INTRODUZIONE A UNA QUARTA DIMENSIONE SPAZIALE

Seconda Edizione

Da una domanda comparsa su Quora:

In una conferenza online, un professore ha detto che Einstein potrebbe disegnare o immaginare una figura a 4 dimensioni. Come si può realizzare una cosa del genere?

Risposta breve.

Per rispondere appropriatamente dovrei avere il cervello di **Einstein**, il che, mi spiace assai, non è. Infatti, pensare in quattro dimensioni o più, non è materia che si insegna a scuola, ma è affidata all'intuizione dello studioso. A quanto pare, **Mozart** una volta disse che i suoi brani musicali gli apparivano come costruzioni "architettoniche" tutte di un pezzo, definite dal principio alla fine, con tutte le voci dei vari strumenti. Lui non doveva fare altro che "copiare" questa costruzione. Nessun altro mai disse niente del genere, che io sappia. E magari non lo disse neppure lui. **Ramanujan** sognava la sua dea, *Namagiri Thayar*, che scriveva per lui un integrale ellittico dopo l'altro. Non penso che sia comparsa in sogno a nessun altro.

Per quanto riguarda la quarta dimensione, ottimisticamente, Poincaré presentava il conto da pagare: "Un uomo che vi dedichi tutta la vita, *forse* potrebbe arrivare a raffigurarsi la quarta dimensione". Ma il **Coxeter**, a cui devo la citazione di Poincaré, aggiunge che vi arrivarono un paio di persone, senza dire chi fossero (1) – in particolare non dice se uno di loro fosse lui stesso.

Questo dunque, sembra confermare la mia prima affermazione, che, ammesso che si giunga a "vedere" la quarta dimensione, non si può insegnare la via. Difatti, non mi risulta che esistano testi scritti dai pochi fortunati di cui parla il Coxeter, in cui si spieghi con quali artifizi ci si arrivi. L'intuizione della quarta dimensione a quanto pare, se giunge, giunge solo dopo lunghe meditazioni, e l'ultimo passo, l'intuizione della quarta dimensione, non può essere spiegato.

Questo sembra andare contro le affermazioni di Edwin Abbott Abbott **Edwin Abbott Abbott** (1838-1926), autore di "Flatland, a Romance of Many Dimensions" (1884), ovvero

“Flatlandia, un romanzo in molte dimensioni”. Ricordo di aver letto che, *l'autore cercò di educare sua figlia a “vivere” in quattro dimensioni e diceva di esserci riuscito,* ma non sono più riuscito a trovare la citazione. Era un tipico eccentrico Inglese, occasionalmente pericoloso.

Il suo metodo educativo mi è ignoto, e, che ci sia stata o no, questa educazione non fece di sua figlia Mary (1870-1952) una grande esperta in geometria, in particolare delle quattro dimensioni. Neppure lei lasciò scritto alcunché su come raggiungere questa visione del mondo. Essa fu però assidua collaboratrice del padre in altri tra i suoi molti interessi (in particolare filologia e teologia). Il padre le dedicò la prima edizione del suo “*Johannine Vocabulary*” o “Vocabolario del linguaggio di Giovanni (San Giovanni Evangelista)”, sulle peculiarità del linguaggio di Giovanni rispetto a quello dei Sinottici, a cui essa aveva collaborato con impegno e intelligenza.

In conclusione, per quanto riguarda Einstein, se pensava direttamente in quattro dimensioni io non posso immaginare come facesse. Inoltre, di suoi disegni che rappresentassero su un foglio di carta (in due dimensioni) oggetti di quattro dimensioni, non ne vidi mai. Francamente, credo che la sua visione della quarta dimensione fosse per analogia, ciò che, come vedremo, si può fare abbastanza agevolmente.

Commento.

È già abbastanza strano che noi riusciamo a intuire la realtà tridimensionale partendo da immagini in due dimensioni, come quadri e fotografie. Si prenda come esempio la fotografia di una casa. Anche gli occhi hanno sulla retina un'immagine bidimensionale, ma la visione binoculare aiuta a concepire la dimensione della “profondità”. In più, noi possiamo muoverci nel nostro mondo e per esempio girare intorno alla casa e renderci conto delle sue dimensioni e degli angoli veri, che sulla fotografia sono falsati. Tuttavia, anche se angoli e distanze appaiono falsati nella fotografia, a quanto pare il nostro cervello è conscio del fatto che esiste una relazione tra le coordinate reali e le coordinate in prospettiva di quattro punti, relazione che si riduce a un numero detto “birapporto”, e sulla quale è fondata la geometria proiettiva. Questa relazione, il birapporto, è invariante per trasformazioni proiettive (che sono quelle che ci danno il disegno in prospettiva o una foto bidimensionale di una casa tridimensionale). Non mi addentrerò in questo concetto, per non appesantire troppo le mie considerazioni. Noterò solo che esso è noto dai tempi dell'antica Grecia, e resta ancora un mistero comprendere come i Greci (in particolare **Pappo di Alessandria**, genio isolato del IV secolo) ci arrivarono, senza fotografie o altri supporti grafici e prospettici.

Ora, le fotografie sono statiche. Comunque le ruotiamo su un tavolo, rappresentano sempre la stessa porzione di casa vista in prospettiva nello stesso modo. Noi passiamo alla terza dimensione o prendendo altre fotografie da diversi punti di vista o facendo un filmato intorno alla casa, o immaginando di farlo. Questa immaginazione, che ci dà la forma della casa reale, è forse l'intuizione della terza dimensione a cui arriviamo da una fotografia.

Oggetti tridimensionali, quindi, possono essere studiati, o dalle realtà tridimensionali, o da raffigurazioni in due dimensioni, che però bastano a darci l'immagine dell'originale.

Dunque dovremmo pensare che il passo alla quarta dimensione lo potremmo fare nel modo più agevole da modelli tri-dimensionali, agli originali quadridimensionali, così come è facile farlo da fotografie bidimensionali e modelli tridimensionali.

Esistono oggi in rete diverse animazioni che mostrano come ruotando un oggetto quadridimensionale (invariabile) apparirebbe la sua prospettiva tridimensionale (mutevole) nel nostro spazio. Come vedremo, un 4-cubo si trasforma in oggetti diversi, che sembrano non avere relazione l'uno con l'altro. Potremmo pensare in futuro a modelli olografici tridimensionali che si deformano secondo il moto dell'oggetto quadridimensionale, che è immutabile e che non riusciamo a immaginare.

Questo forse ci aiuterebbe a fare il salto finale, cioè immaginare il moto dell'oggetto quadridimensionale e quindi la sua forma invariabile, ma non c'è nessuna garanzia che ciascuno, o almeno qualcuno ci possa riuscire.

Risposta lunga.

