EQUAZIONI INFANTILI

Risposta alla domanda (da Quora):

Come spiegheresti il concetto di equazione a un bambino?

Qui parlerò solo delle equazioni algebriche di primo grado a un'incognita, dall'alto della mia esperienza di insegnante di scuola elementare.

Naturalmente la domanda : *"Come spiegheresti il concetto di equazione a un bambino?"* omette un dato importante, cioè l'età. Ai miei tempi l'algebra la si imparava in terza media, cioè a dodici-tredici anni. Immagino che qualche insigne pedagogo avesse calcolato che quella era l'età *media* giusta – *a quei tempi*. Penso che i requisiti per comprendere a un'età inferiore a dodici anni quanto sto per scrivere siano:

1) il bambino deve avere per la matematica un interesse superiore alla media dei compagni. Il meglio sarebbe che fosse lui a chiedere che cos'è un'equazione;

2) il bambino deve conoscere e saper usare il concetto di numeri negativi (e deve saper fare le quattro operazioni a occhi chiusi)

Con queste basi, supponiamo che la mamma dica a Francesco e Giacomo: "A Francesco do sei caramelle e a Giacomo do tre caramelle più una scatolina chiusa in cui ci sono le caramelle rimanenti. State tranquilli, avete lo stesso numero di caramelle. *Quante caramelle ci sono nella scatola chiusa?*". "Avete lo stesso numero di caramelle" significa mettere un segno "=" in mezzo tra le caramelle di Francesco, a sinistra, e quelle di Giacomo, a destra. Il segno eguale ci dice che abbiamo a che fare con un'EQUAZIONE. Il nome viene bene perché può essere applicato a varie situazioni, basta che ci sia **un segno eguale** fra due entità, che *chiameremo il primo membro e il secondo membro, oppure membro di sinistra e membro di destra.*

FRANCESCO **GIACOMO**

Se i due figli, che supporremo gemelli (perché nessuno abbia un vantaggio di età sull'altro), non hanno mai visto equazioni, questo è un modo come un altro di presentarle. Il segno "**eguale**" ci segnala che abbiamo a che fare con un'**equazione**. Il pacchetto ha una X rossa, l'incognita per eccellenza. La domanda *Quante caramelle ci sono nella scatola chiusa?* è invece un PROBLEMA. Il punto interrogativo è rappresentato dalla X.

La mamma potrà insegnare che alle caramelle, vere o disegnate, si può sostituire il numero di quante sono, mentre al pacchetto, vero o disegnato, si può sostituire la X. Possiamo cioè trascrivere la situazione come:

$$\mathbf{6 = 3 + x}$$

La X chiede di essere determinata. Con questo, come vedremo, la notazione è diventata astratta e generalizzata. Va sottolineato che se invece di caramelle avessimo 6 e 3 cioccolatini, o automobiline, o figurine di egual valore, o qualsiasi cosa dello stesso tipo e valore, l'equazione $6 = 3 + x$ resterebbe immutata.
Questa equazione rappresenta il problema.

Quasi subito Giacomo dirà che le caramelle nella scatola, X, devono essere 3. In altre parole avrà trovato che

$$\mathbf{x = 3}$$

il che è un'altra equazione, perché presenta il segno " = ", ma è un'equazione che noi chiameremo "EQUAZIONE SOLUZIONE". La sua caratteristica distintiva è che la x è ora isolata e ci dà (magari con qualche calcolo sul membro di destra, se necessario) il valore cercato.

La **soluzione del problema** sarà l'equazione

x = qualcosa che non contiene più la x, ma solo numeri noti.

(vale anche la forma "qualcosa = x", sempre purché la x sia isolata).

Il problema di questa presentazione è che è troppo semplice. Quando Giacomo e Francesco guardano quello che c'è nella scatola, sanno benissimo che cosa aspettarsi. Se ci sono meno di tre caramelle, Giacomo sa di esser stato ingannato. Uno studioso di algebra direbbe che lui ha già risolto mentalmente l'equazione

$$\mathbf{6 = 3 + x}$$

E come ha fatto? Come abbia ragionato precisamente non credo che nessuno lo possa sapere, ma in qualche modo *per noi* ha semplicemente fatto la sottrazione 5-3. Se dovessi fare una scommessa direi però che Giacomo è andato rapidamente per tentativi: se nella scatola trovo una caramella, allora 3+1 =4, e ne ho due meno di Francesco e così via, e questo senza mai fare esplicitamente alcuna sottrazione.

