

# La MATEMATICA

*è un'invenzione o una scoperta?*

Ovvero

*Perché trovo più convincente l'idea che nella matematica la parte  
sostanziale sia la scoperta.*



*Pinturicchio: Appartamento Borgia, Aritmetica (a sinistra) e Geometria (a destra).*

DE

*Estate 2023*

# La MATEMATICA

*è un'invenzione o una scoperta?*

Ovvero

*Perché trovo più convincente l'idea che nella matematica la parte sostanziale sia la scoperta.*

La domanda non è nuova, ma vale la pena considerarla, perché la giuria è ancora riunita. In altre parole, non c'è una dimostrazione in un senso o nell'altro che convinca i due (folli e disuniformi – soprattutto il primo) partiti che sostengono l'uno la teoria dell'invenzione, l'altro quello della scoperta.

Dal punto di vista dell'uomo, non c'è molta differenza fra lo scoprire e l'inventare, in campo intellettuale. Da un punto di vista esterno, invece, ammesso che un essere umano (io) possa porsi all'esterno, la differenza è enorme.

Dire che la matematica è un'invenzione umana fa pensare a uomini che cercano di spiegare la natura e pertanto inventano gli strumenti per comprenderla. Il più utile di questi strumenti, sperimentato con successo da diversi millenni, è la matematica. A poco a poco le nozioni matematiche vengono a far parte della mente collettiva del genere umano, e sono tutte e interamente invenzioni dell'uomo. Il matematico sarebbe il tecnico che costruisce questa struttura che, per così dire, modella la natura. Talvolta, quasi per gioco, inventa concetti matematici in cui la natura è persa di vista.

Dire che la matematica è una scoperta, significa dire che la matematica, con i suoi innumeri settori di ricerca, e definizioni e teoremi e costanti, è un "mondo" che nella sua sostanza esiste al di fuori dell'esistenza umana, che esiste potenzialmente per tutti gli esseri ragionevoli, che esisteva prima che gli uomini fossero esseri ragionevoli e che continuerebbe a esistere anche se la specie umana, anzi, l'intero universo, scomparisse senza lasciare traccia. Il matematico sarebbe il tecnico che modella questo mondo nuovo mediante la tecnica matematica che lui stesso inventa. Ma il mondo così scoperto non è la natura che conosciamo, per quanto sia reale come e più della natura, anche se in modo diverso.

Da quanto sopra si vede che parliamo di (almeno) due matematiche, che non sono esattamente la stessa cosa. Una di esse, è la tecnica matematica, che deve essere inventata

dall'uomo indipendentemente dal fatto che la matematica sia un'invenzione o una scoperta. Ma se la matematica è un'invenzione, non c'è una realtà matematica sottostante, che invece esiste se la matematica è una scoperta.

Altre civiltà possono creare diverse tecniche matematiche (si veda ad esempio il caso del *wasan*, matematica nazionale giapponese, che ebbe la sua fioritura durante il periodo Edo (1603-1867) e scomparve alla sua fine:

([https://it.wikipedia.org/wiki/Matematica\\_giapponese](https://it.wikipedia.org/wiki/Matematica_giapponese).) Occorrono esperti, non solo della lingua giapponese, per decifrare i risultati di questa scuola.

Certamente, se per noi vale l'equazione "tecnica matematica = matematica", allora l'intera matematica è quello che inventiamo noi per spiegare la natura. Di qui discende che non è strano che la matematica spieghi, più o meno soddisfacentemente la natura, visto che essa è stata faticosamente sviluppata proprio per quello scopo. Potrebbe sembrare strano che il nostro cervello, per mezzo delle tecniche matematiche, sia riuscito finora a risolvere soddisfacentemente la maggior parte dei problemi sorti nella spiegazione della natura, ma non è poi così strano, pensando che l'evoluzione ha cambiato assai il cervello pre-umano e umano, evidentemente premiando chi risolveva i problemi (matematici e non) presentati dalla natura.

Se però noi pensiamo che nella matematica ci sia una parte che non proviene dal tentativo di spiegare la natura, allora possiamo pensare che esista anche il "vero mondo" della matematica, che non è quello nostro e che noi, lungi dall'inventarlo, scopriamo progressivamente, usando, almeno come punto di partenza, o come testa di ponte, se possibile, le stesse tecniche matematiche inventate per spiegare la natura.

In verità, *sarebbe sufficiente trovare un solo "oggetto matematico" la cui invenzione da parte umana sia estremamente improbabile*, per far traballare l'intera tesi della "matematica come invenzione", perché sarebbe abbastanza strano pensare che esista un universo matematico con un solo abitante.

Alla visione che sostiene l'esistenza di un mondo proprio della matematica si dà sovente il nome di "ipotesi platonica della matematica". Bisogna avvertire che questa è una semplificazione del pensiero di Platone, forse il solo filosofo di cui nessun successore osò dir male, per dissentendo completamente da lui. Platone nei suoi trentaquattro dialoghi (più l'Apologia, più quattordici lettere) non era solito dare dimostrazioni inoppugnabili. Almeno quattro dialoghi lasciano la questione principale in sospenso. In altri dialoghi, quando proprio sente di non poter dare una convincente forma al suo pensiero, Platone ricorre ai cosiddetti "miti" (circa ventitrè in tutto.) Infine, Platone aveva l'abitudine di rivedere i suoi dialoghi, per cui stabilirne una cronologia diventa difficile. Alla fine della sua vita la tradizione riporta che lavorava sul dialogo intitolato "*La Repubblica*", pur avendo già da tempo modificato la sua idea di stato ideale nel successivo (?) e incompiuto dialogo "*Le Leggi*". Tutto questo sistema, per caotico che possa apparire, presuppone un

concetto metafisico fondamentale, quello dell'Iperurano (1). Sul concetto di iperurano sono basate la sua teoria del reale, e la sua teoria della conoscenza. Esso sarebbe una verità quale si può desumere per analogia da vari miti sparsi nei suoi dialoghi (2).

