DUE SASSOLINI CHE PROVENGONO
DA UNA "CATTIVA" ABITUDINE NELL'INSEGNAMENTO
DELLA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

Per lettori con una testa da primo corso di analisi matematica.

(Seconda edizione)

I

La più semplice equazione del primo ordine

Molto sovente quando un'equazione differenziale si presenta in fisica o in altra materia in cui la matematica è strumento d'uso, ma non è il preciso obiettivo dello studio, la soluzione delle più semplici equazioni differenziali viene data con un piccolo trucco.

Forse la più semplice equazione differenziale del prim'ordine è la nota:

$$y' = y$$

Che di solito viene risolta con i seguenti passaggi:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = x + A$$

A questo punto, ai danni dello studente viene compiuta una piccola truffa. Gli si dice che dall'aver eseguito la derivata della funzione logaritmo, dovrebbe aver già appreso che

$$\frac{d \ln(y)}{dy} = \frac{1}{y} \text{ da cui segue } d(\ln(y) = \frac{dy}{y}$$

E finalmente

$$\ln|y| = x + B \ (altra\ costante)$$

che ci dà x in funzione di y. Noi invece vorremmo y in funzione di x. Quindi, invertendo la funzione, ovvero prendendo gli esponenziali di ambo i membri,

$$|y| = C\ e^x$$

In cui C è una terza costante. Ma fin da principio, quando mi fu presentata questa soluzione, rimasi con la bocca amara. La domanda era: che cosa potremmo fare se non conoscessimo la funzione logaritmo? Resteremmo senza soluzione?

Non c'è altro modo di ottenerla, a parte ricordare a memoria l'integrale? In effetti ci si può anche chiedere: perché passare attraverso il logaritmo? Perché, visto che dobbiamo ricordare qualcosa, non ricordare invece che

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \ ?$$

Dopo tutto, il vocabolario degli integrali elementari coincide con il vocabolario delle derivate, anzi, può solo essere ricavato a memoria, mentre la **derivata** di exp(x) (come quella di Log x) può essere calcolata dai primi principi.

Non ne parlerò più, ma penso che si preferisca fare la lunga strada attraverso il logaritmo, perché per via arriva la costante (moltiplicativa) al posto giusto, mentre utilizzando l'esponenziale avremmo una "insufficiente" costante additiva. Perché insufficiente? Perché la derivata della funzione $e^x + C$ ucciderebbe la C e quindi non sarebbe eguale alla funzione di partenza, e in generale $e^x + C$ non risolverebbe l'equazione.

Ora, non tutte le equazioni possono essere risolte "in termini finiti", cioè la soluzione può non essere una funzione nota o una composizione di funzioni note. Questo lo sappiamo. Anzi, per il matematico, quando la soluzione è ridotta "alle quadrature" cioè viene presentata come un integrale, l'equazione è data come risolta *anche se l'integrale non lo sappiamo fare.* E perché può succedere che l'integrale non lo sappiamo fare? Che cosa c'è dietro questa più o meno misteriosa impossibilità? Nulla, solo il fatto che la famiglia delle funzioni che risultano da integrali di funzioni ben note è assai più vasta della famiglia delle funzioni ben note. E' un po' come se conoscessimo perfettamente la geografia del Piemonte e prendessimo in stazione un treno per Firenze. Tutto quello che sappiamo del Piemonte non ci aiuterebbe a fare delle previsioni su quello che troveremo a Firenze.

Ma perché il matematico considera l'equazione come risolta *anche se l'integrale non lo sappiamo fare?* Semplice. Per lui l'integrale definisce una nuova funzione diversa da quelle elementari. Invece, le derivate di funzioni elementari non definiscono mai funzioni diverse dalle funzioni elementari.

Tuttavia, almeno nell'esempio citato noi possiamo dare una soluzione alternativa, a mio parere per molti versi più illuminante.

Il metodo che propongo, dovrebbe introdurre un soggetto importante della matematica, cioè la risposta alla domanda "Che cosa sono le Serie e a che cosa servono".