"No, direbbe lo studioso di algebra. Giacomo ha trasportato 3 al primo membro cambiando segno, perché la **regola n.1 dell'algebra** dice che *una quantità può essere trasportata da un membro all'altro dell'equazione purché le si cambi il segno*". Sarà così che si fa, ma a me pare meglio dire che, dato che le due quantità, di destra e di sinistra, sono eguali (così ci dice il segno "="), esse restano eguali aggiungendo e togliendo una **stessa** grandezza (nota o ignota) qualsiasi da entrambe le parti. Questa è una regola logica e concreta, che vale la pena comprendere. Per esempio togliamo 3 a destra, e ci resta solo la scatolina. E a sinistra?

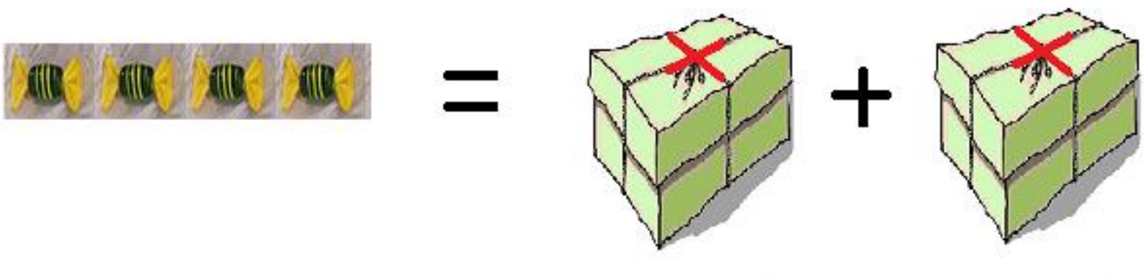
$$5 - 3 = x$$

E' vero: magicamente il 3 è passato da destra a sinistra cambiando di segno (questa operazione è proprio quella che gli arabi chiamarono al-jabr, da cui la nostra algebra), ma oltre al nome noi sappiamo anche il perché di questa magia.

Se la mamma dirà a Giacomo: "Ti ho assegnato un problema (per esempio dando 6 caramelle a Francesco e 3 più pacchetto chiuso a te), trasforma il problema in un'equazione e risolvilo", il povero Giacomo risolverà subito il problema nella sua mente a modo suo, e la maggior parte del tempo la passerà a cercare di scrivere l'equazione-problema in modo di ottenere l'equazione-soluzione, che già conosce, per far contenta sua madre.

La madre, implacabile, poi potrà assegnare il problema seguente:

Darà quattro caramelle a Francesco e due scatoline eguali a Giacomo, dicendogli che ogni scatola ha un egual numero di caramelle e lui ha tante caramelle quante ne ha Francesco. Anche qui, Giacomo scopre subito che deve aspettarsi due caramelle per scatola.



Anche qui Giacomo, prima ancora di scriverla, avrà risolto l'equazione

$$4 = 2x$$

e saprà che

$$x = 2$$

che è l'equazione soluzione.

E come avrà fatto a risolverla? Secondo me sarà di nuovo andato per tentativi (prima provando con una caramella per scatola, poi con due); secondo *noi* ha diviso per due le caramelle di Francesco, ha ottenuto 2, che dovrebbe essere il contenuto di ogni scatola.

"No, direbbe lo studioso di algebra. Giacomo ha diviso ambo i membri per due, perché **la regola n.2 dell'algebra** dice che *entrambi i membri possono essere moltiplicati o divisi per lo stesso numero".* Di nuovo, sarà così che si fa, ma a me pare meglio dire che dato che i due membri, di destra e di sinistra sono eguali (così ci dice il segno "="), esse restano eguali dividendo entrambe le parti per uno stesso numero.
Di nuovo, il maggior sforzo di Giacomo sarà trasformare il problema in un'equazione che dia il risultato che lui conosce già. In cuor suo, assai probabilmente penserà che i matematici siano degli idioti.