L'iperurano è quel mondo al di sopra della volta celeste, che è sempre esistito, popolato dalle idee eterne, immutabili e perfette. Poiché la volta celeste è (o almeno era per i Greci) il confine del mondo fisico, la contemplazione dell'iperurano dovrebbe essere puramente intellettuale. Non per questo si può dire, almeno per Platone, che le idee (puramente intellettuali) eterne, immutabili e perfette non esistono. Anzi! Un mito (nel *Fedro*) ci presenta undici schiere volanti di anime di defunti prima della reincarnazione, montate su cocchi con due cavalli, al seguito di undici divinità, che mirano a raggiungere la sommità del cielo per godere anche solo per un attimo (la maggioranza) o più a lungo (i filosofi) della vista della "pianura della verità". Di questa visione più o meno lunga le anime si ricorderanno una volta tornate su questo mondo, che in qualche modo è una imperfetta riproduzione dell'iperurano, sorgente della nostra conoscenza.

Nella "pianura delle verità" abitano i numeri. Cercare di approfondire che cosa siano i Numeri per Platone porterebbe fuori strada. Platone, oltre ai numeri, parlava anche di "oggetti matematici", che occupavano una posizione intorno alla soglia dell'iperurano, mentre i "suoi" Numeri si innalzavano di dialogo in dialogo nella gerarchia delle idee. Ma i sostenitori della "visione platonica della matematica" si guardano bene (e giustamente) dal cacciarsi nel ginepraio filosofico e filologico dell'interpretazione del pensiero platonico. A loro basta dire che *la matematica ha una realtà indipendente dall'uomo*. Lo studio della matematica non sarebbe puramente una costruzione, o un insieme di costruzioni, della mente umana, ma consisterebbe *principalmente* nella progressiva scoperta (o ricordo, con vocabolario platonico) di un mondo che in pratica ha poco a che vedere con la natura.

Come ho detto fin da principio, sebbene io sappia che illustri pensatori non accettano la visione platonica, essa è per me assai più convincente della visione (o delle visioni) che affermano che l'uomo costruisce la matematica. Per me, l'uomo costruisce delle tecniche per esplorare la natura, che gli servono per esplorare solo la soglia del mondo della matematica. Per penetrare ulteriormente in questo mondo i matematici devono inventare nuove tecniche, che possono o non possono trovare applicazioni nello studio della natura. Del resto, mi basta sapere che matematici e logici del calibro di Gödel, Erdős, Penrose (e molti altri) hanno condiviso e condividono questa idea (3).

Però vorrei che fosse chiaro che le mie ragioni non sono certo le dimostrazioni che non esistono. A me basta indicare quali ragioni mi spingano più sulla strada platonica che su quella opposta. Per il resto, sono certo che ciascuno si terrà le sue idee su questo soggetto, come del resto ho sempre fatto io.

## **I. Il campo della matematica che non è nata per spiegare la natura è più vasto del campo della matematica che invece è nata per spiegarla.**

Ad esempio, dei sette “problemi del millennio” enunciati dal Clay Institute (4), solo il primo, il quinto e il sesto possono essere messi in relazione con problemi che si presentano nella realtà fisica. E anche quelli che possono esserlo, danno l’impressione che la spiegazione della natura sia solo un pretesto per esplorare concetti più astratti e (matematicamente) più interessanti.

Passando poi alle decine di migliaia di articoli pubblicati annualmente, si può intuire che quelli che possono essere posti in relazione con la realtà fisica sono una trascurabile minoranza (5). In breve, non credo che si presentino in natura 50 000 problemi da risolvere ogni anno.

## **II. Talune entità matematiche sono state “forzate” sui matematici, e ostacolate dall’intuizione basata sulla realtà fisica.**

**Il campo dei numeri complessi.** Mi piace ricordarlo perché si tratta del più importante contributo italiano alla matematica come la conosciamo: contributo di straordinaria importanza, che per diversi decenni del XVI secolo fu studiato esclusivamente da italiani. Infatti, per quanto si possano consultare le storie della matematica nelle varie culture, non mi risulta che esista alcun seppur vago precursore, né in Cina, né in India, né nel mondo Arabo – per tacere dell’Occidente. Leggendo il testo di Erone sul tronco di piramide, si vede che non fu un precursore neppure lui, che pure viene occasionalmente citato.

### **II.1 Perché gli algebristi italiani che scoprirono i numeri complessi non ebbero precursori?**

In effetti, da tempo immemorabile si sapeva che determinate equazioni di secondo grado “non avevano soluzioni” (ciò che in fondo è anche la “scoperta” di Erone). Penso che la ragione sia che per introdurre i numeri complessi si dovette andare decisamente contro i suggerimenti della realtà fisica. Basti citare un semplice problema di secondo grado (considerato dal Cardano): quanto valgono due numeri  $x$  e  $y$ , la cui somma è 10 e il cui prodotto è 40? In pratica, vogliamo costruire una tavola rettangolare di lati  $x$  e  $y$  di cui si sa che l’area vale 40, e che il semiperimetro vale 10. Problemi di questo tipo venivano risolti da tempo immemorabile sapendo che  $x$  e  $y$  dovevano essere le due soluzioni di un’equazione di secondo grado, data da  $z^2 - (\text{somma})z + (\text{prodotto}) = 0$ . Tuttavia, in questo caso, risolvendo l’equazione  $z^2 - 10z + 40 = 0$  con i metodi noti, si trovava che i due lati dovevano essere  $5 + \sqrt{-15}$  e  $5 - \sqrt{-15}$ . Ci voleva Cardano per far vedere che effettivamente la loro somma è 10, e il loro prodotto 40. Eppure, quale artigiano sarebbe stato in grado di costruire quella tavola?

*L'impossibilità fisica era sempre stata intesa come impossibilità matematica.*

*Ma non è vero.*

## **II.2 Importanza capitale della scoperta dei numeri complessi.**

Se si guarda alla storia della scoperta dei numeri complessi si ha quasi l'impressione che la natura volesse nascondere l'esistenza. Ma, una volta introdotti i numeri complessi, fu come il cedere di una diga. Il crollo avvenne in circa 150 anni, ma fu definitivo. In pratica, la matematica, che fino al Cinquecento Italiano si era sviluppata seguendo la "retta" dei numeri reali, incominciò ad estendersi al piano dei numeri complessi, letteralmente "andandovi a spasso" su opportuni percorsi, passeggiate di cui Cauchy fu uno specialista. E quindi, per valutare pienamente l'importanza della scoperta dei numeri complessi, bisognerebbe chiedersi: "quanto è più grande un piano di una retta?"