Per raccontare qualcosa di questo mondo a quattro dimensioni mi servirò di quattro brevi drammi. Il primo è direttamente ispirato da **Edwin Abbott Abbott** (1838-1926), nel suo "*Flatland, a Romance of Many Dimensions*" (1884), ovvero "*Flatlandia, un romanzo in molte dimensioni*". Il 31 dicembre 1999, un visitatore tridimensionale avrebbe visitato Flatlandia, più o meno nei modi che descriverò. Flatlandia è una nazione bidimensionale abitata da esseri bidimensionali, uno dei quali - eroe della storia – ci racconta la vicenda in prima persona. Egli sta per far conoscenza con uno straniero, la Sfera, che viene dal mondo in tre dimensioni. Il narratore, bidimensionale, viene convertito dalla Sfera alla fede (che in Flatlandia è un'eresia) nelle tre dimensioni e si farà missionario di questa fede. I risultati dei suoi sforzi sono esposti nell'ultimo capitolo del romanzo, che è una satira matematico-teologica, carica di sottile umorismo e rivolta ad un lettore del tutto ordinario, purché versato in matematica e teologia.

1. Un visitatore tridimensionale in una spiaggia di Flatlandia.

"Mamma, mamma!" strillò il bambino bidimensionale (BB) alla mamma bidimensionale (MB). "È comparso un punto in mezzo al mio asciugamano preferito." (Fig.1a)

MB: "Sei sempre il solito maialino. Non puoi tenere le tue cose pulite?"

BB: “Ma no, mamma, guarda: il punto si allarga, sta diventando un cerchio!”(Fig.1b)

MB:” Ma che cosa hai fatto per avere una macchia del genere? A casa faremo i conti!”

BB: “Niente, ti giuro. Guarda, adesso non cresce più”. (Fig.1c)

MB:” Molto strano, figlio mio”.

La Sfera Tridimensionale (solennemente):” Sappiate, o esseri inferiori, che io vengo dal Mondo vero, quello a tre dimensioni. E vi dico: dovete credere nelle tre dimensioni e predicare la verità”.

MB: “Ci crediamo, o Nume”.

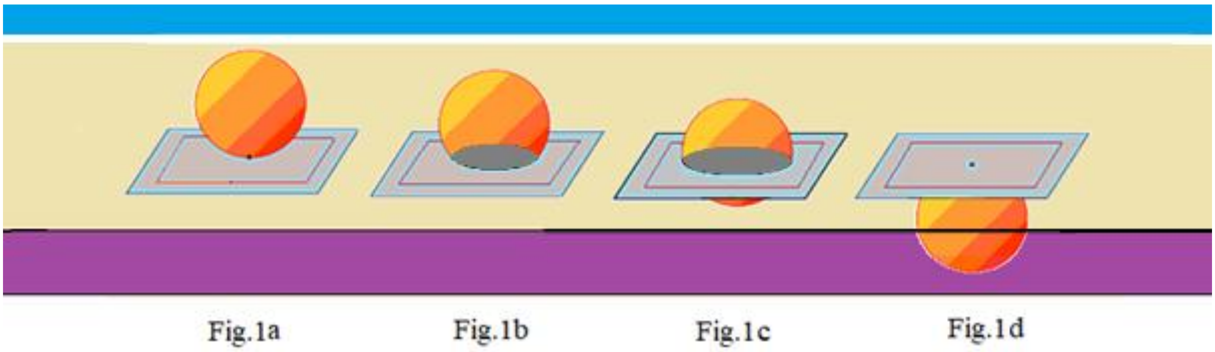
ST: “E io credo in voi. Ma fate attenzione quando ne parlerete in giro, perché i vostri capi, i Cerchi, vi perseguiteranno. Essi vedono bene che io sono un Super-cerchio”.

MB: “Faremo attenzione, o Nume”.

ST.” Mi basta. Addio”

La ST si riduce a un punto e scompare. (Fig.1d)

Noi, che siamo tridimensionali, possiamo vedere facilmente come sono andate le cose. Una sfera tridimensionale è passata attraverso il piano di Flatlandia. Qui, la dimensione in più per il Flatlandiani può essere assimilata al tempo, ma, direbbe un geometra purista, non è il tempo. La sfera, come noi la vediamo, è un oggetto geometrico, e la terza dimensione è pur sempre una dimensione spaziale. Però per i Flatlandiani si sviluppa nel tempo.



Sezione di spiaggia bidimensionale, con mare e onde. In viola è lo spazio tridimensionale, inaccessibile ai Flatlandiani, come pure la parte di spazio al di sopra del piano della spiaggia.

Ma che succederebbe in tre dimensioni?

2. Un visitatore quadri-dimensionale compare in una spiaggia alle Baleari.

“Mamma, dice il bambino tridimensionale (BT – nulla di strano, è fatto come i nostri), ho portato l’acquario vuoto (noi vediamo un cubo di cristallo) e ci voglio mettere dentro un pesciolino”. (Fig.2 a)

MT: “Non è facile che tu riesca a prenderlo e a mettercelo dentro. E poi fa attenzione che non ti scappi”.

BT “L’acquario è ben chiuso, perché non ci entrino altri animali. Prendo il pesce e lo metto nell’acquario, e poi chiudo di nuovo”.

MT: “Vedremo. Ma mi avevi detto che non c’era dentro niente e invece vedo che ci hai messo una biglia rosa.“ (Fig.2b)

BT: “Non è vero, non ci ho messo nessuna biglia rosa. Ci è spuntata da sola. Te lo giuro”.

MT: “Non solo l’hai messa, ma guarda come aumenta di dimensioni. Che cosa diavolo ci hai messo, nell’acquario?” (Fig. 2 c)

BT: “Ma proprio niente, mamma. L’acquario è ermeticamente chiuso”.

MT: “Ah, adesso ha smesso di crescere. Mioddio, è un alieno!” (Fig.2d)

La Sfera Quadridimensionale (solennemente):” Sappiate, o essere inferiori, che io vengo dal Mondo vero, quello a quattro dimensioni. E vi dico: dovete credere nelle quattro dimensioni e predicarle al popolo”.

MB: “Ci crediamo, o Nume”.

ST: “E io credo a voi. Ma fate attenzione quando ne parlerete in giro, perché i vostri capi, le Sfere, vi perseguiteranno. Essi vedono bene che io sono una Super-sfera”.

MB: “Faremo attenzione, o Nume”.