Bisognerà allora informarlo che le due strane regole che ha appreso valgono per una quantità di problemi, anche non così immediati come quelli appena mostrati.

In generale, questa è una straordinaria proprietà della matematica. Problemi diversi hanno la stessa struttura matematica. Non occorre imparare mille metodi, uno che si applica a caramelle, uno che si applica a automobiline, uno che si applica a mele…e uno che si applica ai cammelli, date scatole di appropriata grandezza.

Ma esistono due domande più importanti:

1) Perché una sottrazione risolve la prima equazione? Perché una divisione risolve la seconda equazione? Io non ricordo che cosa passasse per la mia mente quando imparavo queste cose. Era una deduzione istintiva? Era il risultato di molti esercizi? Ma un fatto è certo, che invece del metodo usato probabilmente dal bambino procedendo per tentativi, la sottrazione ci aiuta a risolvere in breve tempo anche il caso in cui la mamma abbia dato 326 caramelle a Francesco e 181 più un "x-pacchetto" a Giacomo. Qui procedere per tentativi significa perdita di tempo e possibilità di confusione. Lo stesso per il caso in cui la mamma abbia dato 1024 caramelle a Francesco e 32 sacchetti eguali a Giacomo. Penso che dopo qualche esercizio il bambino si convincerà della bontà del metodo.

2) Come facciamo a sapere che nel primo caso occorre una sottrazione e nel secondo una divisione? Penso che qui, mentre la soluzione per tentativi non richiede spiegazione, il bambino probabilmente possiede una "macchina algebrica nellla mente", che lo porta a isolare in qualche modo la x (risposta) sulla sinistra, lasciando sulla destra delle quantità note legate fra loro da varie operazioni. Il primo passo è trasformare in numeri le quantità note, siano esse caramelle, cammelli o grani di riso. Il secondo è eliminare i fattori che moltiplicano la quantità ("x-pacchetto") cercata mediante la divisione.

Se dessimo cinque caramelle a Francesco e una caramella più due pacchetti eguali a Giacomo, dovremmo prima trasformare in numeri le caramelle e i pacchetti, ottenendo

L'equazione

5 = 1 + 2x

Il bambino dovrebbe apprendere che l'equazione si trasforma subito in

2x +1 = 5

Poi, per isolare la soluzione per ora incognita, trasportare la 1 da sinistra a destra cambiandola di segno, ottenendo

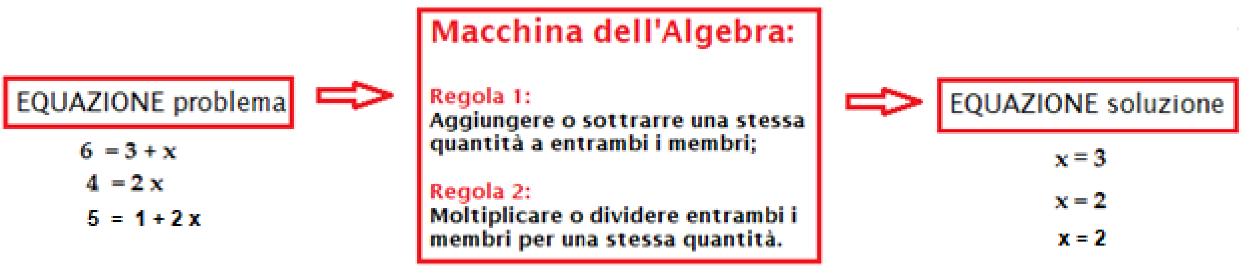
2 x = 5-1 -> 2x = 4

E infine scrostando il coefficiente 2 a primo membro mediante divisione di ambo i membri

x = 4/2 -> x = 2

L'algebra, in certo senso, mecanizza il procedimento, e gli Arabi (o forse altri prima di loro, ma loro furono quelli che riferirono il meccanismo a noi) vedendo che tanti problemi potevano essere presentati e risolti allo stesso modo, si chiesero se in qualche modo i problemi non potessero essere risolti "a macchina", una macchina che trasformasse l'EQUAZIONE PROBLEMA nell'EQUAZIONE SOLUZIONE.

