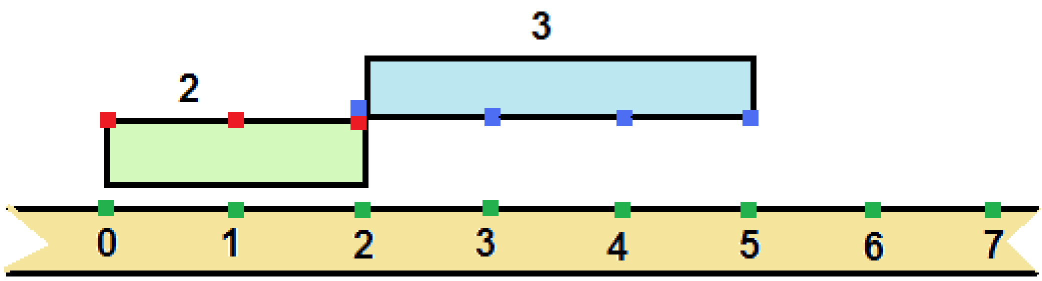
$\boxed{9}$

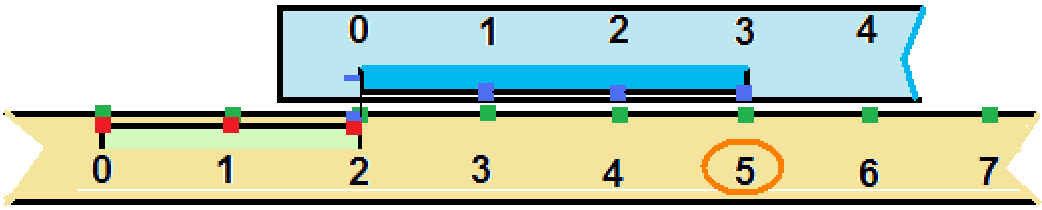
Può bastare così.
Ora vediamo che

2 (colonna di destra) è tra esponente 7 ed esponente 8
3 tra esponenti 11 e 12
4 è il doppio di 2, ed è tra esponenti 14 e 15
5 è quasi esattamente esponente 17
6 è tra esponenti 18 e 19
7 tra esponenti 20 e 21
8 tra esponenti 21 e 22
9 poco maggiore di esponente 23
10 è inferiore a esponente 25.

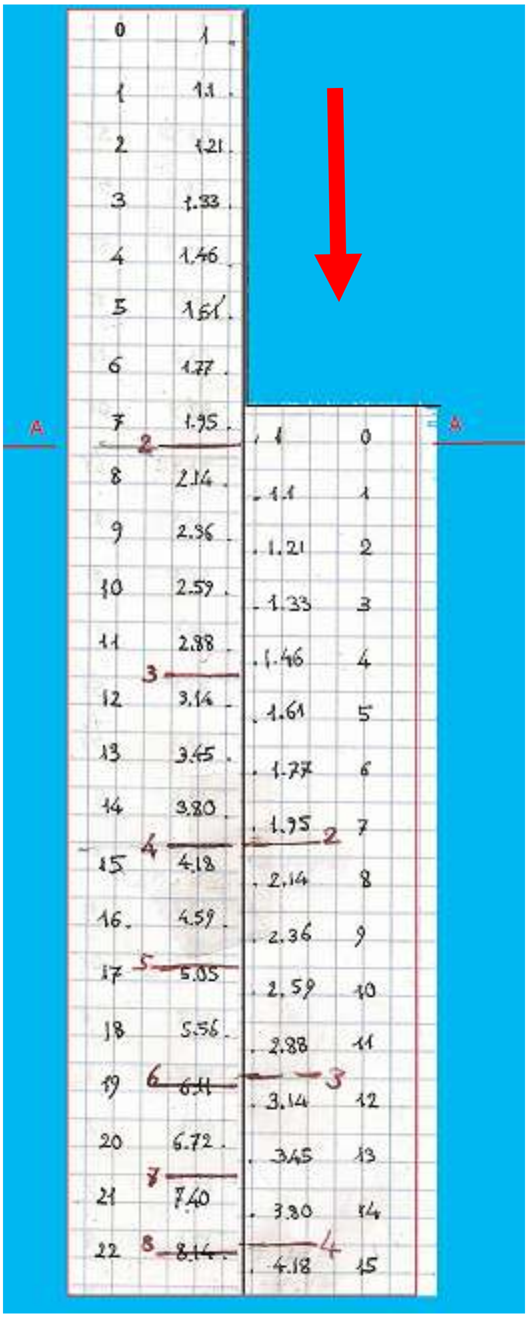
Possiamo essere più precisi, ma intanto vediamo che la scala si è già raffinata parecchio.
Possiamo anche fare qualche operazione, magari non precisissima: per esempio 2 x 4 dovrebbe corrispondere alla somma dei due esponenti, 7.2+14.5 (ho messo ad occhio il primo), che ci dà 21.7. Come vediamo, 8 corrisponde a un esponente tra 21 e 22.