Serie

Formalmente, *la Serie, nella sua forma più consueta, si presenta come un polinomio infinito.*

Ad esempio, potremmo scrivere la nostra funzione incognita come la serie:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \ldots$$

La prima domanda che sorge spontanea è se un simile polinomio infinito non dovrebbe avere un valore infinito. La domanda non è stupida (non esistono domande stupide, a meno che uno proprio non lo voglia fare apposta) e la risposta non è immediata: si può vedere nel dialogo di Achille e della Tartaruga, in questo sito,   che la serie che abbiamo chiamato geometrica, in cui tutte le a_i valgono 1, ha effettivamente un valore infinito se x è maggiore od uguale a 1.

Nel nostro esempio manteniamo la x come variabile, e non ci preoccupiamo per il momento di questi problemi, detti "di convergenza", cioè se la somma della serie abbia un valore finito (nel qual caso diremmo che *converge* a quel valore) o infinito, nel qual caso diremmo che *diverge*.

I criteri di convergenza sembrano essere una delle parti più noiose della matematica. Nondimeno, qualcuno può aver la testa fatta proprio per questi problemi, nel qual caso metà del primo volume di un corso di Analisi lo diletterebbe più di un romanzo di Wodehouse o Jerome.

Scriviamo ora la derivata prima di y:

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3\, a_3 x^2 + 4 a_4 x^3$$

Ora, riscriviamo la nostra **equazione** di partenza eguagliando y' a y:

$$a_1 + 2a_2x + 3\,a_3x^2 + 4a_4x^3 \ldots = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

Qui dobbiamo fare due osservazioni e compiere due acrobazie. La prima osservazione è che non abbiamo nessuna informazione su a_0, poiché esso compare solo al secondo membro. Ma non è strano. Qui dobbiamo ricordare che un'equazione del primo ordine prevede una costante arbitraria. La nostra a_0 è proprio quella costante arbitraria, a cui qui, per semplicità, daremo il valore $a_0 = 1$ - ma non è essenziale: se si confrontano i conti, si vede che più sopra le abbiamo dato il valore generico C. (Suggerirei di provare a battezzare a_0 = C in quanto segue e vedere quel che succede).

In secondo luogo occorre accettare che se i due membri devono essere eguali, occorre che siano eguali i coefficienti delle potenze corrispondenti di x. Se così non fosse, per mantenere l'eguaglianza tra i due membri dovremmo variare i coefficienti a seconda del valore di x, e non avremmo più una serie, ma un mostro.

Se accettiamo questi due fatti abbiamo una soluzione "in serie", identificando progressivamente i coefficienti del membro di sinistra con quelli di destra.

Avremmo:

$$a_0 = 1 \ \ (costante\ arbitraria)$$

$$a_1 = a_0 = 1$$

$$2a_2 = a_1 = 1, \text{ da cui } a_2 = \frac{1}{2}$$

$$3a_3 = a_2 = \frac{1}{2}, \text{ da cui } a_3 = \frac{1}{6}$$

Il risultato è che ora abbiamo la soluzione "in serie"

$$y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 +$$

A questo punto uno potrebbe dire: "Guarda guarda, ma questa è la serie esponenziale!". Però qualcun altro potrebbe dire:"non ci abbiamo guadagnato nulla, prima dovevamo guardare nel 'vocabolario delle derivate', e adesso dobbiamo guardare nel 'vocabolario delle serie' ". Come vedremo, non siamo proprio allo stesso punto.

Per evitare questa critica possiamo però far vedere che la nostra serie soddisfa l'equazione funzionale che caratterizza la funzione esponenziale, in altre parole sfruttando il fatto che in tutta la matematica esiste una sola funzione F(x) per cui

$$F(x)F(z) = F(x+z) \;\; ed \;\; F(0) = 1$$

La seconda parte è ovvia per la nostra y, perché mettendo x = 0 tutti termini muoiono, tranne il primo che è 1.

Per quanto riguarda la prima parte, F(x) sarà allora la nostra y(x), mentre la F(z) sarà la stessa y ma scritta sostituendo la z alla x.

