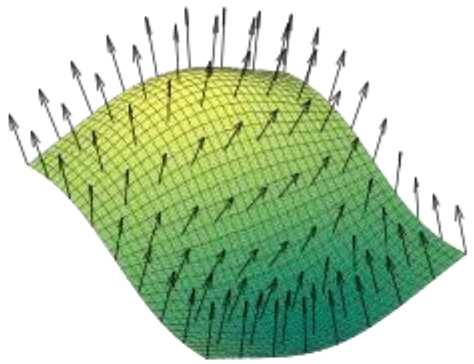
Ma che cosa è questo gradiente?

(Doloroso sassolino)

1. edizione.



Un campo vettoriale di normali ad una superficie
(da Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_(geometry)

1. Un doloroso sassolino in una scarpa è costituito dalla considerazione che io ho sovente usato in tutta allegria e senza una chiara comprensione la banale formula che le componenti *cartesiane* della normale ad una superficie definita implicitamente come

$$w(x, y, z) = c$$

sono date, per ogni punto P (in cui le derivate necessarie esistano) da:

$$n_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \; n_y = \frac{\partial w}{\partial y}, n_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

o, in altre parole,

$$\boldsymbol{n}_P = grad\, w$$

o, se vogliamo, il gradiente della funzione implicita w(x,y,z)=c in un punto P della superficie è normale alla superficie in P.

E’ notevole il numero di volte che questa relazione viene usata, non solo in geometria differenziale, ma anche in alcune profonde considerazioni di meccanica analitica.

Confesso che sono sempre rimasto stupito dal numero di studenti che usano questa formula senza saperla dimostrare in alcun modo.   E, se si guardano i blog in rete, si vede quanti in vari Paesi chiedono chiarimenti, e quali complesse spiegazioni ne ottengono.

2. La dimostrazione viene facilitata se si ha qualche modestissima conoscenza di calcolo vettoriale.

Intanto si consideri: quando passiamo dalla derivata di una funzione in una variabile,

$$y = f(x)$$

al suo differenziale, troviamo:

$$dy = f'(x)dx$$

Che è quasi una definizione. Ma se la nostra funzione è di due variabili troviamo novità, cioè per

$$z = f(x, y)$$

il differenziale “totale” è:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Quanto segue dipende da quanto sia intuitiva per chi legge la formula appena data, perché ben di rado se ne trova una dimostrazione soddisfacente, ciò che non vuol dire rigorosa. I miei sassolini nella scarpa vengono da una specie di legge che mi sono fatto in passato e che consiglio senz’altro a chi proceda in studi di carattere matematico: *se si usa una formula, occorre o conoscerne la dimostrazione, o almeno averne un’intuizione grossolana, ma personalmente soddisfacente*.

3. La derivazione può essere data in forma corretta e lunghetta (https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_differenziale_totale) basandosi sul teorema di Lagrange, valido per funzioni di una variabile, secondo il quale

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

In cui f(x) si suppone sia continua insieme alle derivate necessarie.

Il teorema di Lagrange è quasi intuitivo se si osserva , data la curva azzurra AB,