Come abbiamo visto, a questa "macchina" diedero il nome di Algebra, dal nome della prima delle due regole.



Quindi tutto ciò che la nostra macchina dell'Algebra dovrà fare sarà manipolare l'equazione iniziale (l'equazione-problema) e trasformarla nell'"equazione soluzione" isolando la x, per mezzo delle due regole che ha a disposizione e usandole quante volte basta.

Può essere istruttivo per insegnanti proporre e per allievi giocare al gioco competitivo di "isolare la x", in cui viene assegnata un'equazione-problema che, usando le due regole dell'algebra, deve essere trasformata in un'equazione-soluzione in cui la x resta isolata, senza addendi e senza moltiplicatori, in uno dei membri. Si dovrebbe osservare in quale successione sono applicate le regole. Penso che in molti casi l'allievo incominci col

procedere a caso, ma più o meno rapidamente dovrebbe trovare qual è la via più efficiente per raggiungere il risultato. In genere questa richiede i seguenti passi:
(1) applicando principalmente la regola 2, togliere la x dal denominatore (se l'equazione problema è presentata come una frazione);
(2) applicando la regola 1 spostare in un membro tutti i termini che contengono la x e nell'altro tutti quelli che non la contengono;
(3) raccogliere i termini che contengono la x in modo da arrivare a un'espressione Ax = B
(4) applicando la regola 2, eliminare il coefficiente A di x.

Abbiamo così un meccanismo ideale in cui si infila il problema da una parte, la macchina (che poi siamo noi) ci lavora senza preoccuparsi di cosa i vari dati significhino, e dall'altra parte saltano fuori le soluzioni. La difficoltà, naturalmente, è quella di introdurre "il problema" come la macchina lo vuole. E qui possiamo essere più precisi, la macchina vuole che la nutriamo di **equazioni che contengano x alla prima potenza e non di più**, e funziona in base a due regole, che sarà nostro compito applicare nel modo giusto. Quindi, in fondo non è nocivo che il bambino si eserciti a trovare come è fatta l'equazione che è la forma del problema che sarà accettata dalla macchina anche in casi assai più complicati.

In generale, ad un certo punto della propria vita quasi tutti si studia quella che, con parola araba, è detta "algebra". Tutto l'ingegno necessario, che talvolta non è poco, sta nel mettere il *problema in forma di equazione*, non nel risalire dall'equazione soluzione all'equazione problema, come sovente gli scolari sono obbligati a fare.
Ma fino a che i problemi proposti hanno una quasi intuitiva soluzione, la macchina sembra inutile, come usare il cannone per andare per farfalle.

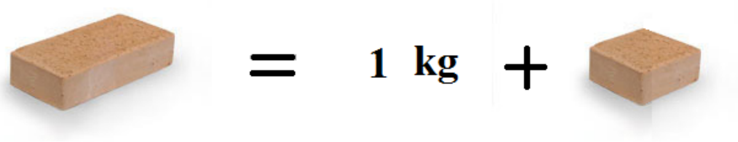
Ora, non tutti i problemi sono così intuitivi.

Vediamo un problema che viene meglio risolto scrivendo un'equazione, e che può presentare difficoltà anche a ragazzi che non sono più bambini.

"Un mattone pesa un kilo più mezzo mattone. Quanto pesa il mattone?"

Si provi a proporre questo problema e si vedrà che molti, anche adulti, risponderanno di primo acchito che il mattone pesa un kg e mezzo. Ma è vero?