Abbiamo così:

$$\left(1 + \mathrm{x} + \frac{1}{2}\mathrm{x}^2 + \frac{1}{6}\mathrm{x}^3 + \frac{1}{24}\mathrm{x}^4 + \right)\left(1 + \mathrm{z} + \frac{1}{2}\mathrm{z}^2 + \frac{1}{6}\mathrm{z}^3 + \frac{1}{24}\mathrm{z}^4 + \right) = ?$$

Per scrivere i termini della serie a secondo membro dobbiamo moltiplicare le due serie, *e raccogliere i termini che hanno la stessa potenza complessiva di x e z* (cioè la somma degli esponenti è la stessa).

C'è un solo termine di grado zero, e lo si ottiene moltiplicando il primo termine della prima serie per il primo termine della seconda serie.

Il termine è 1.

Per il grado 1, si deve moltiplicare il secondo temine della prima serie per il primo temine della seconda serie e sommarlo al prodotto del primo termine della prima serie per il secondo termine della seconda:

Il termine vale (x+z).

Per il terzo termine , di grado 2, abbiamo $\frac{1}{2}x^2 + z\,x + \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}\,(x+z)^2$

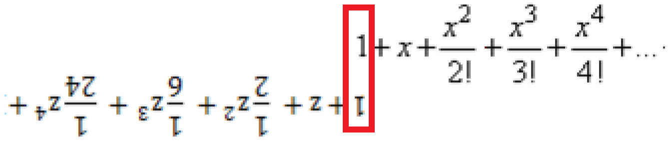
Eccetera

NOTA: per un calcolo rapido dei termini successivi...

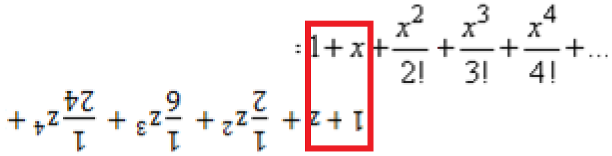
Quando non esistevano calcolatori elettronici ed il calcolo numerico era affidato all'ingegno oltre che alla sveltezza dei calcolatori, si usava, per moltiplicare due serie, scriverle su due striscioline di carta, capovolgerne una (**spero si capisca che una delle due - per esempio la serie**

capovolta - dovrebbe usare la variabile z) e farle scorrere come in figura:

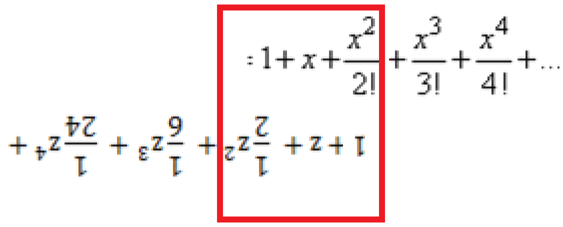
1) Potenze di grado 0



2**)** Potenze di grado 1



3) potenze di grado 2.



Eccetera.

A questo punto si moltiplicano i termini che si trovano “dirimpetto” l’uno all’altro e si sommano.

Vediamo per esempio il termine quadrato. Qui dobbimo sommare i prodotti:

$$\left(1 \cdot \frac{x^2}{2} + x\,z + 1 \cdot \frac{z^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(x^2 + 2xz + z^2) = \frac{1}{2}(x+z)^2$$

Ne risulta che la nostra funzione risultante è

$$y(x)\,y(z) = 1 + (x+z) + \frac{1}{2}(x+z)^2 + \frac{1}{6}(x+z)^3 = y(x+z)$$

Che è la prima parte della relazione funzionale che volevamo dimostrare.

Poiché, come si è detto, la funzione esponenziale è l’unica che gode di questa proprietà, abbiamo dimostrato che *y(x) = exp(x).*

Di nuovo, un ipercritico potrebbe dire che prima dovevamo guardare una tavola di integrali, poi una tavola di serie, ora una tavola di relazioni funzionali. Insomma, dobbiamo sempre cercare qualcosa che sapevamo già e paragonarlo a quel che troviamo. Tanto più che la tavola delle relazioni funzionali è meno nota di quella delle derivate, che possono essere ottenute usando metodi che vanno “a colpo sicuro”.