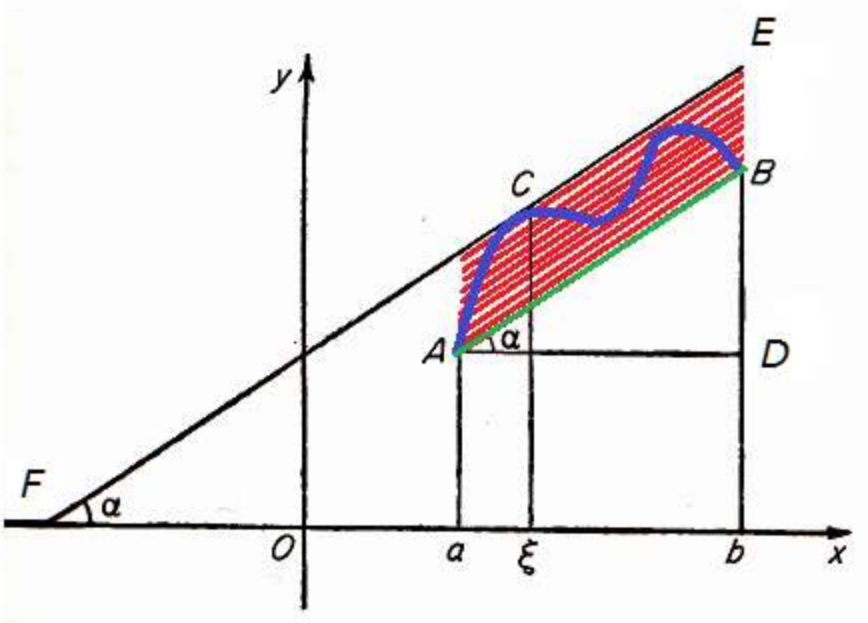


Fig.1

$$tg\ \alpha = BD/DA = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ma, se facciamo scorrere verso l'alto, parallelo a se stesso, l'intero triangolo ABD, ad un certo punto troviamo l'ultima parallela ad AB, cioè FE, che incontra il tratto di curva (beninteso una curva che si comporta bene). Data la continuità della curva f(x), in questo ultimo incontro il tratto FE non potrà essere altro che tangente alla curva stessa, e quindi eguale alla derivata prima di f(x) in quel punto x, a cui daremo, a titolo d'esempio, il nome ξ. Naturalmente, avremo escluso gli estremi *a* e *b* , dove la parallela ad AB potrebbe benissimo incontrare per l'ultima volta una opportuna f(x), pur senza esservi tangente, come un semplice diagramma (lasciato al volonteroso lettore) può confermare. La derivata prima $f'(\xi)$ sarà, come sappiamo, l'angolo che la tangente geometrica FE fa con l'asse delle ascisse, e, siccome abbiamo spostato ABD parallelamente a se stesso per ottenere FE, non potrà aversi altro che

$$f'(\xi) = tg\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

D'onde, cambiando ragionevolmente la notazione, segue il teorema.

Quando si passa al limite si trova la formula già vista in una dimensione

$$dy = f'(x)dx$$

Ma per due variabili non possiamo passare subito al limite, senza perdere il senso di quello che succede.

4. Usiamo due variabili, e teniamo costante prima la y = y_0, poi la x =x. Ne emergeranno per definizione le due derivate parziali applicando due volte il teorema di Lagrange,

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)(x - x_0)$$

$$f(x, y) - f(x, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)(y - y_0).$$

Sommando membro a membro e notando che i due termini rossi se ne vanno, abbiamo

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)(y - y_0)$$

ove, per la continuità delle funzioni e delle derivate, tanto η quanto ξ sono compresi l'uno fra y e y_0 , l'altro fra x e x_0.   Qui proporrei di passare al limite senza tanti complimenti (e del tutto senza rigore), scrivendo appunto dapprima

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)\Delta y$$

E ottenendo subito dopo

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

Infatti tanto η quanto ξ sono ora non tanto *compresi* quanto *compressi* l'uno all'interno di *dy* , l'altro all'interno di *dx*, per cui le due derivate parziali possono essere calcolate nel punto (x_0 , y_0), seguendo la tacita assunzione che si fa in casi come questo, che $\frac{\partial f}{\partial x}$ sia in pratica costante lungo il trattino infinitesimo *dx*. Scrivendo due righe in più, la dimostrazione può essere resa rigorosa, ma a me personalmente basta così.

5. Inutile dire che se ci è noto un po' di formalismo vettoriale in due dimensioni, riconosciamo subito un prodotto interno di due vettori in due dimensioni:

$$grad\ f = n_x\boldsymbol{i} + n_y\boldsymbol{j} = \frac{\partial f}{\partial x}\ \boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \boldsymbol{j} \quad \text{e} \quad d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,dx + \boldsymbol{j}\,dy.$$

In altre parole, la formula per *df*, riletta, produce:

$$df = grad\ f\ \cdot d\boldsymbol{r}$$

In cui *grad f* è detto gradiente di f, ed è il vettore che, moltiplicato scalarmente per lo spostamento ***dr*** ci dà l'incremento *df* della funzione f nel passaggio dal punto ***r*** al punto ***r+dr***. Da quanto sopra, risulta che il gradiente di una funzione f(x,y) è il vettore che ha per componenti sui due assi le derivate parziali della funzione f. Si noti però bene che, nel caso di una funzione di due variabili, anche se z(x,y) è una superficie in tre dimensioni, il gradiente è un vettore a due dimensioni che giace sul piano (x,y).