ST.” Mi basta. Addio”

La ST si riduce a un punto e scompare. (Fig.2 e, f, g)

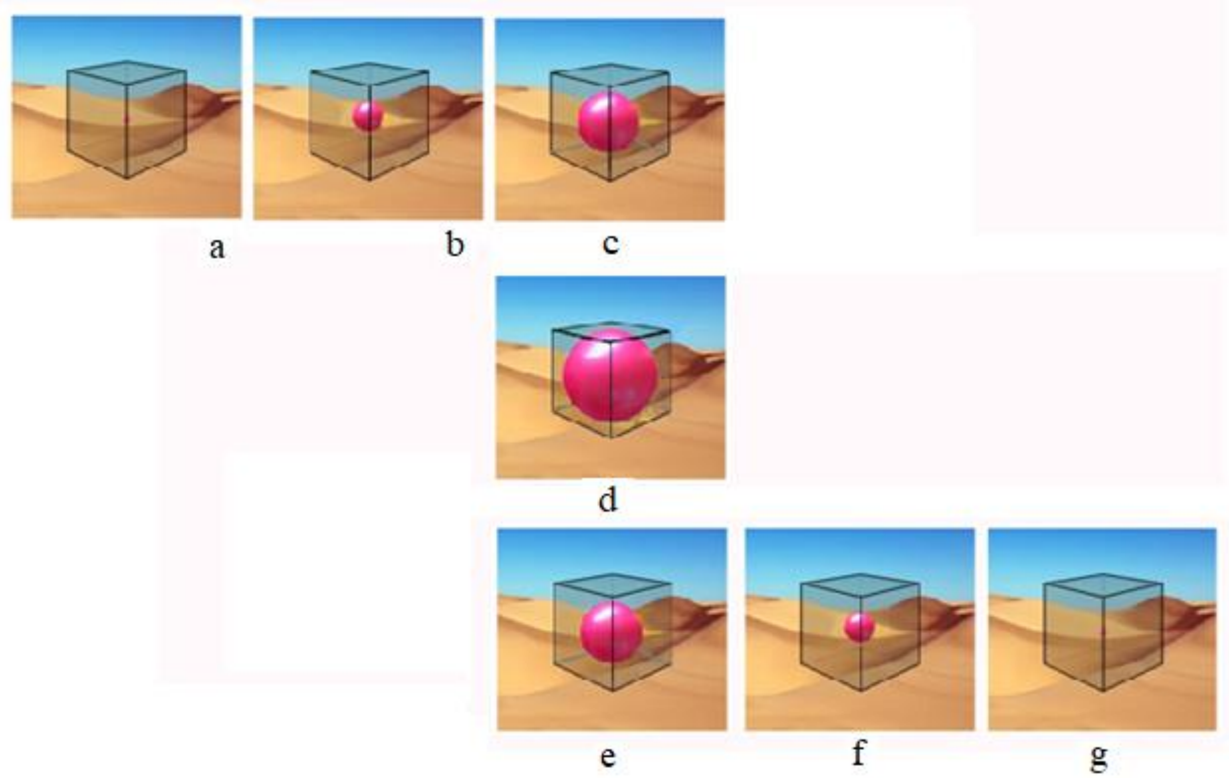


Fig.2

Spiaggia delle Baleari con acquario ermeticamente chiuso attraversato da una sfera quadridimensionale. Non ho idea di come si possa rappresentare la situazione "reale" in quattro dimensioni. Una cosa è certa: la sfera può entrare nel cubo ermeticamente chiuso, **perché esso non ha pareti nella quarta dimensione.**

Noi, che siamo tridimensionali, *in generale* **non** possiamo vedere affatto come sono andate le cose. Una sfera quadridimensionale è passata attraverso una spiaggia delle Baleari. Ma anche qui, per noi, la dimensione in più può essere assimilata al tempo. La 4-sfera, che noi NON vediamo come un oggetto geometrico, per noi si sviluppa nel tempo. Ho detto "in generale", perché non escludo che Einstein avesse una visione quadridimensionale, ma, come ho detto, penso che anche lui ragionasse per analogia.

Come il BB e la MB vedono "proiezioni" bidimensionali della sfera 3D (che, per fortuna, sono tutte cerchi), così noi vedremmo "proiezioni" tridimensionali della sfera 4D, che a loro volta, per fortuna, sono tutte sfere. Un semplice cubo in quattro dimensioni, il **Tesseract** o **Tesseratto**, o anche **4-cubo,** per esempio, può presentarsi fra noi con infinite diverse forme, secondo il suo orientamento nello spazio 4D, un fatto che considereremo più avanti.

È dunque il momento di passare al **Tesseratto**. Per questo mi ispiro ad un racconto di **Robert Henlein,** "*And he built a Crooked House*" ("Ed egli costruì una casa sbilenca"), pubblicato nella rivista *Astounding Science Fiction,*1941. Il racconto ha una sua pagina su Wikipedia, per chi lo voglia leggere, ed è reperibile in rete (https://en.wikipedia.org/wiki/%22%E2%80%94And_He_Built_a_Crooked_House%E2%80

%94%22). Tuttavia, Henlein a un certo punto, per arricchire la trama, deve abbandonare la geometria come noi la conosciamo. Il lettore vedrà dove, se leggerà il racconto.

3. Casa instabile in Flatlandia.

Mary B (bidimensionale) e Edwin B. Flat sono sposi felici che cercano una casa non banale. Crispin B. Flatter è un geniale architetto amico di Edwin, e gli confessa di avere un progetto di una casa in tre dimensioni. In Flatlandia, solo pensarci è un'eresia. Flatter avrebbe anche i soldi per costruire la casa, e di fatto l'ha già quasi ultimata, ma non trova nessuno che ci voglia abitare. Sarebbe lieto di regalarla alla coppia. I due sono estatici e vanno a visitare la casa in costruzione. Flatter li avverte che proprio oggi si eseguirà l'opera segretissima, che in Flatlandia potrebbe comportare anche il rogo, di erigere la casa nello spazio a 3D.

Il trio arriva in una zona vicina poco abitata, e i due vedono una casa bella, ma del tutto normale.