La macchina per le moltiplicazioni che vogliamo costruire dovrebbe aiutarci ad ottenere i risultati dei nostri calcoli in modo più diretto.
Se vogliamo una macchina che ci aiuti a sommare 2 + 3 e ragioniamo poco, semplicemente ci tagliamo due righelli di legno o cartone uno lungo 2 unità, l'altro lungo 3 e poi giustapponiamo gli estremi come in figura. Dopo andiamo a leggere su un righello di riferimento a che cosa corrisponda l'estremo del righello da 3, e troviamo 5. Poi, se vogliano sommare 5+4 andiamo a tagliarci un righello da 5 e uno da 4 eccetera.
Ma è l'unico modo di riuscire? Non possiamo economizzare legna o cartone?
Il trucco (e chi lo trovò era anche lui a suo modo un genio) è quello di non tagliare i righelli in pezzi della lunghezza che ogni volta ci serve, ma:
1) usare il righello di riferimento anche come primo righello (verde)
2) marcare le varie distanze sul secondo righello (azzurro) e vedere a quale numero del righello di riferimento corrisponde il 3.





Naturalmente, con un po' di pratica, i colori non saranno necessari.
Ma con questo sistema, invece di un'infinità di righelli di varie lunghezze, ce ne bastano due: quello inferiore, su cui leggiamo il primo addendo e leggeremo il risultato, e quello superiore, su cui leggiamo il secondo addendo. Adesso la nostra macchina è pronta. Noi potremmo indicare che sommiamo gli esponenti col metodo che ho appena indicato, ma dobbiamo ricordare che sommando esponenti noi moltiplichiamo potenze di una data base.



La figura a fianco è la copia di un esempio di calcolo. Le striscia di destra è la riflessione speculare di quella di sinistra. Ogni striscia contiene tre numeri:

IN NERO:

1) l'esponente della potenza di 1.1 (questo è all'esterno rispetto alla divisione fra le due striscie);

2) il valore della potenza.

IN ROSSO

I numeri interi interpolati ad occhio.

La moltiplicazione viene fatta sommando gli esponenti. Ma con questo strumento non è necessario cercare gli esponenti, che sono presenti all'estrema sinistra e all'estrema destra , Li ho messi solo per spiegare come si costruisce la macchina e per illustrare il fatto che il prodotto di due numeri corrisponde alla somma degli esponenti..

Se, come nell'esempio, facciamo corrispondere alla linea AA da un lato il valore (interpolato) di 2, in rosso, e dall'altro l'inizio del regolo (esponente 0, che corrisponde ad 1) possiamo vedere sulla striscia di sinistra i risultati del prodotto di 2 per uno qualunque dei numeri interni, rossi o neri, della striscia di destra.