6. Le due componenti del gradiente, cioè le derivate, ovvero le "pendenze" in direzione degli assi x e y, cioè dei vettori **i** e **j**, sono gli elementi per costruire le "pendenze" in tutte le altre direzioni, naturalmente sul piano. Questo lo si vede introducendo il concetto di derivata direzionale, da cui si otterrà anche il risultato che il gradiente è nella direzione di massima pendenza della superficie, ciò che spiega il nome di "gradiente". Per alcuni testi più sbrigativi, dato un versore **v** (il vecchio nome italiano di un vettore di modulo 1), la proiezione del gradiente sulla direzione del versore, che si ottiene facendo il solito prodotto interno è definita come derivata direzionale. In altre parole, la derivata direzionale della funzione z(x,y) nel punto (x_0, y_0), nella direzione del vettore unitario **v**, per la quale esiste una varietà di notazioni, e che noi chiameremo $D_{\boldsymbol{v}}$ è data da

$$D_{\boldsymbol{v}}f(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial f}{\partial x}v_x + \frac{\partial f}{\partial y}v_y$$

In cui le derivate parziali sono calcolate nel punto (x_0, y_0).

L'incremento infinitesimo della funzione f(x,y) nella direzione v, sarà dato da

$$df_{\boldsymbol{v}} = \nabla f(x,y)\cdot\boldsymbol{v}h = \left(\frac{\partial f}{\partial x}v_x + \frac{\partial f}{\partial y}v_y\right)h$$

In cui h**v** è un incremento infinitesimo nella direzione **v**. Questa definizione è coerente con quella del differenziale totale, che invece sceglie automaticamente il vettore di massima crescita, cioè il gradiente, chiamando $hv_x = dx$ e $hv_y = dy$. La "pendenza", allora, è il fattore di h, dato in parentesi.

Mi riservo di dare in nota una dimostrazione ([1]). La derivata direzionale non è un vettore (il vettore è **v**), ma piuttosto equivale alla componente di un vettore con una sola componente, cioè al suo modulo. Infatti, se per **v** si intende il versore dell'asse y, normalmente chiamato **j**, di componenti (0,1), abbiamo che

$$D_j f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \boldsymbol{j} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Ora, il prodotto scalare di due vettori è dato dal prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso. Quindi, nel nostro caso, visto che il modulo di **v** vale 1, avremo

$$D_v f(x,y) = \|\nabla f(x,y)\| \cos(\theta)$$

In cui θ è l'angolo compreso fra *grad f* e **v**. Ma cosθ vale 1 quando il vettore **v** è parallelo al gradiente, -1 quando è in direzione opposta, e 0 quando è normale. La derivata direzionale è quindi massima quando **v** è nella direzione positiva del gradiente. Questa è la linea di massima pendenza della superficie z (x,y).

7. Ma possiamo spremere ancora un poco il succo della formula che ci dà il differenziale totale.

7.1 Dimentichiamoci l'esistenza della superficie z = f(x,y), e consideriamo solo la formula f(x,y) = c. Questa non è altro che una curva definita implicitamente in due dimensioni. Può essere utile in taluni casi sapere che la tangente a questa curva è in ogni punto perpendicolare al vettore $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, a cui, a questo punto, non ha più senso dare il nome di gradiente, che in genere si riferisce a una superficie (che qui non c'è), e, usato in questo contesto, può addirittura confondere le idee.

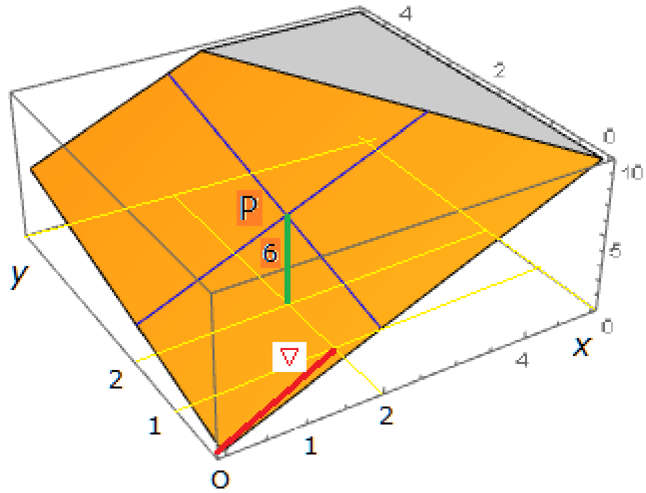
7.2 Supponiamo ora che il trattino d**r** sia da noi scelto lungo una curva sulla superficie f(x,y) per cui f sia costante,

$$f(x,y) = c$$

quella che normalmente si chiama "curva di livello". Intanto, per un punto sulla superficie z(x,y) passa una sola curva di livello: se ne passassero due, corrispondenti a due valori della costante, diciamo c_1 e c_2, che indicano due livelli differenti, a quale livello dovrebbe scegliere di trovarsi il povero punto?