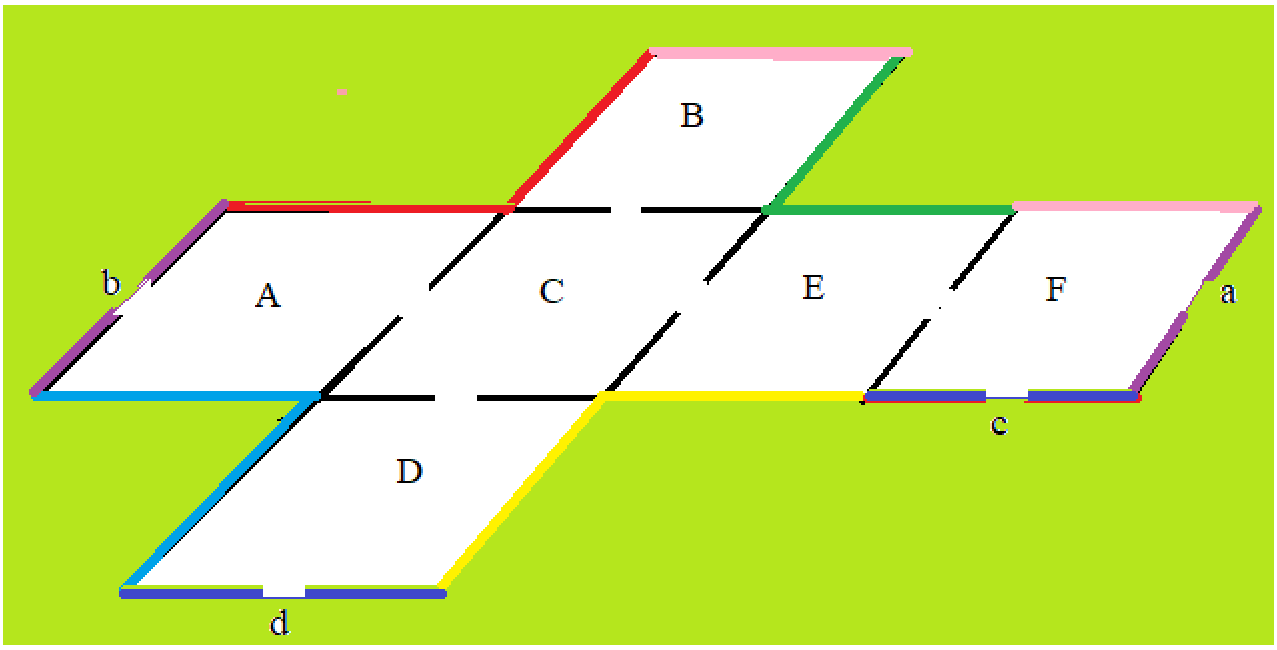


Fig.3

Casa in 2 dimensioni destinata a diventare una casa in 3 dimensioni.

A Mary piacquero le pareti multicolori, ma fu stupita di vedere solo 2 porte (a, b) e due finestre (c,d) esterne, oltre, fortunatamente, alle porte di comunicazione interna.

Flatter la rassicurò dicendole che di porte e finestre ne avrebbe potuto costruire quante voleva. Ma lo disse con una sorta di ghigno che a Mary non piacque per niente. Comunque, per compiacerla, Flatter diede ordine che si mettesse subito una porta in ogni parete esterna. Le pareti erano modulari e ci volle meno di un baleno. Quando tutto fu a posto e i primi mobili di fortuna, provveduti da Flatter, furono sistemati, questi disse solennemente: “Attenti, che ora viene il bello!”. Ma Mary si oppose, con grande delusione di Flatter. A lei la casa andava bene così come era. Flatter protestò che i patti erano quelli, ma Mary, col fascino che tutte le donne bidimensionali posseggono, lo ammansì. Per quella sera, dopo una piccola celebrazione, Mary e Edwin si ritirarono nella camera D, e Flatter dormì nella camera B. In C era stato messo il salotto, in A il vestibolo, in E la cucina abitabile, in F i servizi con porta di servizio.

Dire che dormirono sarebbe un’esagerazione. Verso le due del mattino si sentì uno scossone, modesto, ma pur sempre avvertibile. Si era verificato un terremoto, ma la felice coppia non si preoccupò troppo, perché la casa sembrava aver resistito bene. Si incontrarono comunque tutti nel salotto C e i due Flat notarono subito che Flatter appariva preoccupato. A furia di minacce e moine, finalmente i due seppero il perché della sua preoccupazione. Affacciandosi alla finestra **d** non aveva visto l’affascinante (ancorché piatto) panorama di Flatlandia, ma l’interno della camera F, dei servizi. Mary corse a guardare fuori dalla finestra che era stata costruita nella parete rosa della camera B, vide (il lettore lo saprà già) anche lei l’interno della camera F, e svenne. Edwin corse per uscire dalla porta **a**, ma quando la aprì inorridì: al di là della porta di servizio c’era il vestibolo A.

Qui Flatter dovette spiegare: la casa da lui costruita in due dimensioni era predisposta per essere eretta in tre dimensioni e quindi era instabile, e tendeva a cadere (o ergersi) nella terza dimensione. Il terremoto aveva causato il problema. Ora la casa si ergeva nella terza dimensione.

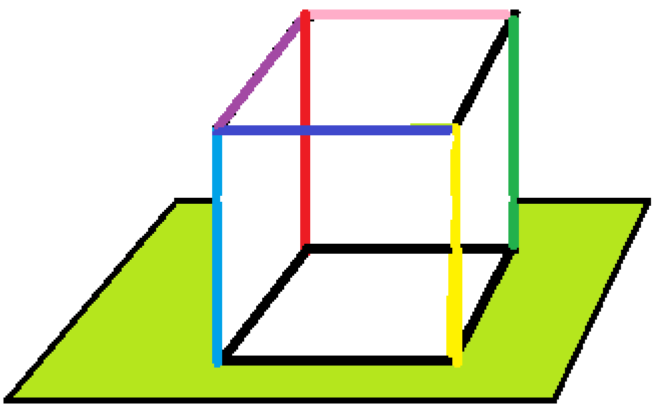


Fig.4

Le diciannove pareti (si noti che le pareti sono gli spigoli, non le facce) della casa si erano ridotte, in tre dimensioni, a dodici, perché le quattordici pareti del perimetro esterno si erano fuse a due a due secondo il colore, come vedrebbe chiunque facesse un piccolo modello di carta come in figura 3 e lo piegasse a cubo, come si suol fare a scuola. Le cinque pareti interne (linee nere) erano intatte. Il problema, ammise Flatter, era che non si sarebbe mai potuti uscire dalla casa, a meno che arrivasse un terremoto che riducesse di nuovo la casa a due dimensioni. In realtà, quindi, la casa in 3D, vista da noi, non avrebbe presentato spigoli diversamente colorati, ma solo spigoli neri, in quanto, costruendo il cubo, tutte le pareti diventavano pareti interne, per noi nere (Fig.5).

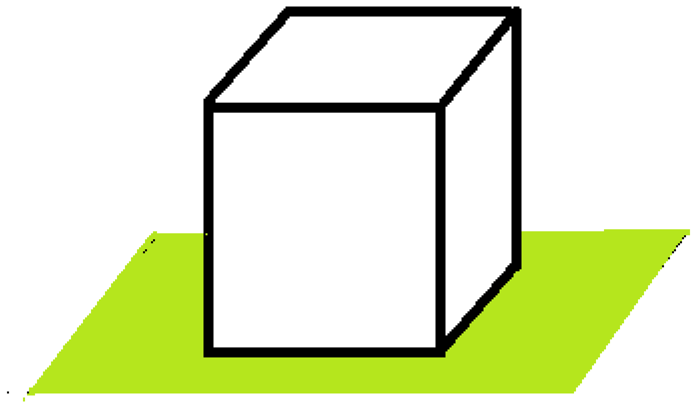


Fig.5

La vera apparenza della casa in 3D

Mary pensò che doveva essere un orrore se i vicini vedevano la casa così ridotta, ma Flatter le disse che avrebbero solo visto una comune casa di una stanza, quella sul piano di Flatland, peraltro senza porte o finestre. Insomma, un enigmatico recinto chiuso.