E poi notiamo che la nostra macchina fatta di due fogli di carta può darci non solo moltiplicazioni e divisioni (tutte operazioni approssimate), ma può anche estrarre radici quadrate (per esempio misurando la distanza in millimetri e dividendo per due); cubiche, quarte o quinte, dividendo per tre, quattro cinque. Si trovano anche le potenze (moltiplicando le distanze per l'esponente). Particolarmente le radici terze e superiori sono lunghe a farsi con altro mezzo che con un computer o col regolo calcolatore o le tavole dei logaritmi o il nostro rudimentale marchingegno.

Ah, dimenticavo. *Questi esponenti, interi e non interi, discendenti dall'originale "numero di pieghe", da darsi ad una certa base, 2 o 1.1 o 1.00001, per ottenere un certo numero N si chiamano logaritmi di N.*
Per esempio, se abbiamo $2^6 = 64$
diciamo che 2 è la base, 6 il logaritmo in base 2 di 64.

Mentre, da $1.1^{12} = 3.14$ diciamo che 12 è il logaritmo di 3.14 in base 1.1

Inoltre, l'oggetto che abbiamo appena costruito è un prototipo di regolo calcolatore.

Ma il regolo non può fare le addizioni, dirà qualcuno. Si possono fare dei regoli molto più semplici per fare le addizioni. Il bello del regolo è che riduce le moltiplicazioni ad un'operazione più semplice, cioè l'addizione. *Ma di operazioni più semplici dell'addizione non ce ne sono.*

Notate quest'altro calcolo che dà un curioso risultato.
Cento anni fa, quanti dei **diretti** antenati di ciascuno di noi (padre, madre, nonni, bisnonni; ma niente zii, zie, fratelli, sorelle, cugini e cugine in qualsiasi grado) erano in vita? Probabilmente più di una decina, indipendentemente dalla vostra età. Se siete molto giovani, a quel tempo erano in vita molti dei vostri otto bisnonni e bisnonne, molti dei loro sedici genitori e qualcuno dei loro 32 nonni. Certo ben più di dieci persone. Nel mio caso so con certezza che nel 1910 erano vivi i miei 2 genitori, 4 nonni, 5 bisnonni su 8, totale 11 persone.
Insomma, la stima di dieci antenati diretti vivi 100 anni fa non è cattiva. Semmai è troppo bassa. Ma lo stesso calcolo vale per ciascuno di questi 10 miei (o vostri) antenati. Cento anni prima, duecento anni fa, erano in vita 10 antenati diretti di ciascuno di loro. Quindi nel 1810 dovevano essere vivi circa 10 x 10 dei miei antenati diretti. E 300 anni fa erano 1000. E 400 anni fa erano 10000….e mille anni fa erano dieci miliardi. Ma non c'erano dieci miliardi di persone al mondo 1000 anni fa. Anche contando i Cinesi e gli Indù non credo che tutti insieme sorpassassimo di molto i 300 milioni, un trentesimo del necessario per uno solo di noi. E allora?
E se i miei antenati erano cosi tanti, dove erano i vostri antenati, dieci miliardi per uno?

C'è solo una spiegazione: moltissimi di questi antenati erano gli stessi sia all'interno della mia ascendenza sia tra la mia e la vostra ascendenza. In altre parole, siamo tutti cugini, ed esagerano solo un poco le religioni che dicono che siamo tutti fratelli.

III. FANTASIE CON LE POTENZE

Tutto quello che abbiamo visto più sopra è basato sulle proprietà delle potenze. Vale la pena giocarci un poco ed estenderne il concetto.

E' facile dimostrare che $a^x a^y = a^{x+y}$.

Ad esempio:
$a^4 a^2 = a^6$

Infatti:
(a a a a) (a a) = (a a a a a a).

E' anche facile dimostrare che $(a^m)^n = a^{mn}$. Infatti, ad esempio, $(a^2)^3$ vuol dire prendere tre volte (aa), cioè (a a) (a a) (a a) = $a^{2 \times 3} = a^6$. Tutto ciò è basato sul fatto che le *a* sono tutte eguali.