In secondo luogo, *df = 0*, e quindi abbiamo il simpatico teorema che camminando lungo una curva di livello *f(x,y) = c*, il nostro percorso è ad ogni passo perpendicolare al gradiente della superficie *z = f(x,y)*, vettore in due dimensioni sul piano della curva di livello. È quasi buffo: se voi camminate per un tratto tortuoso, ma piano di un sentiero di montagna, ad ogni passo vi muovete perpendicolarmente alla linea di massima pendenza della montagna in quel punto, e quindi tagliate perpendicolarmente tutti i corsi d'acqua, che hanno l'abitudine di scendere lungo le linee di massima pendenza. In tratti pianeggianti, i ponti sono perpendicolari ai torrenti, anche se i costruttori del sentiero o strada non ci pensavano. Ma se avevano deciso di tracciare il tratto in piano, la conseguenza era inevitabile. Strettamente parlando, un vettore non è perpendicolare a una curva: è però perpendicolare a dei segmenti infinitesimi di *tangente* alla curva, i nostri passi, che differiscono dalla curva per infinitesimi di ordine superiore.

8. Il problema è che, pur arrivando fin qui con una dimostrazione algebrica, e quindi dovendo essere relativamente soddisfatto, qualcosa ancora mi sfuggiva. Per me la formula del differenziale totale non era intuitiva, perché a prima vista non vedevo come potessero combinarsi così semplicemente due incrementi in direzioni ortogonali sostanzialmente arbitrarie per darci "l'incremento totale", che è pure, come vedremo, il massimo possibile. Non solo, ma le due componenti del gradiente sono entrambe sul piano (x,y). Combinando per mezzo del prodotto scalare il gradiente, vettore sul piano, con lo spostamento, infinitesimo o no, ma ancora sul piano, noi abbiamo i dati per uscire, per così dire, dal piano producendo il massimo incremento dz della funzione. Per fare un esempio semplice di come funziona il gradiente, si prenda il piano z = 2x+y, rappresentato (solo il quadrante Nord-Est) in figura. In questo caso le componenti del gradiente valgono (2, 1) vicino all'origine (e in tutto il piano), cioè il nostro vettore gradiente (in rosso nella figura) ha una grossa componente x e una piccola componente y, e ci indicherebbe che la funzione varia più rapidamente lungo l'asse x che lungo l'asse y, come del resto indica l'inclinazione del piano (si vedano tanto le tracce del piano sulle facce laterali della "scatola" quanto le due linee coordinate di color blu che si intersecano nel punto P).



Il gradiente (in rosso, sul piano (x,y)) , dunque, punta in una certa direzione che in questo caso non è né l'asse x né l'asse y. E quanto varrebbe dz? Dato che z(x,y) è un piano, possiamo attribuire anche valori finiti a dx e dy, per esempio (2,2), e il prodotto interno ci direbbe che

$$\Delta z = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6.$$

che corrisponde al punto P, di coordinate (2,2,6) sulla linea verde, che è sul piano 2x+y – z = 0. Magicamente, pur avendo tanto il gradiente quanto lo spostamento sul piano (x,y), le componenti del gradiente ci indicano di quanto uscire dal piano e ci danno il valore di z, nella terza dimensione, perché è appunto da z (x, y) che provengono i valori delle componenti del gradiente.

Il fatto è che le due derivate parziali non sono vettori. Sono due numeri, che provengono dalla funzione z(x,y) e che ci indicano di quanto sarà aumentata z al termine dell'intervallo. Ma in fondo è lo stesso col calcolo dell'incremento della funzione di una variabile: da un dx *sull'asse x*, moltiplicando per un numero, che è la derivata (una tangente trigonometrica), si ottiene un incremento *lungo l'asse y*.

9. Mentre passare dalla formula del differenziale totale in una variabile a quello in due variabili era possibile solo a prezzo di un piccolo, ma non per tutti (incluso il sottoscritto) ovvio ragionamento, il passaggio da due a tre dimensioni è invece immediato.