## **II.3 Eleganza delle nuove dimostrazioni di taluni teoremi. Il teorema fondamentale dell'algebra.**

Ad esempio, la dimostrazione del *teorema fondamentale dell'algebra*, che ogni equazione algebrica di grado  $n$ , a coefficienti reali o complessi, ha sempre  $n$  soluzioni reali o complesse (contando come due soluzioni una soluzione doppia e via dicendo) divenne semplicissima. Nel campo dei numeri complessi ne esistono almeno due dimostrazioni eleganti e pressoché immediate (6).

## **II.4 Un risultato sorprendente: estendendo il concetto di numeri complessi ai numeri interi, viene risolto il problema di "quanti sono i numeri primi gemelli" (la cui differenza vale 2.)**

Gauss (1832) introdusse i numeri interi gaussiani (numeri complessi in cui la parte reale e la parte immaginaria sono numeri interi). Particolarmente interessanti tra loro sono i numeri primi gaussiani, e uno dei risultati inattesi è che i famosi "numeri primi gemelli" ("*La solitudine dei numeri primi*"!) **scompaiono** nel campo complesso, perché uno dei due (quello della forma  $4n+1$ , sempre presente nella coppia) è sempre fattorizzabile nel prodotto di due numeri complessi coniugati, e quindi non è più un numero primo. In compenso compaiono dodici numeri primi complessi in quattro terzetti (il numero 4 non è casuale) i cui membri sono in contatto gli uni con gli altri (la loro differenza ha modulo 1), più vicini quindi tra loro dei numeri gemelli (la cui differenza è 2). Dimenticare questo risultato nelle esposizioni divulgative dei numeri primi è come limitare la funzione  $Z$  di Riemann alla definizione data da Euler.

## **II.5 Anche la fisica matematica si piegò infine, dopo quattro secoli, all'introduzione (irrinunciabile) dei numeri complessi.**

Ma la "natura" sembrava ostinarsi a non trovare necessaria l'introduzione dei numeri complessi, che in pratica venivano applicati in fisica matematica solo per sveltire la trattazione delle onde, aggiungendo sovente "beninteso, si usi solo la parte reale del risultato". Tutto questo cambiò nei cinque anni dal 1925 al 1930 con l'introduzione delle

due equazioni, di Schrödinger (che regge la meccanica quantistica non relativistica) e di Dirac (che regge la meccanica quantistica relativistica). In ambedue compare l'irrinunciabile unità immaginaria  $i$ . Ma si noti, non fu la natura a suggerire di introdurre l'unità immaginaria nelle sue equazioni (Schrödinger pensò per un certo tempo di poterla eliminare). Fu invece l'unità immaginaria a entrare di prepotenza nelle equazioni della meccanica quantistica.

*Niente numeri complessi, niente meccanica quantistica.*

## II.6 Il campo dei numeri complessi appare definitivo.

Ovviamente è possibile pensare di introdurre ulteriori estensioni, come passare da un piano complesso a uno spazio ipercomplesso in più dimensioni, quaternioni, ottonioni, etc. e molti matematici si presero questo compito. Ma, così facendo, i nuovi spazi non possono accomodare tutte le leggi dell'aritmetica, quali la proprietà commutativa (i quaternioni non la posseggono), la proprietà associativa (questa manca agli ottonioni), l'assenza di divisori dello zero eccetera. L'assenza di queste proprietà si ripercuote su altri campi dell'aritmetica, dell'algebra e dell'analisi matematica, tanto da impedire in molti casi la costruzione di una soddisfacente teoria delle funzioni. Sembra quasi che i numeri complessi abbiano imposto le loro proprietà ai matematici, che le hanno *scoperte*, trovando straordinarie, inattese ricchezze; invece i matematici non sono riusciti a *inventare*, in analogia con i numeri complessi, sistemi matematici più ricchi. Solo più poveri.

Infatti, gli uomini inventarono solo la notazione (anzi, più di una notazione) per i numeri complessi, ma queste notazioni dovevano riflettere le proprietà dei numeri complessi, che sembravano avere una prepotente vita propria. Invece, come si vede da questa breve esposizione, la natura sembrò avere un ruolo negativo nell'introduzione dei numeri complessi, gridando per quasi quattrocento anni "non servono, non servono!" (Veramente, chi gridava non era la natura in generale, ma la natura quale essa era nota fino ad allora.)

Dunque si erano trovate dapprima delle proprietà matematiche, che solo in seguito erano state applicate alla descrizione della natura, dove fu presto chiaro che era impossibile farne a meno. Ma che cosa ci vieta di pensare che quelle proprietà, apparentemente forzate sugli uomini, descrivessero un mondo sovranaturale, per caso applicabile al mondo della natura? Che avesse ragione il "divino" Platone (così lo chiamò Kant, che pure non condivideva le idee di Platone), a dire che il nostro mondo è solo una mal riuscita copia dell'Iperuranio?

## III. Conseguenze dell'infinito in matematica.

Parliamo ora di **numeri**. Se uno ci pensa bene, il numero "due" ha una sua esistenza. Soltanto, la sua esistenza ha caratteri diversi dalla nostra. Anche se il numero due non

cade sotto i nostri sensi, è *evidentemente eterno*, è *in ogni luogo*, è *incorruttibile*. Ma, si può obiettare, il numero due richiede pur sempre che qualche essere umano lo pensi. Veramente no, perché diversi animali sanno contare, almeno fino a un numero relativamente piccolo, ma superiore a due, come diversi esperimenti hanno dimostrato. Per esempio, i corvi imperiali sanno contare fino a otto circa, e non penso abbiano imparato dagli uomini. Per loro, quella è tutta la matematica. Si renderebbero però ridicoli, se affermassero di avere inventato loro la matematica. Noi diremmo loro con una certa superiorità: “Piantatela, microcefali. Voi avete inventato (ah, non scoperto!) solo una minima parte della matematica, che abbiamo inventato noi”.

