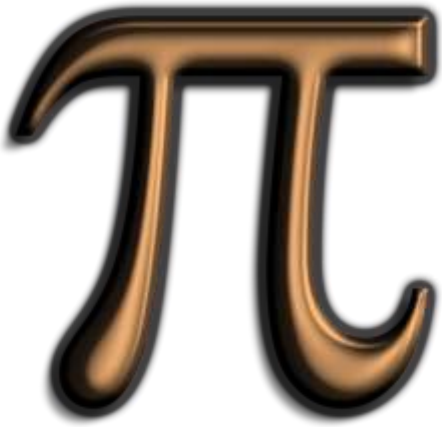
UNA FRAZIONE CONTINUA
PER IL CALCOLO DI PIGRECO

APPENDICE AL SASSOLINO “IL CALCOLO DI PIGRECO”
SECONDA EDIZIONE



https://pixabay.com/it/pi-matematica-simbolo-formula-254088/

UN mio amico mi ha fatto notare, anche se non lo ha detto propriamente in questo modo, che tra i vari metodi che ho indicato per il calcolo di pigreco, non ho elencato il metodo delle frazioni continue. E’ vero, ma in effetti non ne ho indicati molti altri, ed avevo appunto detto, alla fine del mio breve saggio, “E sia ben chiaro che esistono altri metodi, la cui origine è un po’ più complicata. Ripeto, calcolare pigreco è un’arte, o almeno...un gioco”.

Ora, di frazioni continue che producono Pigreco ce ne sono parecchie: La prima risale a *Lord Brouncker*, in seguito ad una conversazione con *Wallis*. Egli diede l’affascinante risultato

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \dots}}}}$$

senza minimamente indicare come lo avesse trovato, e sul quale si arrabattò *Wallis* per dimostrarlo, suscitando il commento di Euler, che *“Wallisius”* si sforzò di dare una dimostrazione *“quae penitus* *ab auctori modo diversa esse videtur"*, (EULER'S INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM VOL. 1 Capitolo 18). Ometto l'ennesima esortazione: "***Leggete i classici!",*** tanto più valida in questo caso perché Euler, normalmente molto parco di suggerimenti, in questo capitolo 18, facilmente reperibile in rete nell'originale latino, in tedesco e in inglese e probabilmente molte altre lingue, dà invece un trattato sulle frazioni continue, che, opportunamente adattato, potrebbe essere parte di un libro di testo per il primo anno di Analisi Matematica, massimo secondo.

Se si cerca su Internet, come il solito si vedono molti curiosi o studenti di matematica che chiedono come si dimostri questa bella formula, ricevendo costantemente la risposta che essa discende dal *teorema di Eulero sulle frazioni continue,*

$$a_0 + a_0a_1 + a_0a_1a_2 + \cdots + a_0a_1a_2\cdots a_n$$
$$= \cfrac{a_0}{1 - \cfrac{a_1}{1 + a_1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2 - \cfrac{\ddots}{\ddots \cfrac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1} - \cfrac{a_n}{1 + a_n}}}}}}$$

con la vagamente ironica affermazione che *questo teorema può essere facilmente dimostrato per induzione* e permette facilmente di convertire una serie in una frazione continua e viceversa. Inutile dire che il vero problema di chi pone la domanda è come dimostrare il teorema sopracitato, dimostrazione sulla quale di solito non viene dato il minimo cenno, a parte quanto ho detto. Induzione normalmente vuol dire che si dimostra che se si può derivare il termine *n* dal termine *n-1*, e sappiamo che il primo termine è corretto, allora il teorema è dimostrato. Francamente, penso che qualche parola in più potrebbe essere sprecata su questo soggetto per aiutare chi si pone il problema di che cosa si intenda per i termini *n* e i termini *n+1* tanto nel membro di sinistra quanto nel membro di destra. Per esempio, chi cercherà di scoprire qual è il termine *n* da utilizzare nel primo membro scoprirà che *non* è l'ennesimo termine della serie.

Ora, mentre Euler nella sua opera citata ha la chiara intenzione di costruire una teoria generale delle frazioni continue, in questo saggio mi sono prefisso il ridicolmente modesto scopo di mostrare come la formula di Lord Brouncker possa essere ricondotta alla serie di Leibniz-Gregory. Null'altro. Chi vuole la teoria più generale non ha altro da fare che leggere il testo di Euler, o altri più moderni, quasi tutti più brevi, non tutti più immediati.