La soluzione in serie, però, ci permette di calcolare direttamente i valori della soluzione per tutte le x (la cosiddetta “serie esponenziale” converge rapidamente per tutti i valori di x) *senza usare tavole numeriche*. Già, perchè una volta che sappiamo che la soluzione è

$$y = C \ e^x$$

che ce ne facciamo, se non abbiamo le tavole o qualcosa di equivalente?

Supponiamo di vivere in un mondo in cui si conoscano solo i polinomi e le funzioni razionali. In tal caso, per risolvere l’equazione

$$\frac{dy}{dx} = y$$

dovremmo uscire dalla famiglia dei polinomi e delle funzioni razionali ed inventare misteriose funzioni, a cuidaremmo arbitrariamente i nomi di ln(x) o e^x, su cui dovremmo eseguire non immediati studi per capirne il significato, calcolarne il valore, e comprenderne le proprietà.

Col nostro metodo possiamo quanto meno chiamare la nostra serie E(x) e calcolarla punto per punto. Che poi sia eguale ad e^x può importare soltanto se vogliamo sfruttare tutto quel che si sa riguardo alla funzione esponenziale,... che è moltissimo.

Per tutto il secolo XIX, studiando la teoria delle funzioni, ci si accontentò di definire un certo numero di soluzioni in serie di equazioni differenziali come “funzioni speciali” (che sovente presero il nome di chi le studiò per primo), ignorando tranquillamente il fatto che questa funzione originariamente non era data “in termini finiti”, ma come soluzione in serie. C’è tutta una letteratura sul soggetto, e tutto uno zoo di funzioni il cui punto di partenza era regolarmente la soluzione in serie di un’equazione differenziale.

Excursus per il “ciclista” veramente curioso

In verità, la maggior parte delle funzioni meno complicate (si fa per dire) risulta dalla soluzione di *due sole equazioni differenziali del secondo ordine*, debitamente esplorate tra la fine del Settecento e la prima metà dell'Ottocento, la cosiddetta "equazione ipergeometrica" e l'equazione "ipergeometrica confluente", che hanno come soluzioni, rispettivamente, la serie ipergeometrica (che, come si vedrà, ha dato il nome all'equazione, non viceversa) e la serie ipergeometrica confluente.

Il lettore curioso, potrà vedere (roba da terzo corso di Analisi Matematica) che, in formule:

a) Equazione ipergeometrica:

$$z(1-z)w'' + [c-(a+b+1)z]\ w' - a\,b\,w = 0$$

La cui soluzione è scritta come serie, la serie, appunto, ipergeometrica:

$$F\ (a,b;c;z) = 1 + \frac{a\,b}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{x^3}{3!} +$$

Ponendo a = b = c = 1, il lettore troverà la cara vecchia serie geometrica, e capirà il perché del nome dell'equazione. Anche il logaritmo, l'arcoseno ed altre funzioni meno note alle masse fanno parte di questa famiglia, assegnando altri valori ad a, b, c.

Il lettore di belle speranze (matematiche) può cercare di identificare i parametri a,b,c validi per il logaritmo o l'arcoseno.

b) Equazione ipergeometrica confluente

$$z\,w'' + (b-z)w' - aw = 0$$

La cui soluzione è scritta come:

$$M(a,b;\ z) = 1 + \frac{a}{b}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}\frac{z^3}{3!} +$$

Qui, ponendo a =b=1, troviamo la serie esponenziale. Un'altra ventina di funzioni, per lo più meno note di quelle risultanti dall'equazione ipergeometrica, può essere scritta in termini di questa serie.

Inutile dire che questo non lo si può fare sempre, diciamo "nell'intorno di qualsiasi punto x_0 ", e occorrre qualche mezzo per capire se la soluzione sia possibile nelle vicinanze di un dato punto.. Esiste a questo scopo un'intera teoria che distingue tra punti ***ordinari,*** punti ***singolari regolari*** (ahi ahi, da questo stupido nome troppo simile al primo, quante confusioni, per esempio nella mia testa!) e ***singolari non regolari***. I punti singolari regolari sono anche detti fuchsiani, dal nome di Lazarus Fuchs, matematico tedesco (qualcuno l'ha già sentito nominare? E allora che cosa cavolo sta a fare qui, a leggere queste banalità?)