Ma non potrebbero alieni superintelligenti pensare lo stesso di noi, paragonando la loro matematica alla nostra, e vedendoci così fieri di aver “inventato la matematica”? E tali alieni non potrebbero a loro volta rendersi ridicoli davanti ad alieni ancora più intelligenti, pronti a ridicolizzare la loro matematica? Si può pensare a un procedimento che va verso l’infinito, in cui i membri di ogni popolazione (corvi, umani, alieni I, alieni II etc.,) devono rendersi conto del fatto che loro non hanno inventato (o scoperto) altro che una piccola parte della “vera” matematica, che alla fine resterebbe nella sua completezza qualcosa di irraggiungibile, specialmente se, come brevemente vedremo in seguito, è vero che la matematica può essere indefinitamente estesa.

### III.1 Le infinite cifre del numero $\pi$ .

#### III.1.1 Le infinite cifre di $\pi$ sono le stesse, indipendentemente dal metodo usato per calcolarle.

Considerando tre differenti tipi di metodi, è solo perché  $\pi$  è un numero a cui ci siamo assuefatti se non siamo stupiti del fatto che le sue infinite cifre (come quelle di tutti i numeri irrazionali – ma la costante  $\gamma$  di Euler è davvero irrazionale?) non dipendono dal modo con cui sono calcolate.

**Primo tipo:** calcolo della circonferenza come *limite dei perimetri* di poligoni inscritti e circoscritti di un crescente numero di lati (Archimede, forse preceduto dal cinese Liu Hui, e poi infiniti altri). Il metodo permette di raggiungere l’approssimazione che si vuole.

**Secondo Tipo:** approssimazione mediante *serie e frazioni continue*. (J. Gregory (1638-1675) (subito seguito da Leibniz qualche anno dopo) basata sullo *sviluppo in serie della tangente trigonometrica*: la trigonometria ha a che fare con i cerchi, ma la formula di Gregory non richiede che si disegnino cerchi. Si trovò poi (in Occidente) che l’indiano Madhava era arrivato alla stessa formula 250 anni prima. Anche qui la serie tipicamente raggiunge la precisione che si vuole, ma converge lentamente, e altri (ad esempio Machin, 1680?-1751) cercarono presto simili serie di più rapida convergenza. Altri ancora cercarono uno sviluppo in *frazioni continue* (credo che il primo a sperimentare questo approccio sia stato Lord Brouncker (1620-1684). Si trovò comunque presto che la formula di Lord Brouncker era imparentata con la serie di Madhava-Gregory-Leibniz).



**Terzo tipo: metodi probabilistici.** Il cosiddetto *metodo di Montecarlo* non è concettualmente nulla di nuovo. Nuovo è solo il modo di valutare l'area di un quarto di cerchio di raggio 1, prendendo a caso molte coppie  $x, y$  di numeri (positivi) tra 0 e 1, e verificando se il valore  $x^2+y^2$  è minore o maggiore di 1. Come è evidente dopo una breve riflessione, il rapporto (coppie di punti  $x$  e  $y$ , in cui  $x^2+y^2 \leq 1$ ) / (numero totale di coppie) tende a  $\pi/4$ .

Del tutto differente, e a prima vista imprevedibile, è il metodo dell' "*Ago di Buffon*." Se si fa cadere a caso un ago di lunghezza  $L$ , su un foglio di carta in cui siano disegnate linee parallele con spaziatura  $H$ , per un numero grande di lanci si dimostra che il rapporto tra i lanci in cui l'ago attraversa un riga e il numero totale di lanci vale – a lungo, anzi, lunghissimo, andare  $(2/\pi)(L/H)$ . Ho provato con un milione di lanci e ho ottenuto il risultato (per  $L=H$ )  $\pi \approx 3.1219$  (peggiore del metodo di Montecarlo, mediante il quale, con lo stesso numero di scelte di coppie casuali, ho ottenuto  $\pi \approx 3.1396$ ).

Su Internet ci sono pagine che simulano quanti lanci si vogliono (senza esagerare). Se poi si prova a fare una simulazione con un ago lungo  $\pi H$  e si riflette sul risultato si può trovare una elegante dimostrazione della formula di Buffon, che non richiede integrali.

Naturalmente, le scelte di coppie per il metodo di Montecarlo, e di lanci per l'ago di Buffon devono essere perfettamente casuali, ciò che è più facile a dirsi che a farsi. Meglio le simulazioni via computer.

### III.1.3 Considerazioni sulle cifre che non saranno mai calcolate.

Ma, se la coincidenza tra i risultati di metodi assai diversi di calcolo è o dovrebbe essere sorprendente, a mio parere, ancora più interessante è speculare sulle cifre che non saranno mai calcolate. Prendendo come riferimento il sito "*Cronologia del futuro lontano*" ([https://en.wikipedia.org/wiki/Timeline\\_of\\_the\\_far\\_future](https://en.wikipedia.org/wiki/Timeline_of_the_far_future)), in cui si assume che l'universo sia eterno, leggiamo che tra  $10^{(10^{120})}$  anni al più tardi l'universo avrà raggiunto il suo stato finale dell'energia, cioè non saranno più possibili scambi di energia di alcun genere, e quindi qualsiasi cambiamento di stato, e quindi qualsiasi calcolo, anche a livello quantico, sarà impossibile. Se anche innumeri quantum computer avranno lavorato indefessamente a calcolare cifre di  $\pi$  fino a quel punto, qui si arresteranno, pur sapendo che resteranno ancora infinite cifre da calcolare, che nessun uomo o addirittura nessuna intelligenza artificiale del nostro universo conoscerà mai. Ora, che queste infinite cifre esistano è necessario: lo abbiamo dimostrato noi, dimostrando che pigreco è un numero trascendente (Lindemann, 1872). Se le cifre di  $\pi$  si arrestassero a un certo punto,  $\pi$  non sarebbe più un numero trascendente, ma un numero razionale, rapporto di due numeri interi, come 3.14 è dato da 314/100. Ma questo lo vieta appunto il teorema di Lindemann.

**Ma possiamo forse dire che, poiché non le abbiamo calcolate, queste infinite cifre che devono esistere non esistono? E se esistono, come si può dire che la loro esistenza dipende da noi, che non possiamo averle inventate tutte per mancanza di tempo e non le conosceremo mai?**

### III. 2 Considerazioni sul fatto che la matematica possa espandersi indefinitamente.

Una simile linea di ragionamento è basata sul fatto che il numero di possibili teoremi di matematica sia infinito.