Data una funzione in tre variabili

$$w = w(x, y, z)$$

abbiamo il differenziale totale:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

Visualizzare questa funzione non sembrerebbe semplice ([2]) . Ci occorrerebbe un diagramma in quattro dimensioni, tre per le variabili indipendenti (x,y,z), una per la variabile dipendente (w). Ma un metodo a cui si può ricorrere è quello di disegnare nel nostro spazio a tre dimensioni (x,y,z) gli insiemi per ogni punto dei quali w ha lo stesso valore. Per funzioni continue come quelle con cui trattiamo, ci aspettiamo che questi insiemi siano superficie continue, le superficie di livello, continue come lo erano le curve di livello nel caso precedente. Ma su ciascuna di queste superficie, w(x,y,z) ha per definizione lo stesso valore, e quindi, spostandoci su di esse, Δw sarà = 0. Si noti che è facile cadere nell'errore di pensare che questa superficie rappresenti la funzione: no, si tratta solo di una delle infinite superficie di livello della funzione, le cui proprietà geometriche sono del tutto differenti da quelle della funzione.

Non ci occorre ragionare sull'intera superficie. Noi potremo immaginare un piano tangente associato ad ogni punto di una di queste superficie, che sarà localmente quasi coincidente (cioè coincidente a meno di infinitesimi di ordine superiore) con una piccola porzione della superficie. Per spostamenti infinitesimi *(dx, dy, dz)* sul piano tangente, avremo *dw = 0.*

Ma questo vuol dire che

$$\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz = 0$$

Cioè , usando quel minimo di calcolo vettoriale di cui si parlava, dato uno spostamento *arbitrario* d**r** *sul piano tangente*

$$grad\ w \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

Ma se il prodotto scalare di due vettori è nullo, ciò significa che essi sono perpendicolari, cioè

- il gradiente di w è perpendicolare ad un generico vettore infinitesimo tracciato sul piano tangente (questo giro di parole è necessario, perché non si può dire che un vettore è perpendicolare a un punto),
- cioè il gradiente di w è perpendicolare in P alla superficie w(x,y,z)=costante.

Che è quanto volevamo dimostrare.

Ciò che trovo straordinario in queste due formule del differenziale totale eguagliato a zero, rispettivamente in due e tre dimensioni, applicate l'una a una curva data implicitamente come $z(x,y) = c$ e l'altra ad una superficie, data implicitamente come $w(x,y,z)=c$, è che il resto della funzione , che si sviluppa in una dimensione ulteriore, per noi non esiste, e nondimeno influenza la geometria di una curva o di una superficie.

Se questa lunga spiegazione per dimostrare e rendere plausibile ciò che è ovvio ha confuso più che chiarire le idee, me ne scuso. Ad ogni modo, si cerchi di abituarsi a questa formula tenendo in mente una traccia della dimostrazione, perché ricomparirà in questo sito...almeno, così spero.

NOTA

1) La derivata direzionale.

Il nome del vettore gradiente viene facilmente spiegato mediante il concetto di derivata direzionale, che nel testo precedente è stata introdotta per definizione. Si tratta ora di dare una delle tante dimostrazioni, per dimostrarne la coerenza con la definizione.
Daremo la dimostrazione per una funzione di due variabili, usando di nuovo il teorema di Lagrange ed adattandolo alla nuova situazione.
Come nella derivazione del gradiente, teniamo costante prima la y = y_0, poi la x =x.

Ora i valori $(x-x_0)$ e $(y-y_0)$ saranno sostituiti da hv_x e hv_y, avendo introdotto un intervallo h che faremo tendere a zero, e le due componenti – entrambe infeiori a 1 - del vettore unitario **v**, che indica la direzione in cui vogliamo calcolare la derivata. Useremo quindi:

$$x = x_0 + hv_x \ \text{ e } \ y = y_0 + hv_y$$

Ne emergeranno per definizione le due derivate parziali e, applicando due volte il teorema di Lagrange, fatte le dovute sostituzioni:

$$f(x_0 + hv_x, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)hv_x$$

$$f\left(x_0 + hv_x, y_0 + hv_y\right) - f(x_0 + hv_x, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)hv_y$$

Sommando membro a membro e notando che i due termini rossi se ne vanno, abbiamo

$$f\left(x_0 + hv_x, y_0 + hv_y\right) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)hv_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)hv_y$$