Vediamo la situazione dell'equazione grafica:



Qui Giacomo avrebbe dei problemi (risolubili, però) ad andare per tentativi. Troverebbe forse una via ingegnosa per uscirne. Ma tutto diventa facile usando le regole dell'algebra

come le abbiamo date. Il bello dell'algebra è che possiamo trasportare da una parte all'altra del segno eguale – cambiando segno - non solo quantità note come avevamo fatto con 3 caramelle, ma anche quantità ignote, come il mezzo mattone di cui non conosciamo il peso totale, per il quale utilizzeremo la solita incognita x.
Trasportando e cambiando segno, oppure sottraendo da entrambi i membri (cioè togliendo), mezzo mattone a destra e a sinistra **(regola 1)** otteniamo

Trasformiamo in una vera equazione in simboli, in cui x è il peso del mattone intero:

$$\mathbf{x - (1/2)\,x = 1}$$

Ma $x - ½\,x = ½\,x$, per cui abbiamo

$$\mathbf{½\,x = 1}$$

(Cioè apprendiamo che mezzo mattone pesa 1 kg).
E adesso, moltiplicando a sinistra e a destra per 2 **(regola 2)**

$$\mathbf{x = 2}$$

Cioè il mattone pesa due kg.

FORME STANDARD:

Uno studioso di algebra raccomanderebbe di portare tutti i termini dell'equazione al primo membro in modo da averla in forma standard, cioè, nel nostro caso:

$$x -(1/2)x -1 = 0, \text{ cioè}$$

$$\mathbf{(1/2)x - 1 = 0}$$

che assomiglia alla formula standard :

$$\mathbf{ax + b = 0}$$

Dove a e b sono quantità note, e x è l'incognita.
Per il primo problema di Giacomo e Francesco avremmo

$$x - 2 = 0, \qquad \text{con } a=1 \text{ e } b=-2$$

Per il secondo problema:

$$2x - 4 = 0, \qquad \text{con } a=2,\ b = -4$$

Per il problema del mattone:

$$\tfrac{1}{2} x - 1 = 0, \qquad \text{con } a=1/2,\ b = -1.$$

Una volta raggiunta la forma standard, si gira la manovella e viene fuori la soluzione applicando la formula risolutiva (che deriva dalle due regole dell'algebra o che conosciamo a memoria o che cerchiamo su un libro):

$$\boldsymbol{x = -\frac{b}{a}}$$

Mettete le *a* e le *b* giuste nella formula risolutiva e verificate i risultati. Un'equazione che può esser messa nella formula $ax + b = 0$ si chiama equazione di primo grado in un'incognita, la x.

Per quelli che si appassionano a queste cose diremo che qui x appare AL PIÙ alla prima potenza e quindi l'equazione è detta **di primo grado.**

La forma standard sembra un passo indietro, ma acquista valore più avanti nell'algebra. Ad esempio, se x apparisse al massimo alla seconda potenza, la forma standard apparirebbe come:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

che si chiama "equazione di secondo grado" e ha anche lei la sua brava formula risolutiva, che si impara a memoria, o si ricava in qualche modo. Ricordarla a memoria (chi ha detto che in matematica la memoria non è importante?) è relativamente semplice e assai più facile che ricavarla, anche se non si tratterebbe ancora di un problema per cui occorre la mente di Archimede.

Fin qui ci si era arrivati nel Cinquecento, quando alcuni matematici Italiani trovarono le formule risolutive per le equazioni di terzo grado e di quarto grado.

Ma questo punto ci si fermò per duecentocinquant'anni. Poi…Ma questa è un'altra storia.

Va aggiunto che quelle che abbiamo visto rappresentano solo il più semplice tipo di equazioni. Ci sono altre equazioni assai più complicate, che richiedono metodi di soluzione assai più complessi: equazioni Diofantee, equazioni differenziali, equazioni integrali. Altre equazioni portano i nomi dei matematici che le studiarono.

Ma tutte hanno in comune la forma:

Equazione Problema:

(Qualcosa che contiene una (o più) incognite) = (Qualcos'altro che contiene le stesse incognite)

Equazione Soluzione:

La (o le) incognite = Qualcosa che non contiene le incognite.

Invece, la **macchina** che fa passare dal problema alla soluzione non è unica e può essere complicata al limite del credibile.

PS: A proposito. La mia esperienza di insegnante di scuola elementare a cui faccio riferimento è zero. Non ho mai insegnato né a classi di bambini né a singoli bambini. Non so come farei a sopportarli. Spero solo che quello che ho scritto non sia del tutto inutile o fuorviante, anche se segue il metodo di passare dall'algebra alle equazioni invece di seguire il cammino opposto, come usualmente si fa.