IL PARADOSSO DI ZENONE

DIALOGO: ACHILLE E LA TARTARUGA

(Per non matematici o matematici che imparano a camminare)

T. Achille, poche storie. Sono duemilacinquecento anni che tutti gli animali, persino gli sfenodonti punteggiati, che sono quasi estinti e dovrebbero aver altro a cui pensare, mi rompono le scatole con la storia del paradosso di Zenone, una sorta di imbecille che da duemilacinquecento anni appunto turba i sonni di noialtre tartarughe. Non i tuoi, che sei da tremila anni nell'Ade. Ma i nostri sì. Di generazione in generazione ci sentiamo chiedere ironicamente: "E allora, questo Achille, vi ha poi raggiunte o no?". Non hai idea di quanto uno sfenodonte punteggiato possa essere sarcastico!

A. Tartaruga, io non ricordo di aver mai fatto una sola gara di corsa con una di voi.

T. Infatti. Tutto questo è campato per aria. Oggi, però, mi sono portata le mie scarpette da corsa, e propongo che risolviamo la questione. Facciamo una corsa di 100 metri piani una volta per tutte, tu non riesci a raggiungermi, e non se ne parla più.

A. Prego. Io ti raggiungo in men che non si dica, e non se ne parla più.

T. Allora Zenone sarebbe vissuto per niente? Ma insomma, sono curiosa anch'io di sapere come va a finire.
Ricapitoliamo:
Tu vai a 36 km/ora, dieci metri al secondo. La mia velocità è un centesimo della tua (anche perché mi sono allenata), e faccio dieci centimetri al secondo. Corriamo i cento metri, ma tu mi dai dieci metri di vantaggio. Mentre fai questi 10 metri, io nello stesso tempo faccio 1/100 di 10 metri, dieci centimetri. Poi tu fai questi dieci centimetri, e io nello stesso tempo faccio 1/100 di 10 centimetri, cioè un millimetro. Poi tu fai quel millimetro, e io faccio un centesimo di millimetro.

A. Basta, la storia la so da me.

T. Sia pure, ma il punto del paradosso è che i passi che tu devi fare sono in numero infinito. E come fai a fare tutti questi infiniti passi, caro il mio Achille?

A. Ma io nel secondo minuto secondo faccio altri dieci metri e ti dò la polvere.

T. E’ perché tu alzi i piedi. Secondo me non vale. So anch’io che con un passo fai più di un metro e quindi non possiamo seguire il ragionamento di Zenone.

A. Non so cosa farci. Io corro così.

T (pensierosa) D’altra parte, il ragionamento dovrebbe funzionare anche alzando i piedi. Tu resti con un piede per aria mentre io faccio mezzo centimetro. Continui a stare col piede per aria mentre io...

A. Senti, T. Se vuoi che facciamo una gara di corsa, facciamo una gara di corsa. Però che sia una gara di corsa. Adesso mi metto le mie scarpette.

T. (Sospettosa) Te le sarai mica fatte prestare da Hermes, quelle con le alucce?

A. Vuoi che corra scalzo? E se mi faccio male al tallone?

T. Guarda che il tuo tallone debole è già stato sfruttato da tremila anni, e se sei nell’Ade è anche un po’ per quello. Ad ogni modo ho idea che il paradosso di Zenone dovrebbe valere anche con scarpe alate. Metti che Hermes vada a 10 chilometri al secondo e mi dia i soliti dieci metri di vantaggio. Mentre lui fa i dieci metri, in un millesimo di secondo, io faccio un millesimo di dieci centimetri, che sono...che sono...

A. Non chiedere a me. Le attività intellettuali le lasciavo a Patroclo.

T. (Pensierosa) Sì, il paradosso funziona ancora. Neanche colle scarpe alate mi raggiungeresti mai.

A. Ma figurati. Insomma, la vogliamo fare, questa gara?.

L'Ombra di Archimede: Scusate, ma passavo di qui e vi ho sentiti discutere. Il paradosso, credete a me, non esiste. E' semplicemente dovuto al fatto che i Greci (a parte l'umile sottoscritto) erano bravi in logica, e magari anche in geometria, ma molto, molto indietro in algebra. E' inutile che facciate la gara. Achille raggiungerebbe la tartaruga in esattamente in 100/99 di secondo, cioè 1.01010101 secondi.