A voler essere pignoli, lo abbiamo già quasi dimostrato per una classe di infiniti teoremi di non eccessivo interesse: sviluppando pigreco, per esempio nel sistema binario per fare le cose semplici, potremmo voler dimostrare che la cifra #  $10^{10000000}$ .. è uno invece che zero. Un tale teorema non esiste, e non sappiamo se in ogni caso sarebbe un caso particolare di un teorema unico ed identico per tutte le cifre (come tale non potrebbe fare riferimento alle cifre già calcolate), che ci darebbe il valore di qualsiasi cifra non importa quanto lontana dalla virgola decimale. Alternativamente, potrebbe esistere un teorema differente per ogni cifra, e quindi infiniti teoremi.

Ma vediamo un caso più interessante. Per quanto i teoremi di Gödel non lo dicano e non lo dimostrino, essi spalancano la porta a questa speculazione. Essi mostrano che esistono invalicabili limitazioni a ciò che può essere dimostrato all'interno di un sistema matematico formale, e che ci saranno sempre affermazioni matematiche vere che non possono essere dimostrate all'interno di quel sistema. Più specificamente, il primo teorema di incompletezza di Gödel dimostra che qualsiasi sistema matematico formale *sufficientemente potente da rappresentare l'aritmetica di base* (il che sembra poco, ma non lo è) conterrà affermazioni che sono vere ma non possono essere dimostrate all'interno del sistema. In altre parole, ci saranno sempre verità matematiche che si trovano al di là della portata di qualsiasi sistema formale. Ciò ha importanti implicazioni per i fondamenti della matematica e per la filosofia della matematica, *in quanto suggerisce che ci sarà sempre di più da scoprire ed esplorare all'interno del regno della matematica*, eventualmente introducendo *nuovi concetti, relazioni o strutture matematiche* che vanno oltre il dominio dei nostri attuali sistemi formali. Di conseguenza, (così mi ha risposto un interlocutore AI) l'idea che la matematica si espanderà all'infinito è comune tra matematici e filosofi interessati alla natura della matematica e ai suoi fondamenti.

Ora, l'idea che la mente umana sia capace di costruire un sistema infinito, spaventa un poco, semplicemente perché questo sistema, in quanto infinito, è ovviamente destinato a rimanere *quasi interamente* a noi ignoto. Tuttavia, noi possiamo dare, almeno idealmente, un'immagine di questi futuri teoremi e dimostrazioni, che nessuno dimostrerà verosimilmente mai. Per esempio, in linea di principio, possiamo conoscere tutti gli enunciati che vogliamo. A tale scopo possiamo pensare di utilizzare il metodo della "gödelizzazione" di una proposizione logica, e di applicarlo all'enunciato e alle dimostrazioni dei teoremi, probabilmente l'applicazione più ignobile che si possa pensare della gödelizzazione.

Un enunciato non è altro che una "stringa" di caratteri che possono essere codificati ciascuno con un numero intero. Qualsiasi stringa è identificabile in modo unico come un

prodotto di potenze di numeri primi, in cui la base indica il posto  $n$  nella stringa, (scegliendo l'ennesimo numero primo), e l'esponente è la codificazione di un simbolo secondo un'opportuna convenzione. Per esempio sia "0" codificato col numero 6 (convenzione scelta da Gödel), ed "=" col numero 5. La stringa di tre caratteri "0=0" è quindi identificata dal numero  $(2^6)(3^5)(5^6)$ , usando i primi tre numeri primi (2,3,5) per indicare i posti nella stringa. Il numero è dunque  $3^5 * 10^6$ , 243 milioni. Scomponendolo in fattori ricostruiremo la stringa "0=0" e non altra, per il teorema dell'unica fattorizzazione dei numeri interi (7).

Ora, noi possiamo immaginare di scegliere a caso un numero di qualche milione di cifre. Lo affidiamo a una IA che verifichi che il numero è la codificazione di una stringa sintatticamente corretta. Questo perché esistono regole nella costruzione della stringa, che la rendono atta a rappresentare una proposizione logica. Per esempio, è evidente che un numero sintatticamente corretto dovrà possedere potenze con esponenti grandi quanto si vuole, di tutti i numeri primi consecutivi uno dietro l'altro senza saltarne nessuno, fino a un massimo che terminerà l'enunciato (ovviamente esistono altri vincoli sintattici più complessi). Molto probabilmente il numero prodotto non avrà significato, o si spezzerà in una successione di stringhe significative, ma non collegate. Tuttavia, tra i numeri che potremo scegliere a caso ce ne dovranno essere alcuni più radi che sono l'enunciato, o diversi enunciati, o enunciati seguiti da dimostrazione, di qualche teorema nuovo. Poiché però i numeri sono infiniti, a meno di trovare un teorema che afferma che non esistono enunciati matematici sensati al di là di un numero di Gödel di un certo valore (ciò che indicherebbe che la matematica non è infinitamente estendibile) questi infiniti teoremi nuovi hanno almeno un numero di Gödel che permette di trascriverli. Inoltre, alcuni di loro risulteranno da numeri così grandi da non poter essere processati, al solito, prima della data di  $10^{(10^{120})}$  anni.

**Come per il caso delle cifre di  $\pi$ , si può dire che queste (forse ipotetiche) verità matematiche che nessuno saprà mai individuare ed interpretare non esistono? E se esistono, come si può dire che la loro esistenza dipende da noi che non possiamo averle inventate tutte per mancanza di tempo e non le conosceremo mai?**

**IV. Userò infine un esempio caro a Penrose. Si tratta dell'insieme di Mandelbrot. Questo viene costruito sul piano complesso scegliendo una grande quantità di numeri  $c$ , e calcolando successivamente le iterazioni**

$$(1) \quad z(n+1) = z(n)^2 + c.$$

Il numero (complesso)  $c$  è il punto di partenza, e  $z(0)$  vale solitamente 0. La prima iterazione è  $z(1) = c$ ; poi abbiamo  $z(2) = c^2 + c$ ;  $z(3) = (c^2 + c)^2 + c$ ;  $z(4) = ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c$  eccetera. Si noti che il quadrato di un numero complesso  $(u+iv)^2 = (u^2 - v^2) + 2iuv$ , cioè ogni  $z(i)$  ha le sue coordinate  $x$  e  $y$ , rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria dell'espressione a secondo membro, creando naturalmente una certa complicazioni nei

successivi passi. Il risultato è che le successive iterazioni  $z(n)$ ,  $z(n+1)$  etc. saltano di qua e di là sul piano complesso in modo a prima vista imprevedibile.