Ma il campo delle soluzioni in serie, ingombranti e meno eleganti delle soluzioni in termini finiti, resta limitato anche introducendo le due equazioni citate, in quanto il numero di funzioni che ne risulta definito è abbastanza ridotto. Fortunatamente, il metodo è applicabile anche ad altre equazioni. Diciamola brevemente: senza soluzioni in serie la maggior parte delle equazioni differenziali resterebbe insolubile, e la maggior parte delle moderne applicazioni della scienza e dell'ingegneria sarebbe stata impossibile. Sfortunatamente, ad esempio per risolvere le equazioni del moto dei fluidi, le soluzioni in serie finora richiedono calcoli lunghissimi con un grande computer anche solo per calcolare poche frazioni di secondo del moto di un dato fluido, a meno di introdurre semplificazioni e rassegnazione. Non per nulla, la soluzione delle equazioni che regolano il moto dei fluidi (le equazioni di ***Navier-Stokes***) è uno dei problemi scelti dall'Istituto Clay, la cui soluzione caratterizzerebbe (uhm!) il prossimo millennio.

II

La più semplice equazione del secondo ordine

Se l'estrazione della soluzione dell'equazione di primo ordine pare richiedere un'operazione che è per così dire giustificata dal risultato, occorre notare che con questo metodo la soluzione della più banale delle equazioni del secondo ordine è in linea di principio impossibile. Non ci sono dizionari del genere di quello "derivate-integrali" che ci aiutino. Mi correggo: esistono prontuari che, data un'equazione differenziale, ci offrono la soluzione. Ma un problema non piccolo è che non esistono forme standard per scrivere le equazioni differenziali, ed equazioni alquanto diverse possono esser riconducibili alla stessa forma, dato o tolto qualche fattore.

L'equazione "più banale" è quella dell'oscillatore armonico, che può essere scritta nella forma più semplice come:

$$y'' = -y$$

Questa equazione viene incontrata assai presto in meccanica elementare, come l'equazione di un peso fissato ad una molla. In tutti i libri di testo che ho consultato, semplicemente, si suggerisce di sostituire *sen(x)* o *cos(x)* nell'equazione e verificare che l'equazione è soddisfatta. E non sto parlando di libri scritti da gente superficiale: il mio libro di Analisi I, scritto da uno dei più illustri matematici italiani allora (tanto tempo fa) viventi, usava questo metodo. Nondimeno, questa trattazione è esemplarmente insoddisfacente. Come venne in mente a chi diede la soluzione per primo, che questa è effettivamente la soluzione? Probabilmente guardando il moto di un sistema fisico come quello indicato. Ma i matematici non sono tenuti a fare affidamento su esperimenti fisici.

Ora si dà il caso che questa equazione sia talmente semplice, che si può pensare di risolverla placidamente riducendola ad un'equazione del primo ordine. Uno studente di matematica non sprovveduto noterebbe che nell'equazione non compare la variabile indipendente, che qui – per stare sulle generali - è x, ma sovente è il tempo. Ciò discende dal fatto che le equazioni della meccanica elementare derivano dalla seconda legge di Newton, che chiama in campo l'accelerazione, cioè la derivata seconda dello spazio rispetto al tempo.

In questo caso, si pone:

$$\frac{dy}{dx} = z$$

E si considera z funzione di y.