T. Bum!

OA. Allora senti.
Nel primo secondo Achille fa 10 m. Per raggiungerti deve fare altri dieci centimetri che avrai fatto tu nel primo secondo, cioè 10/100 metri, *dato che la tua velocità è 1/100 della sua.*
Ma mentre Achille fa questi dieci centimetri, tu intanto avrai fatto 1/100 di dieci centimetri, cioè 1/100 di 10/100 metri, vale a dire $10/(100)^2$ metri. Achille fa anche quelli. Ma intanto tu avrai fatto $10/(100)^3$ m. eccetera.
Cioè per raggiungerti dovrebbe fare

$$D = 10\ (1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} \dots)$$

T. Perfetto! Dunque dovrebbe fare infiniti passi, e non mi raggiungerebbe mai.

OA: E invece no, perché *la lunghezza totale di tutti questi infiniti passi non è infinita, ma un numero finito.*

T. Non ci credo.

OA. Eppure è facile. Lasciamo perdere il 10 (che useremo alla fine).
Tu devi fare una somma che appartiene alla categoria:

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots$$

Per noi, x vale 1/100, e vogliamo sapere quanto vale S. Nota che ho dato a questa somma infinita il nome S perché i matematici chiamano “serie” animali di questo genere. Questo è il più semplice di tutti, e si chiama “serie geometrica”. Tenete presente che scrivere una serie in qualche modo è facile, ma sommarla può essere assai difficile...

A. Per favore, torniamo alla nostra corsa.

T. Appunto. Stavo per dirlo io: se x valesse 2, la S sarebbe infinita, lo vede anche un ghepardo.

OA: Parliamone dopo, e tu non essere gelosa dei ghepardi, solo perché sono più veloci di te. Intanto, per adesso x vale 1/100.

Ho detto che sommare le serie può essere assai difficile. Ma questa è facile e lo si può fare in molti modi. Per esempio, se si moltiplica x per S si ottiene:

$$xS = x + x^2 + x^3 \ldots = S - 1$$

Infatti, xS è la nostra stessa serie a cui manca il termine 1. Quindi S-1.

A. Non ti seguo.
OA. Va a chiedere a Patroclo, che ti insegnerà tante belle cose.
T. Neanch'io ti seguo. Come può essere che moltiplicando la serie S per x ti venga un risultato più piccolo, cioè S-1? Eh? Eh?

OA: Tu dimentichi che abbiamo moltiplicato S per x, che vale 1/100, cioè un numero piccolo. OK?

T: OK

OA: Continuiamo. Intanto se

$$xS = S - 1$$

allora

$$1 = S - xS = (1 - x)S$$

Da cui:

$$S = \frac{1}{1 - x}$$

Ora, ponendo x = 1/100, abbiamo 1 – x = 99/100 ed S = 100/99 = 1.010101. Moltiplicando per 10, che avevamo lasciato fuori, dato che moltiplicava tutto quanto, vediamo che la distanza totale che Achille deve compiere per raggiungerti è D = 10.1010101 metri.

T. Sia pure, ma deve sempre fare infiniti passi.

OA. Ma ragiona, T. *Quello che conta non è quanti passi A. deve fare, ma quanto tempo ci mette a farli*. Se ci mette un tempo infinito, non ti raggiunge mai, ed hai ragione tu. Ma come vedi subito, il tempo non è infinito, perché ogni passo è sempre più breve. La velocità di Achille è 10 metri al secondo. Allora dividi la distanza totale D = 10.10101 per 10, e trovi che ti raggiunge in 1.010101 secondi. Altro che "mai"!

T. Ma tutti quei numerini 010101...?

OA. Già, noi greci andavamo forte sui numeri razionali, cioè sui rapporti di due interi, ma non su quelli decimali. In ogni caso: 1.010101 è un numero razionale, e come abbiamo visto vale 100/99. Ti va bene?

T (quasi convinta, ma dubbiosa). Insomma, alla fine tutto dipenderebbe dal fatto che per duemila anni si è immaginato che Achille dovessse fare dei passettini sempre più brevi, e per fare un passetto anche brevissimo, siamo abituati a pensare che ci vuole il suo tempo per mettere in moto tutti i muscoli, alzare il piede etc., prima ancora di spostarsi.

OA. Esatto. Ma oggi siamo nel XXI secolo, e ci sono i treni a levitazione magnetica. Se fai un ragionamento con il treno superveloce Achille e il trenino Tartaruga...

T. Ohi ohi ohi

OA. Trenino peraltro di lusso e assai esclusivo... Be', allora i due treni in linea di principio possono percorrere distanze anche brevissime senza neanche uno scossone, e forse tutto il ragionamento diventa più chiaro.

T. Mi hai quasi convinto. Ma ho l'impressione che ci sia sotto una fregatura. Se x vale 2, vedi bene che $1 + x + x^2 + x^3 ... = 1 + 2 + 4+ 8 ...$ da cui risulta un risultato infinito per S. E Achille non mi raggiungerebbe mai.