Per consolarsi, Edwin disse a Mary: "Ma pensa, cara, affacciandoci alla finestra vedremmo per primi il mondo in 3D". Ma qui Flatter dovette intervenire. "Spiacente, ragazzi, ma tutte le finestre "esterne" danno su un'altra camera della casa".

Un'altra scoperta sgradevole li aspettava: passando da una stanza all'altra attraverso una finestra esterna, la persona diventava l'immagine rovesciata di sé stesso.

C'era una sola cosa da fare: in tre svuotarono tre bottiglie di gin and tonic, poi andarono a dormire come massi.

Qui il lettore può scegliere fra il lieto fine (un altro terremoto che rimette le cose a posto, oppure il tutto non è stato altro che un incubo, con risveglio nella cara vecchia Flatlandia) o il triste fine (con il trio che impazzisce e muore di fame prigioniero nella terza dimensione). Sono ambedue conclusioni possibili, ciascuna con diverse varianti. Henlein, per la sua versione in quattro dimensioni, scelse una terza via, che mi pare meno coerente con un racconto fin qui rigoroso: trovò il modo di uscire dalla casa in 3D. Ma questa è Fantascienza.

Forse a questo punto occorre qualche spiegazione geometrica, che introduce un paio di concetti.

In primo luogo vorrei spiegare il seguente concetto: (in qualsiasi dimensione) **il contorno del contorno vale sempre zero.**

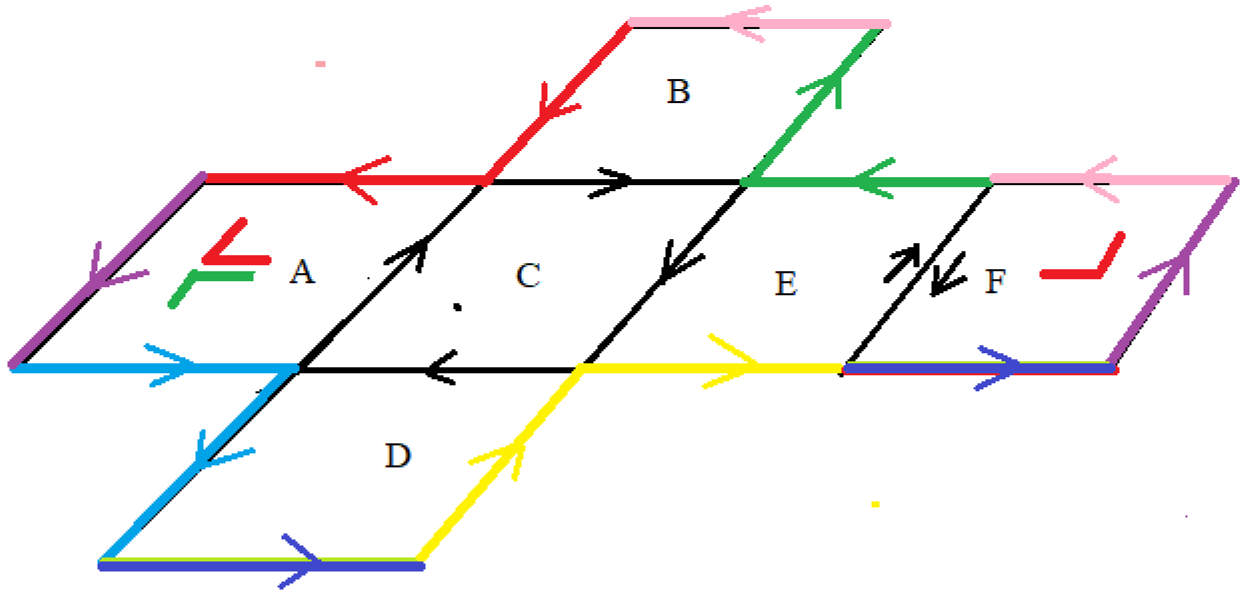


Fig.6

Il contorno del contorno vale sempre zero.

In secondo luogo vorrei mostrare che, passando da una stanza in una dimensione a una in altra dimensione, si entra un mondo capovolto, speculare, sinistra-destra o alto-basso.

La legge del contorno è facile da spiegare. In tutte le stanze (qui sono sei, le sei facce del cubo), si orienti la superficie alla stessa maniera, cioè in modo da percorrere i segmenti-parete in senso (per esempio) antiorario. In Fig.6 tutti i sensi di circolazione stanza per stanza sono coerenti, tranne quello della stanza C che si trova ad essere orientata in orario. Ma, se la stanza C è cocciuta e continua ad orientarsi in senso antiorario, abbiamo che le parenti interne non hanno un orientamento, in quanto i due orientamenti opposti si cancellano. Ciò avviene, infatti, anche per la parete EF. ***In altre parole, la somma di tutti i contorni, interni ed esterni, si riduce al contorno esterno, orientato in senso antiorario.*** Le pareti interne contano zero. Assegnando valore 1 a un lato percorso in senso antiorario, e -1 a un lato percorso in senso orario, si trova che la somma totale del contorno vale 14.

I colori sono assegnati in modo che, una volta costruito il cubo, i segmenti da "incollare" insieme abbiano lo stesso colore.

Ma se così facciamo, vediamo che le pareti che hanno lo stesso colore, per esempio giallo, una volta unite sono orientate in senso opposto: il segmento giallo della stanza D va verso la base del cubo, il segmento giallo in E sale verso il soffitto del cubo. E così tutti gli altri spigoli del cubo.

Ne segue che ogni spigolo è un segmento di valore 0, perché composto da due segmenti di valore 1 e -1.

Resta solo da spiegare perché questa legge venga telegraficamente espressa con le parole: " Il contorno del contorno vale sempre zero." La risposta è che il cubo (nel nostro caso) è l'oggetto **il cui contorno sono le sei facce** che lo delimitano. **Il contorno del contorno è invece costituito dal totale dei dodici spigoli** che, percorsi ciascuno due volte in senso opposto danno somma zero.

Una conseguenza riguarda la figura L rossa nella stanza F, la quale ha due lati, uno orientato nello stesso senso antiorario del segmento parete violetto, l'altro, alla base, perpendicolare, rivolto verso il centro della stanza. Supponiamo che in tutte le stanze, una L sia orientata allo stsso modo. Ma se rovesciamo la stanza F facendo combaciare il suo lato violetto con quello della stanza A, vediamo che la parete violetta della stanza F è orientata in senso opposto a quella della stanza A (già sappiamo che se facciamo la somma sul contorno le pareti si cancellano a coppie), e anche la L rossa (nella stanza A, ma proveniente dalla stanza F) sarà orientata in senso speculare rispetto alla L verde propria della stanza A.

(Mary B.: "Tesoro, sei diventato mancino?")

4. Casa instabile in California.

(Questo breve dramma è più direttamente ispirato dal racconto di Henlein, omettendo le libertà che l'autore si è preso con la geometria.)