Ora viene la **definizione dell'insieme di Mandelbrot**: se i valori  $z(n)$  restano nei pressi dell'origine, pur aumentando indefinitamente il numero di iterazioni  $n$ , diciamo che *il punto originale  $c$  appartiene all'insieme di Mandelbrot*, e possiamo segnarlo sul piano. Se invece fuggono dai pressi dell'origine (convenzionalmente, se oltrepassano la frontiera del cerchio di raggio  $R=2$ ), il punto è perduto, e dichiariamo che esso non appartiene all'insieme di Mandelbrot.

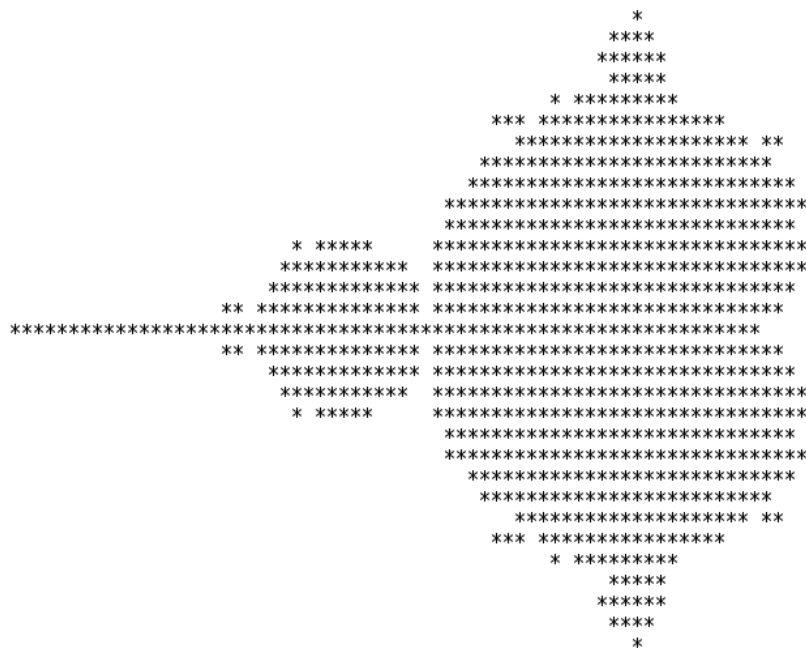


Fig.1

Primo disegno pubblicato dell'insieme di Mandelbrot (Robert W. Brooks e Peter Matelski, 1978).

Ai primi risultati del progetto, Mandelbrot non immaginava di essersi imbattuto in un insieme piccolo, ma mostruoso. Le regolarità e quasi regolarità che intravide presto gli fecero pensare ad una malfunzione del computer (1986). Ma poi, aumentando il numero di punti, si convinse che quello che vedeva emergere a poco a poco era una complicata entità che abitava a nostra insaputa il piano complesso. Nessuno ne aveva mai sospettato l'esistenza. A questo punto qualcuno ebbe un'idea: possiamo segnare con un colore, per esempio nero, i punti che fanno parte dell'insieme. Ma poi vi sono punti che, per quanto alla fine non appartengano all'insieme, sembrano a lungo incerti se appartenervi o no. Si può introdurre una scala di colori che indica l'indecisione del punto: rosso se resta a lungo nei pressi dell'origine, poi arancione se resta un po' meno, poi giallo, poi bianco. Infine assegneremo un colore azzurro più o meno scuro al punto che si allontana rapidamente. In certo senso non siamo sicuri che tutti i punti considerati come appartenenti al disegno di un insieme di Mandelbrot gli appartengano davvero, perché dopo un certo numero di iterazioni bisogna comunque arrestare l'operazione. Con questo *caveat*, la figura ormai nota a tutti gli amatori di matematica è come segue:

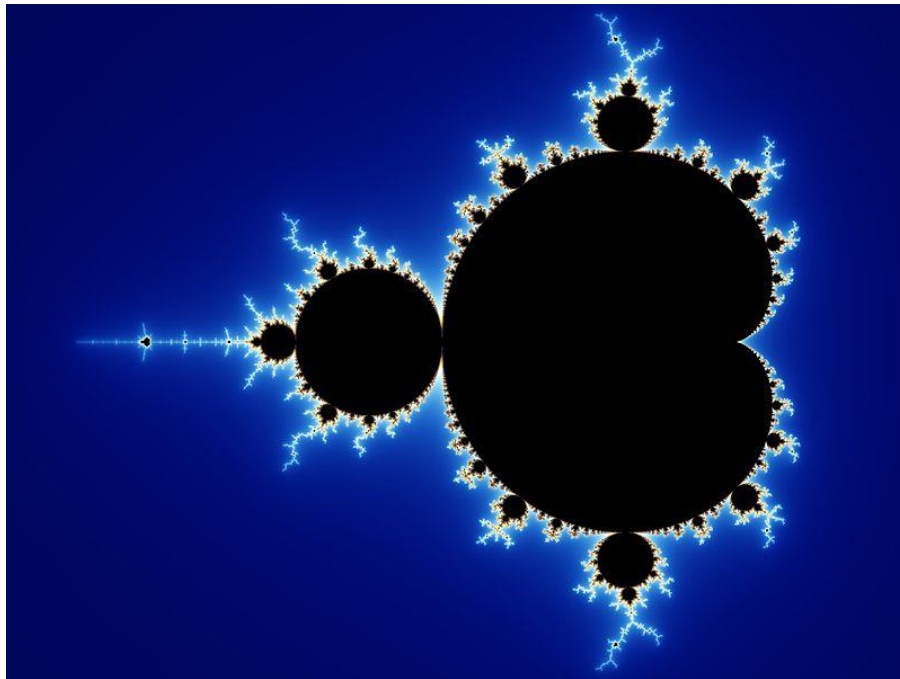


Fig.2

Questa immagine, dovuta a Wolfgang Beyer usando il programma "Ultra Fractal 3 (2005)", è considerata una delle migliori di Wikipedia in inglese.