Finora dunque gli esponenti sono i numeri naturali, cioè numeri interi e positivi.

Noi, considerando l'esponente come numero di piegature di un foglio avevamo anche concluso che a^0 ("nessuna piega") deve valere 1.

Domanda: ha senso estendere il concetto ad a^{-2} ? E ad $a^{0.15}$?

Pensare a piegature negative, credo, è impossibile. Ma non è male provare da soli a trovare un significato a queste possibilità.

Per quanto riguarda la prima, a^{-2}, se volessimo coerenza con le regole già date, dovremmo avere, ad esempio, che

$\mathbf{a^3 a^{-2}} = a^{3-2} = \mathbf{a^1}$

Ma allora, dividendo a^1 per a^3, dovremmo avere a^{-2} , e quindi:

$$\frac{a}{a^3} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

o, più in generale,

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

Tra l'altro, possiamo confermare che $a^0 = 1$, perché:

$a^2 a^{-2} = a^0$ ma è anche uguale ad $a^2/a^2 = 1$.

E il caso di $a^{0.5}$?
Questo è più interessante, perché ci mette sulla strada di una ampia generalizzazione.
E' comunque chiaro che, se valgono le leggi di cui sopra, dovrebbe essere

$$a^{0.5} a^{0.5} = (a^{0.5})^2 \;\; o\ anche \quad a^{0.5+0.5} = a$$

Cioè $a^{0.5} = a^{1/2}$, che non sono entrambi altro che $\sqrt{a}$.

Allo stesso modo, $a^{1/3}$ non è altro che la radice cubica, $a^{1/10}$ la radice decima eccetera.

Notate bene che se $a^2=b$, allora a è la radice quadrata di b, cioè $a = b^{1/2}$. In generale, se $a^x=b$, allora $b^{1/x} = a$. *Si noti bene questa formula, ci servirà.*

A sua volta, $a^{3/10} = (a^{1/10})^3$, cioè il cubo della radice decima.

Ed ora vediamo questa bella generalizzazione:

$$a^{1.375} = a\, a^{0.3}\, a^{0.07} a^{0.005} = a\, a^{3/10} a^{7/100} a^{5/1000}$$

Che potremmo leggere con lungaggine: “ $a^{1.375}$ è il prodotto di *a* moltiplicato la terza potenza della radice decima di *a,* moltiplicato per la settima potenza della radice centesima di *a*, moltiplicato per la quinta potenza della radice millesima di *a*”. Provate con questo sistema a calcolare quanto vale $10^{0.301}$ o addirittura $10^{0.30103}$, servendovi di una piccola calcolatrice o di Google stesso.

Ci resta ancora una questione da esplorare. Supponiamo di sapere che, ad esempio, $2^6 = 64$. Vogliamo passare a base 8. Il nostro $2 = 8^{1/3}$. Dovremmo quindi avere che $8^{1/3 \times 6} = 8^2 = 64$.

Questo è vero. Ma, se guardiamo tutte le potenze di 2 ,vediamo che se vogliamo passare a base 8 dobbiamo dividere tutti gli esponenti per 3.
Ad esempio, $2^{12} = 8^4$, e $2^9 = 8^3$.

E che cosa è questo 3 per cui dobbiamo dividere gli esponenti delle potenze di 2? E’ l’esponente a cui dobbiamo elevare 2 per ottenere la nuova base, 8.

Smettiamola una buona volta di parlare di esponenti e chiamiamoli col loro nome di logaritmi.
I logaritmi, come gli esponenti, hanno senso solo se si dichiara o si sottintende una base.

Allora possiamo raccogliere le leggi ritrovate più sopra:

- Il logaritmo (in qualsiasi base) del prodotto di due numeri è uguale alla somma dei logaritmi dei due numeri (in quella stessa base).

- (In qualsiasi base) Il logaritmo della potenza n di un numero x è dato dal numero n moltiplicato il logaritmo di x.