Mary T (Tridimensionale) e Edwin T. Triakis sono sposi felici che cercano una casa non banale. Crispin T. Tetrakis è un geniale architetto amico di Edwin, e gli confessa di avere un progetto di una casa in quattro dimensioni. Persino in California, la cosa è reputata bizzarra. Tetrakis avrebbe anche i soldi per costruire la casa, e di fatto l'ha già quasi ultimata, ma non trova nessuno che ci voglia abitare. Sarebbe lieto di regalarla alla coppia. I due sono estatici e vanno a visitare la casa in costruzione. Tetrakis li avverte che proprio oggi si eseguirà l'opera segretissima di erigere la casa nello spazio a 4D.

Il trio arriva in una zona vicina poco abitata, e i due vedono una casa bella ma abbastanza strana: qualcosa come la "Casa sulla cascata" di Frank Lloyd Wright. A Mary piacquero le pareti multicolori, ma fu stupita di vedere solo due porte **(a, d –** non visibile nel disegno**)** e due porte-finestre **(b,c)** esterne.

Decise subito che A sarebbe stato il vestibolo, C il salotto, D una camera per gli ospiti, G una spaziosa cucina abitabile, H i servizi, B camera matrimoniale, E studio di Edwin, F cantinetta. Il garage sarebbe stato costruito in un secondo tempo, separato dalla villa principale.

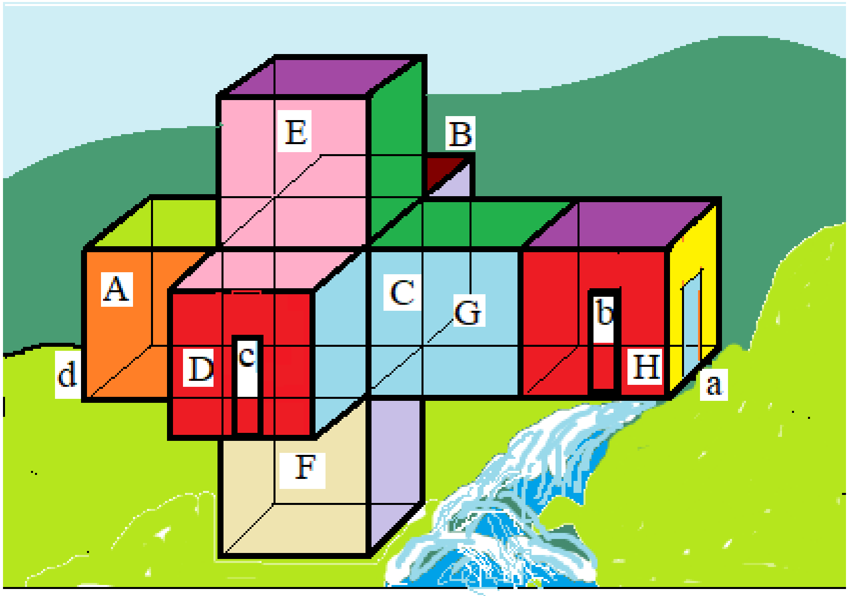


Fig.7

Villa Triakis come appariva ai primi visitatori.

Ritornando alla questione delle porte, Tetrakis la rassicurò dicendole che di porte-finestre ne avrebbe potuto costruire quante voleva, ma lo disse con una sorta di ghigno che a Mary non piacque per niente. Comunque, per compiacerla, Tetrakis diede ordine che si mettesse subito una porta-finestra in ogni parete esterna. La pareti erano modulari e ci volle meno di un baleno.   Quando tutto fu a posto e i primi mobili di fortuna, provveduti da Tetrakis, furono sistemati, questi disse solennemente: “Attenti, che ora viene il bello!”. Ma Mary si oppose fermamente, con grande delusione di Tetrakis. A lei la casa andava bene così come era. Tetrakis protestò che i patti erano quelli, ma Mary, col fascino che anche le donne tridimensionali posseggono, lo ammansì. Per quella sera, dopo una piccola celebrazione, Mary e Edwin si ritirarono nella camera B, e Tetrakis dormì nella camera D.

Dire che dormirono sarebbe un’esagerazione. Verso le due del mattino si sentì uno scossone, modesto, ma pur sempre avvertibile. Si era verificato un terremoto, ma la felice coppia Triakis non si preoccupò troppo, perché la casa sembrava aver resistito bene. Si incontrarono comunque tutti nella sala C. Tetrakis appariva preoccupato. A furia di minacce e moine, finalmente i due seppero il perché della sua preoccupazione. Affacciandosi alla finestra **c** non aveva visto l’affascinante panorama Californiano, ma l’interno della camera H, i servizi. Mary corse a guardare fuori dalla finestra che era stata rapidamente costruita nella parete azzurra di D, vide (il lettore lo saprà già) l’interno della camera G, e svenne. Edwin corse per uscire dalla porta **a**, ma quando la aprì inorridì: al di là della porta di servizio c'era il vestibolo A. Inoltre aveva avuto come un capogiro e si accorse di essere diventato l'immagine speculare di se stesso.

Qui Tetrakis dovette spiegare: la casa da lui costruita in tre dimensioni era predisposta per essere eretta in quattro dimensioni e quindi era instabile nella quarta dimensione. Il terremoto aveva causato il problema. Ora la casa si ergeva nella quarta dimensione, nella sua gloriosa forma di Tesseratto. Ma la vista dalla sua finestra gli aveva ricordato qualcosa che lui aveva dimenticato nella progettazione.

Il Tesseratto.

Qui è forse necessaria una spiegazione per coloro che in matematica sono un po' schizzinosi. Chi ci dice che un Tesseratto sia veramente composto di otto cubi con 16 vertici connessi nel modo che abbiamo mostrato, e che il suo sviluppo in tre dimensioni sia quello che abbiamo descritto, e che ora rappresento di nuovo da due punti di vista per fare vedere qualcosa di più della disposizione dei colori?

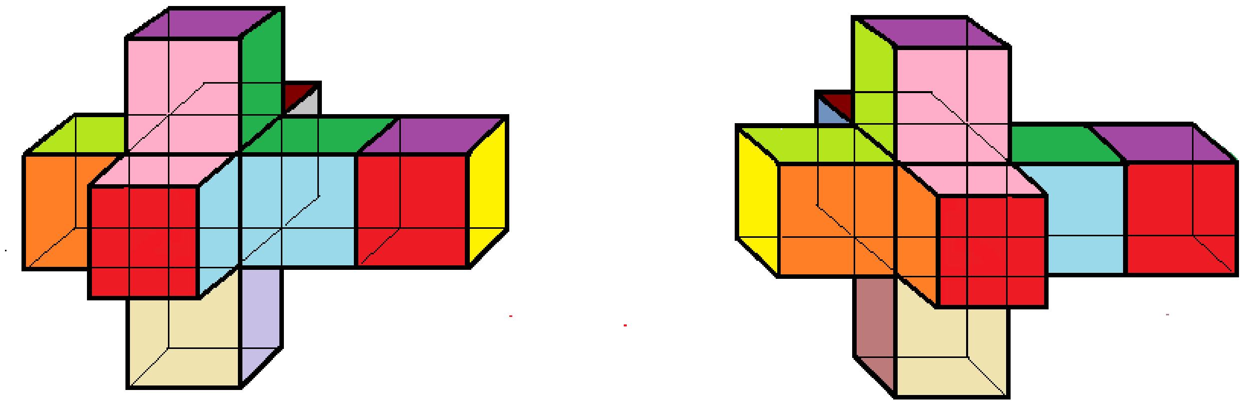


Fig.8

Sviluppo tridimensionale del Tesseratto da due punti di vista.. Per ottenere il Tesseratto autentico in 4D, occorre incollare fra loro le facce che hanno lo stesso colore, faccia a faccia.