A prima vista si nota che l'immagine totale contiene (presumibilmente infinite) ripetizioni dell'immagine quasi circolare a sinistra (indicata con B in Fig.3), di dimensioni decrescenti. A studiare questa figura si può perdere la ragione, ma suggerirei di non farlo a questo punto, perché, procedendo nello studio, si possono trovare migliori ragioni per perdere la ragione sul serio. **Ciò che sorprende di più è che la legge di selezione dei punti che appartengono ad un insieme così complicato sia così semplice** (Equazione 1).

Molti studiosi si sono focalizzati su qualche punto promettente e hanno progressivamente ingrandito la zona circostante: questo lo si fa studiando punti sempre più vicini al punto  $c$  iniziale, cioè specificando sempre meglio le coordinate di  $c$ . (Suggerirei, se si vuole seguire quanto scriverò, di scegliere la versione francese di Wikipedia, più ricca della versione italiana e più ordinata di quella inglese

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble\\_de\\_Mandelbrot](https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot).)

In questa versione francese, tra tante interessanti realizzazioni grafiche, nella sezione "Un zoom commenté" è reperibile un filmato di progressivi ingrandimenti intorno al punto  $c = -0,743643887037151 + 0,13182590420533 i$ , in rosso nella figura 3. Procedendo nell'ingrandimento si vedono comparire e scomparire, perché diventate troppo grandi, strutture (per lo più frattali) già note o nuove, presumibilmente senza fine. L'impressione che si ha dal filmato è che nuove strutture si formino e scompaiano, ma non è così. Si tratta

invece di strutture permanenti sempre più piccole che ripetono approssimativamente strutture di maggiori dimensioni, come è proprio dei frattali, che si trovano intorno al punto (decisamente speciale) prescelto.

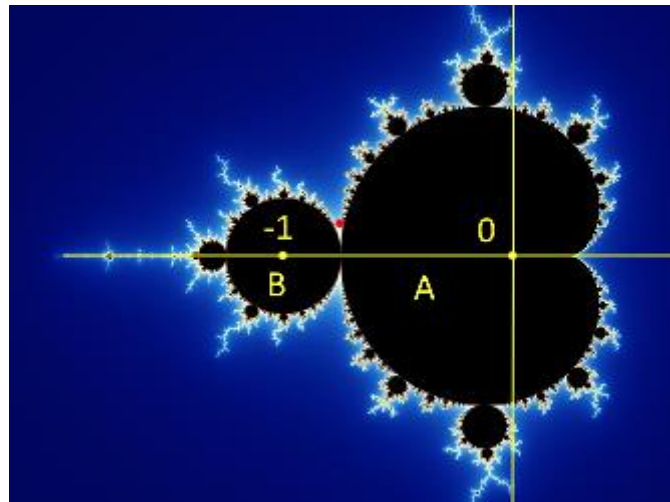


Fig.3

Come potrà confermare chi segue l'esercizio, una volta ingrandita la zona del punto rosso circa  $6 \cdot 10^{10}$  volte (figura 4), dopo innumeri strutture, per lo più frattali o collezioni di frattali, compare un altro frattale:

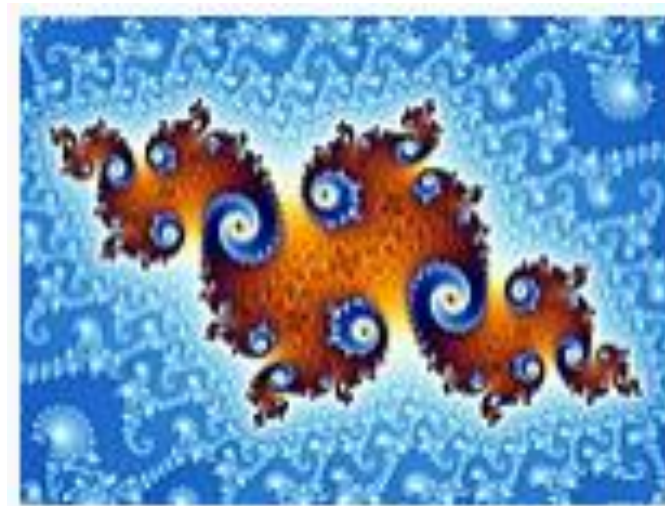


Fig.4

A questo punto, l'insieme totale di Mandelbrot, da un diametro di 10 cm circa è passato a un diametro di  $6 \cdot 10^{11}$  cm, 6 milioni di km, 20 volte la distanza dalla Terra alla Luna.

Il filmato contenuto nella stessa sezione "Un Zoom commenté" va ancora più avanti, e, specificando ulteriormente il punto come  $c = (-0.743643887037158704752191506114774, 0.131825904205311970493132056385139 i)$  giunge a un ingrandimento  $10^{31}$  volte, il che

vuol dire che il nostro insieme di Mandelbrot originale, a doverlo disegnare tutto, avrebbe un raggio superiore al raggio dell'universo (circa  $10^{28}$  -  $10^{29}$  cm.) E' evidente che le coordinate del numero devono essere specificate con almeno 31 cifre decimali, se si vuole osservare il suo habitat con quell'ingrandimento. *Credo che poche presentazioni possano dare come questa il senso di quello che si intende quando si dice che il punto geometrico pensato dai Greci ha dimensioni nulle.* Le strutture che mostrano le "Étapes (tappe)" nella stessa sezione "Un Zoom commenté" a partire dalla terza "tappa", stanno comodamente in un cerchietto di diametro di un decimo di millimetro, immagine del più piccolo punto che noi possiamo disegnare con una matita. Ed è abbastanza evidente che non c'è fine alle strutture sempre più piccole che potremmo vedere ingrandendo fino all'infinito la zona vicino al punto.