- Cambio di base. C’è una certa simmetria nella formula: “Logaritmo in base a di c è eguale al logaritmo in base a di b per il logaritmo in base b di c”.
  E’ come se avessimo inserito una b, prima come argomento poi come base.

  $\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c$.
  Mettiamoci dei numeri per convincerci: $\log_2 16 = \log_2 4 \cdot \log_4 16$ $(4 = 2 \cdot 2)$

- Inverso di un logaritmo. Il logaritmo in base a di b è l'inverso del logaritmo in base b di a. Per questo dobbiamo solo ricordare che se $a^x=b$, allora $b^{1/x} = a$.

  Mettiamoci dei numeri: $\log_2 4 = 1/(\log_4 2)$ cioè $2 = 1/(1/2)$

NOTA

Nel calcolare il logaritmo di 2 cercando quale potenza di 1.1 sia più vicina a 2 (col risultato che l'esponente vale circa 7.5) noi ci avviciniamo al concetto di logaritmo naturale. Infatti, se utilizziamo la formula data qui sopra del cambio di base

$$\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c.$$

e poniamo a = 1.1, b = e, c = 2, troviamo che

$\log_{1.1} 2 / \log_{1.1} e = \log_e 2.$

Solo per la base "e" il log(1 + x) tende a x, quanto più x è piccolo, e il logaritmo naturale può essere ottenuto da un logaritmo in base 1+x in modo semplice e corretto quanto più piccolo è x. Supponiamo per fissare le idee che x valga 0. 1, ed usiamo la base 1. 1 per trovare il logaritmo di 2 (come indicato). Avevamo ottenuto che $\log_{1.1} 2$ vale circa 7.5. D'altra parte $\log_e 1.1 = 0.1 +...$
In prima approssimazione abbiamo quindi

$\log_e 2 = \log_e 1.1 * \log_{1.1} 2 = 0.1...*7.5 = 0.75.$ (circa)

Procedendo il nostro gioco con x sempre più piccoli, troveremmo infine che $\log_e 2 = \log_e 1.00001 * \log_{1.00001} 2$, cioè

$\text{Log}_e 2 = 0.00000999995*69315.1= 0.6931475$
Il valore corretto è 0.693147.
Il vantaggio dell'uso dei logaritmi naturali è che con questa scelta di x, otteniamo un buon valore di $\log_e 2$ con la moltiplicazione:
$\text{Log}_e 2 = 0.00001*69315.1= 0.69315$

(Naturalmente per ottenere il valore approssimato0.6931475 ci saremmo dovuti fare diecimila elevazioni a potenza di 1.00001....).
Del resto, così Nepero inventò i logaritmi.

IV. ESTRAZIONE DI UN LOGARITMO

Ed eccoci al dunque. Come si diceva, poche persone al giorno d'oggi sanno "estrarre un logaritmo", cioè risolvere, ad esempio, l'equazione

$10^x = 2$.

In questa equazione l'incognita x sarebbe il logaritmo decimale (cioè in base 10) di 2.
I logaritmi decimali sono particolarmente simpatici, perché, ad esempio, $10^{2.75}$ vuol dire $10^2 10^{0.75}$.
La parte intera, 2 (che per qualche ragione si chiama "caratteristica"), ci dice che $10^{2.75} = 100 \times 10^{0.75}$, cioè il numero è contenuto fra 100 e 1000. La parte decimale (che per qualche ragione si chiama "mantissa"), 0.75, è il logaritmo decimale di un numero tra 1 e 10. Infatti il logaritmo di 1 è 0 e il logaritmo di 10 è 1 e 0.75 è tra i due.
Sapendo i logaritmi dei numeri tra 1 e 10 possiamo così ricostruire i logaritmi in base 10 di tutti i numeri. Poiché poi i logaritmi di uno stesso numero, ma in varie basi, sono tutti proporzionali tra loro, abbiamo modo di scoprire i logaritmi in qualsiasi base, conoscendo la relazione

$$\mathrm{Log}_{10}x = \log_{10}y \ \log_y x, \text{ o anche } \log_y x = \log_{10}x/\log_{10}y$$