Per comodità scrivo quindi una generica frazione continua come:

$$z = a + \cfrac{A}{b + \cfrac{B}{c + \cfrac{C}{d + \cfrac{D}{e \ldots}}}}$$

Arrestando la frazione al primo addendo (la “minuscola”) dell’ennesimo denominatore, possiamo ricostruire una successione di frazioni dette “*convergenti*”, che hanno non evidenti ma interessanti relazioni tra l’una e l’altra. *I convergenti non sono, sia chiaro, i termini di una serie*, ma ogni convergente è da solo una migliore approssimazione del numero che la frazione continua, finita o no, rappresenta.

I convergenti possono essere tranquillamente calcolati a mano, armandosi di carta, matita, e molta pazienza, ma non richiedono nessuno speciale trucco.

C’è un convergente, C_0, di ordine 0, dato da 1/0. Questo è convenzionale, introdotto da Euler per remder chiare alcune regolarità.

Il primo convergente, C_1, che ci interessa è a stesso. Ricordo che ci dobbiamo sempre fermare ad una minuscola, perché si suppone che quanto la segue sia una quantità di ordine inferiore.

C_2 è dato da $a + A/b = \frac{A+ab}{b}$

C_3 è dato da $a + A/(b + B/c) = \frac{aB+Ac+abc}{B+bc}$

C_4 è dato da: $a + A/(b + B/(c + C/d))= \frac{AC+abC+aBd+Acd+abcd}{bC+Bd+bcd}$

C_5 è dato da: $a + A/(b + B/(c + C/(d + D/e))) = \frac{aBD+AcD+abcD+ACe+abCe+aBde+Acde+abcde}{BD+bcD+bCe+Bde+bcde}$

Non si trova nulla di particolare a continuare. Va detto però che a questo punto sembra che Euler si sia dilettato a far vedere che non è necessario fare tutte le – ammettiamolo - tediose operazioni, ma esiste una relativamente semplice legge di generazione dei convergenti. Se la trovate da soli siete bravi: avverto solo che essa permette di costruire il numeratore ed il denominatore del convergente *n* utilizzando tanto il convergente *n-1* quanto il convergente *n-2*. Uno dei due non basta. Darò in appendice la soluzione o “ricetta” di Euler.

Si può anche dimostrare che, chiamato z il valore della frazione continua, i vari convergenti sono alternativamente maggiori e minori di z. Dato che convergono (non a caso si chiamano convergenti) tali differenze saranno sempre più piccole. Euler verifica l’assunto per i primi quattro termini, nei quali, chiamando in genere R_i un resto positivo includendo il quale si ottiene il valore z, volta a volta non incluso nel calcolo, abbiamo rispettivamente:
$C_0 =$ 1/0, certamente maggiore di z;
C_1 = a, certamente inferiore a z = a + R_0
C_2 = a+ A/b, certamente maggiore di z = a+ A/(b+R_1)
$C_3 = a + A/(b + B/c)$, minore di z = $a + A/(b + B/(c + R_2))$.
(In rosso abbiamo segnato i termini che “fanno la differenza”)

E qui arriva la zampata del leone.
In generale, omessa l’approssimazione infinita 1/0, abbiamo, chiamando i vari convergenti C_n , la serie “telescopica”

$$z = C_1 + (C_2 - C_1) + (C_3 - C_2) + \ (C_4 - C_3) \ldots$$

La quale, sommata, ci lascia con l'ultimo convergente che trattiamo, che dovrebbe essere più preciso di tutti gli altri. Questo è naturalmente sempre vero, ma ci conforta sapere che i termini sono sempre più piccoli in quanto i convergenti...convergono. L'interesse viene dal fatto che l'ultimo convergente, C_n , è pure la somma dei primi n termini della serie.

Per avere i vari termini si tratta solo di calcolare le differenze dei convergenti come indicato, le quali dovrebbero diventare sempre più piccole. Ma dato che il rigore matematico non abita in questo sito, ci accontenteremo di vedere che applicando la nostra formula, in questo caso, troviamo effettivamente dei termini decrescenti in valore assoluto.
Ci si arma dunque di pazienza e si calcolano le differenze dei convergenti, che ci danno i termini della serie

$$S = \ S_1 + S_2 + S_3 \ldots$$

La prima differenza è a - 0 =a. Sarà il primo termine, S_1 della nostra serie.
Seconda differenza, $S_2 = \frac{A+ab}{b} - a = \frac{A}{b}$
Terza differenza, $S_3 = (a + A/(b + B/c)) - (A + ab)/b = -\frac{AB}{b(B+bc)}$
Quarta differenza, $S_4 = (a + A/(b + B/(c + C/d)) - (a + A/(b + B/c)) = \frac{ABC}{(B+bc)(bC+Bd+bcd)}$
Quinta differenza: $S_5 = \ a + A/(b + B/(c + C/(d + D/e))) - (a + A/(b + B/(c + C/d))) =$
$- \frac{ABCD}{(bC+Bd+bcd)(BD+bcD+bCe+Bde+bcde)}$

Come vediamo, i termini della serie hanno segno alterno.