Ove, per la continuità delle funzioni e delle derivate, tanto η quanto ξ sono compresi l'uno fra y e y_0, cioè in hv_y , l'altro fra x e x_0, cioè in hv_x. Qui proporrei di passare al limite senza tanti complimenti (e del tutto senza rigore), scrivendo appunto dapprima

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)hv_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)hv_y$$

poi, come di consueto, dividendo per h e passando al limite per h (il nostro infinitesimo) -> 0, da cui risulta la formula desiderata:

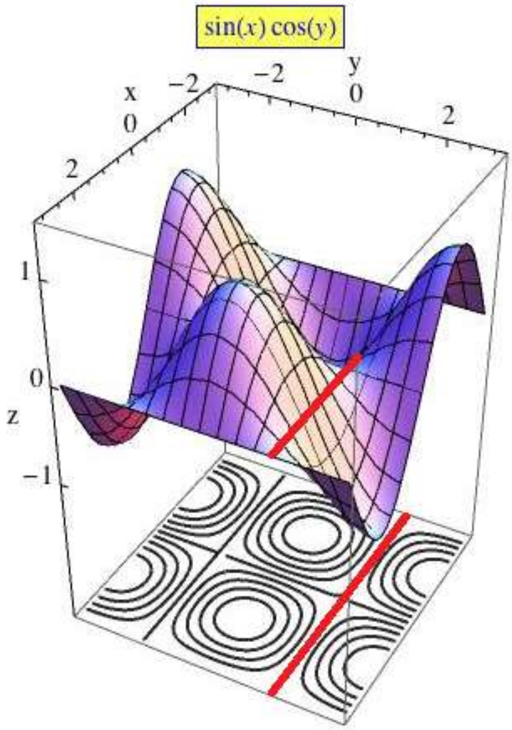
$$D_v f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v_y = \nabla f(x,y) \cdot \boldsymbol{v}$$

Infatti tanto η quanto ξ sono ora non tanto *compresi* quanto *compressi* l'uno all'interno di hv_y, l'altro all'interno di hv_x, per cui le due derivate parziali possono essere calcolate nel punto (x_0 , y_0), seguendo la tacita assunzione che si fa in casi come questo, che $\frac{\partial f}{\partial x}$ sia in pratica costante lungo un trattino infinitesimo. La presenza di v_x e di v_y non perturba il fatto che *h* possa essere un infinitesimo, in quanto entrambi v_x e v_y sono minori di uno.

2) Visualizzazioni di funzioni.

Consideriamo i soliti esseri piatti che vivono sul solito piano e per i quali una terza dimensione non esiste. Ci saranno fra loro dei matematici che esploreranno , se saranno abbastanza evoluti, "tutti" i rami della matematica. Una buona domanda, naturalmente, è se "tutti" i rami della matematica siano loro accessibili. A pensarci bene questa è una domanda interessante, perché vale anche per noi. Se esistessero altre dimensioni oltre alle tre più la dimensione temporale che conosciamo, ci sarebbero parti della matematica a noi precluse? La domanda è interessante perché, se così fosse, di nuovo potremmo avere forti dubbi che la matematica sia una creazione del nostro cervello. Ad ogni modo, per quanto io sia comunque un sostenitore della concezione platonica dei numeri, cioè che i numeri esistano indipendentemente da noi, anche se la loro esistenza assumerebbe forme diverse dalla nostra, penso che questi esseri bidimensionali, indubitabilmente con qualche sforzo in più, avrebbero tuttavia accesso a tutta la matematica quale noi la conosciamo.

Per esempio avrebbero problemi a concepire funzioni e superficie in tre dimensioni. Tuttavia se ne potrebbero fare un'idea col metodo delle curve di livello. Il noto programma Mathematica offre il seguente esempio:



https://web.northeastern.edu/seigen/MTH1252LevelCurves.html

Quello che forse colpisce in questo esempio è che da un esame delle curve di livello, l'unico consentito ai nostri esseri bidimensionali, risulta subito che tra le curve di livello esistono linee rette, che nel diagramma in 3D non sono visibili a prima vista (si vedano il tratto rosso sulla superficie 3D e la sua immagine sul piano).