Noi risolveremo l'equazione $10^x = 2$ basandoci sulla nostra capacità di estrarre radici quadrate: come vedremo non è l'unico modo. Esso però ha per me la precedenza, perché è il primo che appresi, dalle Lectures on Physics del Feynman.
O con Google, o con la calcolatrice che avete nelle Applicazioni di Windows, o con un elementare programma in SmallBasic, per prima cosa dobbiamo farci la tabella delle radici quadrate successive di 10.
Le radici successive, come sappiamo, sono
$10^{1/2}$, $(10^{1/2})^{1/2} = 10^{1/4}$, e poi $10^{1/8}$ etc.

Usando i numeri decimali, gli esponenti diventano 0.5, 0.25, 0.125, che mettiamo nella seconda colonna. Nella terza colonna mettiamo i numeri che si ottengono calcolando la radice quadrata del numero che sta nella casella superiore.

Potenza di 10 Successive radici quadrate	Potenza di 10. Valore decimale dell'esponente	Valore di 10^r
1	1.0	10.0
1/2	0.5	3.162278
1/4	0.25	1.778279
1/8	0.125	1.333521
1/16	0.0625	1.154782
1/32	0.03125	1.074608
1/64	0.015625	1.036633
1/128	0.0078125	1.018151
1/256	0.00390625	1.009035

Noi troveremo il nostro logaritmo procedendo semplicemente con buonsenso.

Sia dunque: $10^x = 2$.

1. Chiaramente x è compreso fra 0.25 e 0.5, perché la nostra tavola ci dice che $10^{0.25}=1.778279$, mentre $10^{0.5} = 3.162278$, e 2 è compreso fra questi due numeri.
Prendiamo sempre il numero inferiore e poi cerchiamo la correzione. Se noi prendiamo 0.25, la stessa tavola ci dice che

$10^{0.25} = 1.778279$, che è più piccolo di 2.

Quindi $x = 0.25+y$, o, se vogliamo, $2 = 10^{0.25}10^{y}$ = **1.778279** 10^{y} (il valore di $10^{0.25}$ proviene dalla tavola).
Se dividiamo 2 per 1.778279 troviamo **1.124683**, che è il nostro 10^{y}.

2. Adesso i numeri sono più complicati, ma il gioco è lo stesso. Noi prima volevamo risolvere l'equazione $2= 10^{x}$ e adesso vogliamo risolvere in funzione di y l'equazione

$1.124683= 10^{y}$

Vale a dire, guardando la nostra tabella, y è compreso fra 0.03125 e 0.0625. Prendiamo come il solito il più piccolo, e scriviamo $y = 0.03125+z$.
Quindi:
$1.124684 = 10^{0.03125+z} = 10^{0.03125}\, 10^{z}$ =**1.074608** 10^{z}.
Da cui, 10^{z}=1.124684/1.074608 = **1.046599**

3. La nuova equazione da risolvere è:

$1.046599 = 10^{z}$

Ora, come risulta guardando la nostra tabella, z è compreso fra 0.015625 e 0.03125. Scegliamo il più piccolo. Quindi $z= 0.015625 + u$

Abbiamo che $1.046599 = 10^{0.015625}10^{u}$ =**1.036633** 10^{u}

4. Da cui la nuova equazione da risolvere:

$1.009614=10^{u}$

Ispezionando la nostra tabella, vediamo che u deve essere un po' più grande di 0.00390625, e quindi lo possiamo scrivere come: $u = 0.00390625 + v$
Sostituendo come sopra: 1.009614 = **1.009035** 10^{v}

A questo punto, mettendo tutto quanto insieme, abbiamo che
$2 = 10^{0.25+0.03125 +0.015625 +0.00390625+v} = 1.778279\ 1.074608\ 1.036633\ 1.009035\ 10^{u} = 1.998855\ 10^{u}$
Siamo vicini a 2, con un'errore di una parte su mille, ma non ci siamo ancora proprio.