Ora non resta altro da fare che vedere che succede identificando i termini della frazione continua di *Brouncker* per π/4, come segue:
a= 0, A = 1;
b = 1, B = 1;
c = 2, C = 9;
d = 2, D = 25;
e = 2 etc.

Otteniamo:
$S_1 = 1$
S_2 = – 1/1*3 = -1/3
S_3 = + 9/3*(9+2+4) = 1/5
S_4 = - 9*25/((9+2+4)(25+50+18+4+8))= -9*25/1575= -1/7

La serie diviene:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Cioè la nostra serie di Gregory.

Be’, parliamo dell’emozione dei matematici, sia pure dilettanti! Veder saltar fuori la serie di Gregory in questo modo, da questi numeri strampalati, non nascondo che mi ha dato una certa emozione.
Peccato soltanto che la frazione continua di *Lord Brouncker* e la serie di *Gregory-Leibniz*, come si è visto, convergano alla stessa velocità. Occorrono cinque miliardi di termini della serie di Gregory-Leibniz per avere Pigreco con 10 cifre decimali, da cui possiamo dedurre che occorra il 5-miliardesimo convergente della serie di Lord Brouncker per raggiungere la stessa precisione, una frazione sterminata, anche se elegantissima.

APPENDICE 1.

La ricetta di Euler per produrre i successivi convergenti.

Per la frazione continua indicata

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \dots}}}}$$

i convergenti sono (i primi due sono convenzionali e ricostruiti per così dire all'indietro partendo dal terzo):

1	2	3	4	5
a	b	c	d	e
$\frac{1}{0}$	$\frac{a}{1}$	$\frac{A+ab}{b}$	$\frac{aB+Ac+abc}{B+bc}$	$\frac{AC+abC+aBd+Acd+abcd}{bC+Bd+bcd}$
A	B	C	D	E

Tutti i convergenti si possono calcolare direttamente arrestando la frazione ad una lettera minuscola e lavorando all'indietro. Tuttavia, i termini non possono essere dati a casaccio (nulla in Matematica è dato a casaccio), e una buona domanda è come si passa da una frazione all'altra. Riscriviamo come:

1	2	3	4	5
a	b	c	d	e
$\frac{1}{0}$	$\frac{a}{1}$	$\frac{A+ab}{b}$	$\frac{aB+c\,(A+ab)}{B+bc}$	$\frac{AC+abC+d(aB+Ac+abc)}{bC+d(B+bc)}$
A	B	C	D	E

Si prenda per esempio la terza frazione (in terza colonna) e si voglia ottenere la quarta.

La ricetta data da Euler è:

Numeratore:
1) si prende l'elemento in seconda riga della colonna precedente (terza colonna), *c* e lo si moltiplica per il numeratore della frazione sottostante (A+ ab) ottenendo c(A+ab).
2) si aggiunga il numeratore della penultima frazione (seconda colonna), *a*, moltiplicato per il sottostante elemento in quarta riga che è B. Abbiamo così il numeratore completo: *aB + c (A+ab).*

Denominatore:
3) Si prende il denominatore della precedente (terza) colonna, b, e lo si moltiplica per l'elemento in seconda riga (della stessa terza colonna) che è c.
4) Si somma a questo il denominatore della penultima (seconda) colonna, 1, moltiplicato per l'elemento in quarta riga della stessa colonna, B. Otteniamo così il denominatore $B + bc$.

Si provi con questo sistema, che coinvolge le due colonne precedenti a quella che vogliamo formare, per ottenere la frazione in riga terza della quinta colonna.
In quanto alla sesta frazione, eccola:

$$\frac{D(aB + Ac + abc) + e(AC\ + abC + aBd + Acd + abcd)}{BD + bcD + e(bC + Bd + bcd)}$$

Scoprire questa legge di formazione non è banale. Detto in altre parole, questi grandi matematici del Settecento, non avevano paura di far conti. In più, Eulero era anche un calcolatore prodigio.