Per spiegarlo, darò l'illustrazione più semplice e intuitiva che ho trovato. Essa risale almeno alla pubblicazione edita da **H.P. Manning e T.F. Blanchoff,** "*The Fourth Dimension simply explained", 1910, Pag.47*). La pubblicazione è una collezione di saggi per una competizione lanciata dallo *Scientific American*. Il saggio da cui l'ho tratta fu scritto da "**Essayons**", pseudonimo del **Tenente Colonnello Graham Denby Fitch**, del Genio Americano). La spiegazione non è rigorosa, ma non richiede altro che una delle quattro operazioni.

Si parte con un'**analogia**. Come si fa a passare da un punto a un segmento? Si sceglie una direzione qualunque, e si mette un secondo punto a una distanza a piacere, **a.** Passando da 0 dimensioni a 1, abbiamo ottenuto un segmento e due vertici. E ora, come si fa a passare da un segmento a un quadrato? Si prende il nostro segmento e lo si fa viaggiare perpendicolarmente a sé stesso per una distanza eguale alla sua lunghezza **a**. Passando da 1 dimensione a 2, abbiamo un quadrato, quattro vertici, quattro angoli retti, quattro lati eguali ad **a**. E come si fa a passare da un quadrato a un cubo? Prendiamo il quadrato e lo facciamo viaggiare perpendicolarmente a sé stesso per una distanza pari ad un suo lato qualsiasi (sono tutti eguali). Passando da 2 dimensioni a 3, abbiamo un cubo con spigolo **a**, e otto vertici. In altre parole, passando da una dimensione **n** alla dimensione **n+1** si *raddoppia il numero di vertici*, somma del numero di vertici dell'elemento iniziale e di quello finale, che sono identici. Il risultato generale valido per ogni numero di dimensioni **n**, è quindi eguale a **2^n**, dove **n** è il numero di dimensioni. Ma vorrei far notare che, anche se la rappresentazione del passaggio da 2 a 3 dimensioni è pienamente comprensibile, si tratta pur sempre di una rappresentazione in proiezione. Quindi possiamo fare, per così dire, una proiezione della proiezione per passare dal cubo al Tesseratto. Dobbiamo semplicemente spostare il cubo *perpendicolarmente* a sé stesso (nella direzione w, che *non esiste* nel nostro mondo in 3D), di una distanza pari alla lunghezza dello spigolo **a**, ciò che non è evidente in figura, fino ad un altro cubo identico, raddoppiando così il numero di vertici, che diventano 16.

"Una figura vale più di mille parole", dicono i Cinesi. Ecco la figura.

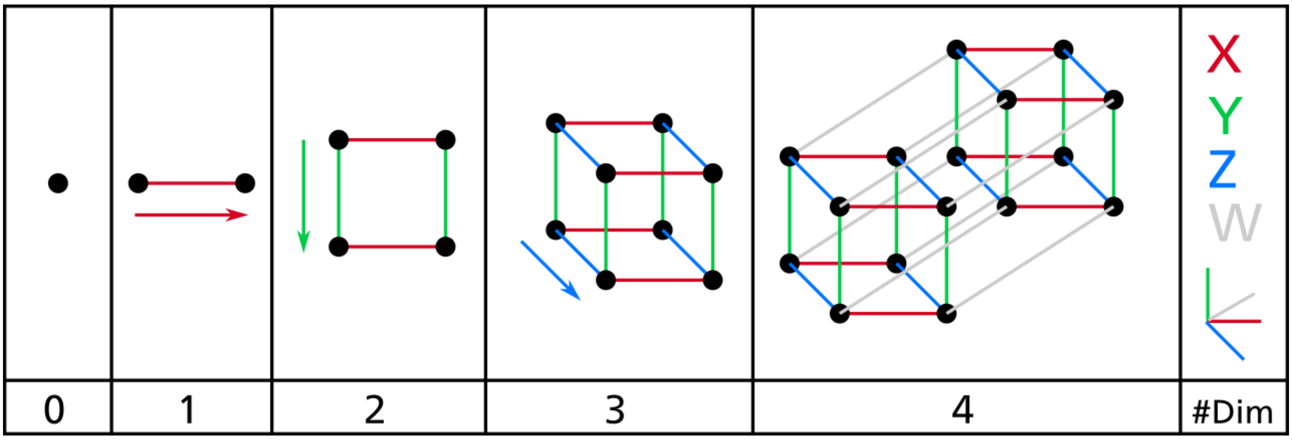


Fig.9

Come passare da un punto a un Tesseratto. L'asse **w** in quattro dimensioni è perpendicolare agli altri tre assi. In effetti, abbiamo a che fare con un "cubo" e tutti gli angoli che entrano nella nostra costruzione sono angoli retti, e tutti i lati sono eguali e lunghi **a**, come è evidente nel passaggio a due dimensioni, come si comprende dal passaggio a tre dimensioni, e come è impossibile capire nel passaggio a 4 dimensioni, in cui i lati grigi appaiono più lunghi.

Il punto chiave è come passare da 3 a 4 dimensioni. Notiamo però che in tutte queste costruzioni ottenute ***spostando l'oggetto in direzione "perpendicolare, di una distanza a***, a partire dal punto iniziale, come in Figura 9, avvengono sempre le seguenti trasformazioni:

- Ogni vertice V diventa uno spigolo S;
- Ogni Spigolo S diventa una faccia F;
- Ogni faccia F diventa un Cubo C;
- L'oggetto di partenza è identico a quello di arrivo.

Possiamo quindi costruire la semplice tabella in cui le incognite, cioè i numeri totali di elementi del Tesseratto, sono nella quinta colonna, somme dei contributi delle colonne 2, 3 e 4. Si noti che le colonne 2 e 4 sono identiche, perché i due cubi in 3D a cui si riferiscono sono identici.