Penrose, che quando scrisse il suo libro non poteva ancora conoscere questi filmati multicolori (quello da me citato è del 2010), si domandava se davvero si potesse ragionevolmente sostenere che le strutture straordinarie, regolarmente irregolari, di Fig.2, fossero state ideate dall'uomo, il quale non ne aveva mai sospettato l'esistenza. Questa si rivelò per caso, *grazie all'esistenza dei computer (e, assai a monte, aggiungerei, grazie all'introduzione, forzata sugli uomini, del concetto di numeri complessi.)*

A maggior ragione si deve essere stupito in seguito vedendo, come certo ha fatto, il filmato da me citato. Poco da fare, diceva Penrose, l'appartenenza di un punto all'insieme di Mandelbrot dipende dal punto e non da noi: punti anche incredibilmente vicini possono essere uno blu (non appartiene all'insieme) e l'altro nero (appartiene all'insieme), come da Fig.4.

L'impressione che mi dà questo punto dell'insieme di Mandelbrot, è che ***abbiamo appunto trovato un oggetto matematico la cui invenzione da parte dell'uomo è estremamente improbabile.*** Questo oggetto ha in comune con le cifre di pigreco e simili, e con l'infinità di teoremi possibili (entrambi ricordati nella sezione III) la caratteristica di possedere uno sviluppo **infinito e imprevedibile.**

Ad ogni modo, che la matematica sia una scoperta o un'invenzione, godersi il filmato completo da Wikipedia Commons è secondo me un'esperienza rara. Se Platone avesse potuto vederlo, avrebbe forse pensato di essere finalmente in contemplazione di un punto (!) dell'Iperurano.

## NOTE.

- (1) *La pianura della verità* è al di sopra del cielo, quindi è il "luogo iperurano (aggettivo) o *sovraceleste*", luogo che, ai tempi in cui studiavo filosofia, si chiamava "Iperurano (sostantivo)".

- (2) Platone ne parla principalmente in *Repubblica* (mito dello schiavo nella caverna), *Fedro*, *Simposio* (idea del Bello), *Timeo* (mito del demiurgo), *Fedone* (dove per la prima volta appare la parola Idea). In vari altri dialoghi il concetto è sottinteso.
- (3) R. Penrose (nato nel 1931), convinto platonista, esplorò questi aspetti della matematica per dare una base al suo brillante testo: *"The Emperor's New Mind"* (1989). Non posso fare altro che consigliarne la lettura, anche perché su questa base "platonica" sono esplorati in modo originale molti altri concetti che spaziano praticamente su tutte le scienze. Io mi ispirerò in parte, ma non solo, a lui nel dare ragioni per cui credo più al platonismo matematico che alle teorie che lo rifiutano.
- (4) I sette "Problemi del Millennio":  
 1. **Relazione tra P e NP**; 2. Congettura di Hodge; 3. Congettura di Poincaré (risolto); 4. Ipotesi di Riemann; 5. **Teoria quantistica ed equazioni di Yang-Mills**; 6. **Equazioni di Navier-Stokes**; 7. Congettura di Birch e Swinnerton-Dyer.  
 (I problemi in grassetto hanno qualche legame con la natura e la realtà fisica).
- (5) Secondo il database *Mathematical Reviews*, che indicizza e recensisce le nuove pubblicazioni in matematica, nei soli due anni 2019 e 2020 sono state aggiunte al database oltre 100.000 nuove pubblicazioni matematiche. Ciò include articoli di riviste, atti di conferenze e libri in vari sottocampi della matematica. Attualmente, il numero annuo di pubblicazioni è in crescita.
- (6) Due dimostrazioni del teorema fondamentale dell'algebra sfruttando le funzioni analitiche nel campo complesso.
- a) **Come corollario di un teorema di maggiore importanza**, discendente dal concetto di **"indicatore logaritmico"** secondo il quale "per una funzione analitica priva di *singularità essenziali* su tutto il piano complesso, il numero totale dei poli (dei punti in cui la funzione va all'infinito come una potenza di  $1/z$  presso l'origine) deve coincidere col numero totale degli zeri". Una singolarità essenziale non va all'infinito come  $z^{(-n)}$ , quale che sia  $n$ . Grossolanamente si può pensare che vada come  $z^{(-\infty)}$ . Nel teorema in esame, un polo o uno zero di ordine  $m$  contano rispettivamente come  $m$  poli o zeri di ordine 1. Ora, *un polinomio di grado  $n$  ha un polo di ordine  $n$  all'infinito e quindi  $n$  zeri al finito. Cdd.* (6).
- b) Come applicazione del **teorema di Liouville**, secondo il quale una funzione analitica regolare e limitata sull'intero piano complesso è una costante. Si supponga che il polinomio  $p(z)$  non sia mai zero. Quindi la sua inversa  $f(z) = 1/p(z)$  è limitata (non è mai infinita), e, per il teorema citato, è una costante. Ciò significa che gli unici polinomi senza zeri sono le costanti (polinomi di grado zero).  
[https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_fondamentale\\_dell%27algebra](https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_fondamentale_dell%27algebra)

Le prime dimostrazioni classiche del teorema fondamentale dell'algebra, come quella basata sul cosiddetto "lemma di D'Alembert" (1746), che io dovetti studiarli



all'Università, richiedevano circa tre sudate pagine di testo. Ma queste erano dimostrazioni strutturate a cipolla: si dimostrava che un'equazione di grado  $n$  aveva almeno *una* soluzione. Dopodiché si affermava che sfruttando questo dato si poteva abbassare di un'unità il grado dell'equazione; si sarebbe quindi potuto ripetere lo stesso ragionamento concludendo che c'era almeno una soluzione per la nuova equazione di grado  $n-1$  etc. . Si sarebbe giunti dopo  $n$  passi all'equazione di primo grado, ove la discesa terminava, e il teorema restava dimostrato.

Non si può negare, credo, che le dimostrazioni del teorema basate sulle funzioni analitiche nel campo complesso, soprattutto la (a), siano di un'eleganza superiore: il segno certo di questo è che queste dimostrazioni, pur dando per scontati altri teoremi che discendono dal teorema dei residui, possono praticamente essere ricordate a memoria, per la loro intuitività e chiarezza.

- (7) Per qualche informazione in più sulla codificazione col metodo di Godel, si veda:  
<https://archive.org/details/gdelsproof00nage/page/70/mode/2up>