Il nostro logaritmo decimale approssimato di 2 è la somma degli esponenti
0.25+ 0.03125+ 0.015625+0.003906+u = **0.300781**+u. Purtroppo u ci è incognito, ma deve essere più piccolo dell'ultimo esponente che abbiamo usato, che è 0.003906.
Se adesso guardiamo le vecchie tavole, o chiediamo a Google scrivendo nella ricerca "log(2)", o usiamo una calcolatrice elettronica scientifica, troviamo:

Logaritmo decimale di 2 = 0.30103.

Notiamo che noi abbiamo sempre scelto l'esponente inferiore, quando avevamo un numero compreso fra due potenze di dieci. Avremmo potuto scegliere il superiore, o, meglio ancora, il più vicino tra i due. Il problema sarebbe stato che ogni tanto la correzione all'esponente sarebbe stata negativa, e alla fine, al momento di mettere tutto insieme, avremmo avuto esponenti negativi e positivi, cioè moltiplicazioni e divisioni da fare. E noi preferiamo le moltiplicazioni alle divisioni (soprattutto se non abbiamo una calcolatrice elettronica).

Alla fine del Settecento l'equazione $10^x = 2$ sarebbe stata risolta senza calcolatori o calcolatrici, e ci sarebbe voluto il suo tempo per farlo. Era uno degli esercizi che il giovane ufficiale di Artiglieria Napoleone Buonaparte trovava sul suo libro di matematica (che noi conosciamo e che si può scaricare da Internet) ed era, penso, un esercizio abbastanza temuto.

Avrebbe anche lui sempre cercato di trovare la potenza a cui va elevato un numero più piccolo per ottenerne uno più grande.

Dunque, sia $10^x = 2$.
2 è più piccolo di 10, per cui Napoleone avrebbe anzitutto risolto l'equazione $2^a = 10$, e poi, alla fine del calcolo, si sarebbe ricordato che **$x = 1/a$**.

Dunque $2^a = 10$. La tavola delle potenze di 2 che abbiamo già costruito, ci dice che $3<a<4$.
Quindi **$a= 3+b$**, e vale la relazione

$2^{3+b} = 10$ cioè $8 \times 2^b=10$, cioè $2^b = 10/8 = 1.25$

Adesso la palla è passata dall'altra parte, perché $2 > 1.25$.
Chiamando **$1/b = c$** abbiamo ora

$1.25^c = 2$

Calcoliamo le successive potenze di 1.25, e troviamo che sono:

Esponente	1	2	3	4
Valore	1.25	1.5625	1.953	2.44

Quindi $3< c < 4$ e noi scriviamo **$c = 3 +d$**
Cioè abbiamo $1.25^{3+d} = 2$ da cui $1.25^d = (2/1.953) = 1.024$

Di nuovo la palla è passata dall'altra parte, e abbiamo:

$1.024^{1/d} = 1.25$

Chiamiamo **$1/d = f$**, e facciamo la tabella delle potenze di 1.024

Esponente	1	2	3	4	5	6	7
Valore	1.024	1.0486	1.0737	1.0995	1.1259	1.15292	1.18059

Esponente	8	9	10

Valore	1.20892	1.23794	1.26765

Quindi f = 9 + g.