La figura sottostante permette di vedere che i bidimensionali possono giungere alla conoscenza di una perpendicolarità tra le curve di livello (o meglio, punto per punto, tra certi segmenti rossi della tangente lungo curva di livello che passa per quel punto) e certi vettori gialli che rappresentano il gradiente, in Fig.1, stando rigorosamente sul piano. All'estremo libero del vettore gradiente potranno assegnare un valore che dirà loro di quanto è aumentata in corrispondenza di quel punto la terza dimensione dell'oggetto, che essi non percepiscono. Con pazienza potranno, con lavoro lungo e complicato, ricostruire l'intera superficie di Fig.2. Ma non si faccia l'errore di credere che il vettore verde in Fig. 2 sia il gradiente. Il gradiente (arancione) è nel piano al livello 3, e sta bene dov'è.

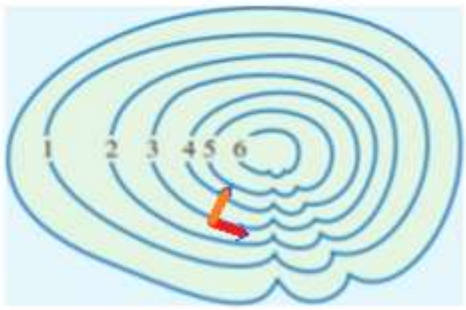


Fig.1

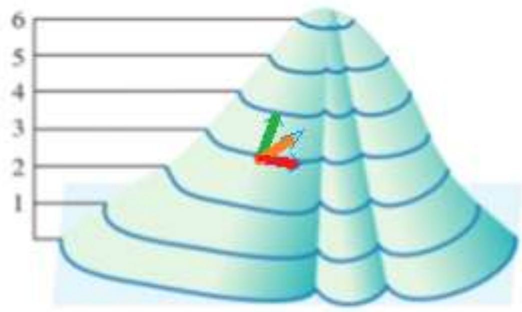
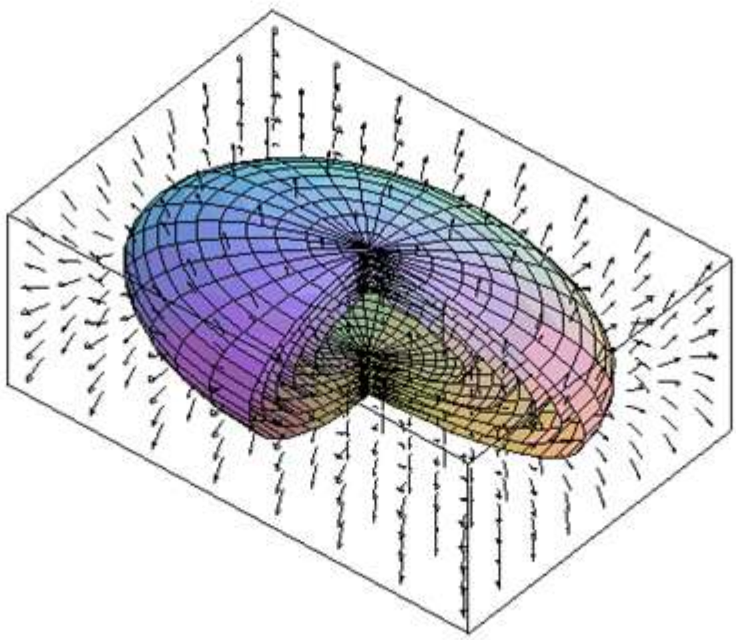


Fig.2

Noialtri, che guardiamo con commiserazione i poveri bidimensionali costretti a lavorare su curve di livello, e incapaci di concepire la forma “vera” a pan di zucchero della funzione, quando consideriamo una funzione w(x,y,z) siamo anche noi costretti a lavorare su “superficie di livello”, che solo se non riflettiamo, possiamo immaginare che rappresentino completamente la funzione.



Ad esempio, si noti il garbuglio risultante dalla funzione riportata in https://www.mtholyoke.edu/courses/tdray/math203/announce.html

e attribuita a Gregg Quenell, senza dare ulteriori indicazioni sulla forma della funzione. Si vedono comunque anche qui diverse “superficie di livello” con le normali nei vari punti, che, come si spiega nel testo, sono i vettori gradiente.

Ripeto, questa collezione di superficie di livello sta alla forma della funzione $w(x,y,z)$ come le curve di livello stanno alla forma della funzione $f(x,y)$, mentre l'aspetto della $z = f(x,y)$ in tre dimensioni non ha corrispondente per la funzione $w(x,y,z)$: ci manca una dimensione per disegnarla.