Di conseguenza facciamo sparire la x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$$

Sostituendo nell'equazione originale, abbiamo ora l'equazione

$$z\,dz = -y\,dy$$

Da cui

$$z^2 = -y^2 + C$$

Di qui in avanti possiamo seguire le regole, e fare qualche acrobazia, oppure, visto che non cerchiamo una soluzione, ma l'idea di una soluzione, metterci nel caso particolare in cui z (0) = 0, e quindi C = 0, per cui estraendo le radici troviamo quel che vogliamo:

$$z = \pm iy$$

Cioè

$$\frac{dy}{dx} = \pm iy$$

Questa equazione ci riporta al caso del primo ordine, trattato in I., con soluzioni esponenziali, ma questa volta immaginarie, del genere $y = Ce^{\pm ix}$, cioè seni e coseni, l'idea che cercavamo. Può darsi che l'eventuale lettore non conosca ancora "la formula più bella della matematica", che collega gli esponenziali immaginari a seni e coseni. Non è grave, procederò comunque in altro modo. Ma prima o poi quella formula la tratterò.

Più interessante, qui e a parer mio, è tornare alla più generale soluzione per serie.

Qui possiamo porre:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \dots$$

Calcolando la derivata seconda termine a termine, abbiamo:

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3$$

In altre parole, l'equazione sarà:

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 = -(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \dots)$$

Identificando i coefficienti di sinistra con quelli di destra per eguali potenze di x, vediamo che non possiamo ricostruire né a_0 né a_1. Non è strano: è la stessa storia dell'equazione che abbiamo già visto. Sono le nostre *due* costanti arbitrarie, due perché l'equazione è del secondo ordine.

Possiamo quindi porre, ad esempio, se vogliamo investigare i casi più semplici, $a_0 = 1$ e a_1.= 0, oppure $a_0 = 0$ e a_1.=1.
(Si vede subito che ponendo $a_0 = 0$ e a_1.= 0, la nostra soluzione diviene identicamente nulla, soluzione sempre valida, ma per questo poco interessante).

Vediamo solo il primo caso, lasciando il secondo per esercizio.

Questo caso, che chiameremo C(x), ha dunque $a_0 = 1$ e a_1.= 0:
$2\, a_2 = -a_0 = -1$, da cui $a_2 = -\frac{1}{2}$
$6\, a_3 = -a_1 = 0$, da cui $a_3 = 0$

$12\ a_4 = -a_2 = \frac{1}{2}$ (vedi due righe sopra) da cui $a_4 = \frac{1}{24}$
In altre parole, la nostra soluzione (I) incomincia con i termini:

$$\boldsymbol{C(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots}$$

Che non è altro che cos(x).

Come lo si prova? Abbastanza facilmente:
si ponga
$y = \cos(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ ...
Per identificare i coefficienti, facciamo, come sopra, la derivata prima
$y' = -\sin(x) = a_1 + 2a_2x + 3\ a_3x^2 + 4a_4x^3$
Poi poniamo x =0, che comporta x = 0 e tutti i termini della serie pure eguali a 0 eccetto il primo. Ma siccome sin(x) = 0, anche $a_1 = 0$.
Passiamo alla derivata seconda:

$$y'' = -\cos(x) = 2a_2 + 6\ a_3x + 12a_4x^2$$

Poniamo x =0, ricordiamo che cos(0) =1 e troviamo che a_2 = -1/2-
Derivando ancora e procedendo allo stesso modo troviamo che a_3 = 0, e che a_4 = varrà 1/24. In altre parole:

$$\boldsymbol{\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots}$$

Che non è altro che la nostra vecchia C(x). Ma siamo allo stesso punto di prima: come ci è venuto in mente di paragonare C(x) e cos(x)? E la risposta è la stessa: l'identificazione delle due funzioni dà un nome alla soluzione. Se vogliamo calcolare la nostra soluzione punto per punto, la nostra soluzione in serie ce lo permette, e a meno che non vogliamo fare dei funambolismi (del resto divertenti) con questa funzione, non ci serve altro. Se disegniamo il diagramma della funzione, possiamo notarne la somiglianza con cos(x). D'altra parte, una volta calcolata la funzione che si ottiene ponendo $a_0 = 0$ e a_1= 1, che chiameremo S(x), ci si può sbizzarrire a ritrovare le varie relazioni fra seni e coseni (le formule di addizione, duplicazione etc.) usando gli sviluppi in serie, con un po' di inventiva e di pazienza, due doti che in matematica non guastano.