Mettendo tutto insieme (con ordine e con attenzione) abbiamo che
x = 1/a.
Ma a= 3+b, quindi x=1/(3+b)
Ma b = 1/(3+d), quindi x = 1/(3+1/(3+d))
Ma d =1/(9+g), quindi x = 1/(3+1/(3+1/(9+g)))

Mettendo che g sia trascurabile e cominciando dal fondo , abbiamo che
d =1/9 =0.11,
b = 1/3.11= 0.3215
a =3 + 0.3215 = 3.3215
Quindi x = 1/a = 0.301064, che è assai più vicino a 0.30103 del risultato precedente. Ecco perché Napoleone vinceva le battaglie! Noi avevamo dovuto estrarre otto radici quadrate successive con 6 cifre decimali. Mica uno scherzo. E' vero però che quella tavola di radici di 10 va fatta una volta per tutte e poi va bene per tutti i logaritmi decimali, mentre col metodo che Napoleone usava (ma non l'aveva inventato lui) ogni equazione del genere $2^x = 10$ o viceversa è un caso speciale. Però non si devono estrarre radici quadrate.

Notate poi che nella foresta della matematica abbiamo scovato uno strano animale. Il nostro logaritmo decimale di 2 può essere scritto come:

$$x = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{9 + \mathrm{g}}}}$$

Questo è un esempio di frazione continua. Questa in particolare sarebbe infinita se ad un certo punto non decidessimo di trascurare g. Il modo più semplice di calcolare una frazione continua infinita è di fermarla ad un certo punto, trascurare l'incognita e fare le sostituzioni partendo dal basso.

Anche il MCD potrebbe essere trovato con una frazione continua, la quale però a un certo punto si ferma. Per esempio:

$$\frac{48}{26} = 1 + \frac{22}{26} = 1 + \frac{1}{\frac{26}{22}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{22}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{22}{4}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{2}{4}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{\frac{4}{2}}}}$$

Ma la divisione 4/2 non dà resto, e quindi 2, ultimo denominatore, è il nostro MCD.
Non ci illudiamo: le divisioni che dobbiamo fare (prima 48/26, poi 25/22, poi 22/4, poi 4/2) sono le stesse che avevamo dovuto fare col metodo di Euclide.

Per mezzo delle frazioni continue è facile trovare i coefficienti INTERI x e y di due numeri INTERI a e b, tali che la somma ax+by =1. Ciò è sempre possibile ***se a e b sono primi fra loro****, cioè il loro MCD =1.*
Per stare dalla parte dei bottoni scegliamo due numeri primi, che sono necessariamente anche primi fra loro: a=71 e b=23.

$$\frac{71}{23} = 3 + \frac{2}{23} = 3 + \frac{1}{\frac{23}{2}} = 3 + \frac{1}{11 + \frac{1}{2}}$$

Valutiamo la frazione *senza il termine finale ½, il punto in cui il calcolo finisce, perché il resto di 2/1 è zero.*
Abbiamo :

$$\frac{71}{23} = 3 + \frac{1}{11} = \frac{34}{11}$$

Adesso vediamo sperimentalmente come ottenere 1: Moltiplichiamo 71 x 11 = 781 e 34x23 = 782.
Vediamo quindi che il numero x =-11 ed il numero y=23 risolvono il problema, perché così facendo abbiamo:
71 x (- 11)+23 x 34 = 1.

E con frazioni continue avremmo potuto anche estrarre una radice quadrata di un numero qualsiasi. Possibile?
Supponiamo di dover risolvere $x^2 = 2$.
Scriviamo questa equazione come :

$$x^2 - 1 = 1$$

$$(x+1)(x-1) = 1$$

$$x - 1 = \frac{1}{1 + x}$$

$$x = 1 + \frac{1}{1 + x}$$

Ora il serpente può incominciare a mangiarsi la coda, perché al posto della x rossa possiamo mettere la x blu.

$$x = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + x}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + x}}$$

L'abbiamo fatto una volta, possiamo farlo di nuovo, tanto più che la nostra espressione per x si è intanto allungata.

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + x}}}$$

Se ci fermiamo qui e nella frazione approssimiamo x con 1, troviamo x= 1.375, mentre è 1.4142. Tutta questa fatica per una precisione così modesta! Ma notate che possiamo continuare la frazione continua fin che vogliamo, e raggiungere precisioni sempre maggiori, perché a questo punto il gioco è chiaro.