OA. Giusto, ma $x =2$ vorrebbe dire che quando lui fa un metro, tu ne fai due...insomma, che vai a velocità doppia della sua. Ovvio che non ti raggiungerebbe mai.

T. E come facciamo a sapere se mi raggiunge o se non mi raggiunge?

OA. Se non ti basta il buon senso, allora ci sono dei metodi matematici per trovare entro quali limiti la somma di un oggetto come S, la nostra "serie", ha un valore finito, cioè, nel nostro gergo, "converge". Basta applicare il teorema di

Cauchy-Hadamard, naturalmente nel campo complesso... Troveremmo che nel nostro caso la serie converge solo per $|x| < 1$, dove $|x|$ sta per “modulo di x”. Se si trattano solo numerio reali è poi il valore assoluto.

T. Ho capito. Anche se il teorema di Cauchy-Hadamard fu formulato da Cauchy nel 1821, e noi tartarughe non lo portiamo alla maturità.

OA. Noi ombre dell’Ade chiacchieriamo parecchio. Soprattutto noi matematici: dopo tutto siamo i soli che hanno ancora qualcosa da dirsi!

T. Ma non è mica tutto: la tua formula per $S = 1 + 2 + 4 + 8...$ dà il risultato

$$S = \frac{1}{1-2} = -1$$

che è assurdo. Sembra che ad andare più veloci si andrebbe all’indietro.

OA. *Chapeau*, T. ! Ma questo ci direbbe soltanto che la formula

$$S = \frac{1}{1-x}$$

ha un valore definito per qualsiasi valore di x, ma è rappresentata dalla serie $1 + x + x^2 + x^3$ solo per valori di $|x|$ inferiori ad 1. Per valori diversi, S e la serie vanno ciascuna per conto suo. E non credere! Si può, per così dire, spostare la regione di convergenza della serie, ed esprimere ancora S come una serie opportuna. Ma questo te lo dimostro in nota per non confonderti le idee ([1]).

T. E che mi dici del teorema di Mittag-Leffler??

OA. Che non c'entra niente.

T. D'accordo. (Corre via piuttosto rapidamente gridando) Chi vuole due paia di scarpette da corsa quasi nuove?

Ombra di Zenone: Io, io. Un paio a me!

T. Ti serviranno, perchè appena te le sarai messe ti correrò dietro per prenderti a calci.

Z. Guarda che nel mio caso x vale 10, e la serie non converge, Cauchy o non Cauchy.

T. (meditabonda) Lo sapevo, oggi è una brutta giornata.

Ombre di Vari Filosofi: Non te la prendere, T. Molti di noi filosofi hanno introdotto diversi concetti nuovi: tempo psicologico, tempo di Achille e tempo della Tartaruga, tempo quantizzato in istanti discreti, tempo non assoluto, spazio-tempo etc. per cui il paradosso resta inconfutabile. Secondo noi è troppo facile usare una serie convergente per confutarlo!

T. (Incuriosita) Ma Zenone, a tutte queste possibilità ci aveva pensato, quando aveva proposto il suo paradosso?

OVF.: Molto probabilmente no. I Greci la sapevano lunga su molte cose, ma sul tempo quantizzato e sullo spazio tempo, mmm...

T. Quindi il paradosso inconfutabile non è il paradosso di Zenone, vero?

OVF.: Be', sì e no.

T (Vessata): Ho capito. Ma alla fine della fiera, Achille, mi raggiunge o no?

OVF. Certo che ti raggiunge. Su quello non ci sono dubbi. Noi discutiamo solo la LOGICA del paradosso. Per il resto..."*solvitur ambulando*"([2]).

T. Allora "*ambulate*" a farvi friggere.

FINE DEL DIALOGO

NOTE

([1]) Per far tornare i conti con x =2, si può procedere, ad esempio, come segue:

$$S = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-2+1} = \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = (-\frac{1}{2})(1+(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2 \ldots)$$

La serie vale 2, e S vale $\left(-\frac{1}{2}\right)2 = -1.$ Abbiamo insomma recuperato il risultato corretto per mezzo di una serie più qualcos'altro. Per fare questo, si è di nuovo ridotta la x ad un valore inferiore a 1 (qui vale ½).

([2]) "*Solvitur ambulando*" significa, "Lo si risolve (il paradosso) camminando", risposta attribuita a Diogene di Sinope ad un tizio che usando un paradosso simile a quello di Achille e della Tartaruga voleva dimostrargli l'impossibilità del moto.