	Numero di elementi del cubo iniziale	Numero di elementi aggiunti dalla trasformazione degli elementi precedenti	Numero di elementi del cubo finale	Somma, cioè numero degli elementi nel Tesseratto
V	8	-	8	**16**
S	12	8	12	**32**
F	6	12	6	**24**
C	1	6	1	**8**

Tavola 1

Abbiamo così trovato che il Tesseratto (colonna di destra) ha 16 vertici, 32 spigoli, 24 facce quadrate e, soprattutto, 8 cubi sul contorno, quelli che compaiono in figura 7 e 8 (3)

Se vogliamo avere un'idea di come appaiono le proiezioni del Tesseratto in tre dimensioni possiamo ricorrere a una seconda **analogia**. Vediamo dalla figura 9.4 che il tesseratto è costituito da due cubi i cui vertici sono opportunamente congiunti da 32 connessioni, tutte tra loro perpendicolari, di cui 8 grigie (nuove), e 24 colorate (dalla generazione precedente). Possiamo allora pensare di cambiare prospettiva a nostro piacimento, pur di mantenere i due cubi e le 32 connessioni (gli spigoli). Per esempio, possiamo far entrare un cubo nell'altro. Non è scandaloso: si veda in Fig. 10 quante proiezioni si possono fare di un cubo tridimensionale in Flatlandia.

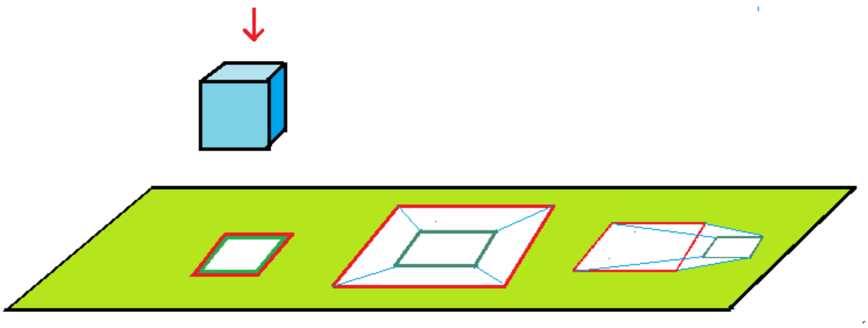


Fig. 10

Ispirandoci alla proiezione centrale del cubo in figura 10 possiamo pensare di inserire uno dei due cubi di Fig. 9.4 l'uno nell'altro:

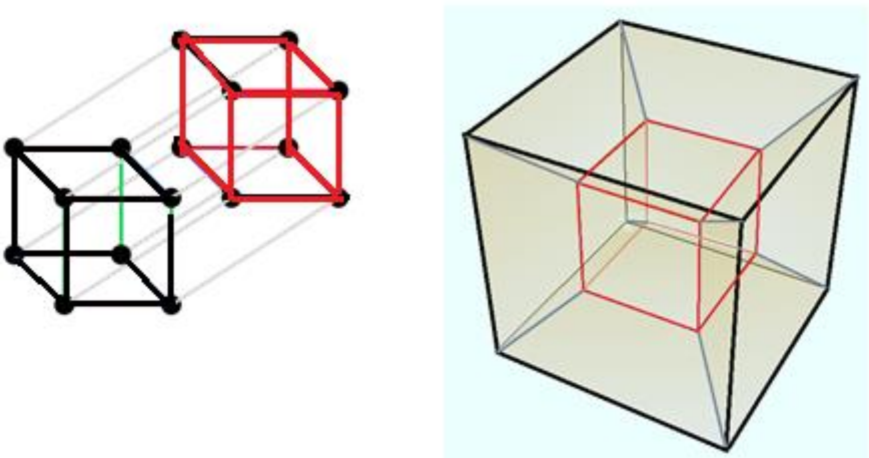
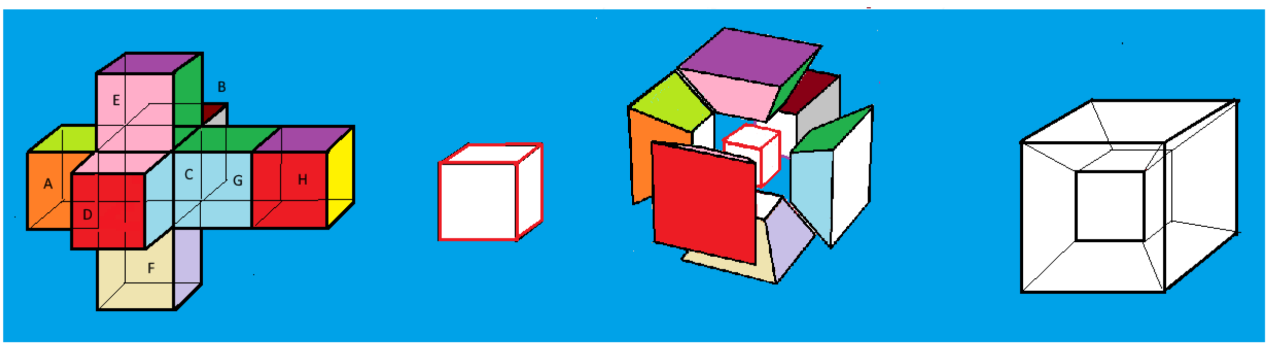


Fig. 11

A destra si vede la classica riproduzione del Tesseratto, che però è del tutto equivalente alla rappresentazione di sinistra. Solo, è una diversa proiezione. Inutile dire che il Tesseratto in quattro dimensioni è immutabile.

Per mettere il Tesseratto in relazione con le Fig. 7 e 8, possiamo guardare la seguente costruzione:



12a 12b 12 c 12d

La Fig.12 a rappresenta il Tesseratto sviluppato nei suoi otto cubi di contorno. La fig. 12b rappresenta il cubo centrale (C), bianco perché le pareti sono tutte interne. La Fig. 12c , come si vede, è costituita dai sei cubi adiacenti al cubo centrale, ciascuno con il proprio colore, e con alcune pareti interne bianche. Ma si tratta di solo 7 cubi. Dove metteremo l'ottavo, la stanza H? **E qui arriva la magia della quarta dimensione: l'ottavo cubo, la stanza H, è rivoltato come un guanto** (vedi Appendice) in modo da portare le sue facce colorate a contatto con quelle corrispondenti della figura 12c. Questo significa che tutte le pareti che vediamo dall'esterno sono pareti interne della stanza H. Ne segue che il Tesseratto, visto dall'esterno, appare bianco (Fig. 12d).

Ci si può divertire a vedere dove va a finire uno degli occupanti della casa quando crede di uscire all'esterno: entra nella camera H che abbiamo rivoltato come un guanto e non può mai uscire, pur supponendo che ogni parete abbia una porta finestra. Ma anche nel passare tra le varie stanze interne, le cose non vanno meglio. Per esempio un occupante che esca dalla parete giallina di F in 12a finisce al piano superiore, in D. Fortunatamente, nella stanza H abbiamo messo i servizi….

Anche qui, un'altra scoperta sgradevole aspettava gli occupanti: passando da una stanza all'altra attraverso una finestra esterna, la persona diventava l'immagine rovesciata di sé stesso.

C'era una sola cosa da fare: in tre svuotarono tre bottiglie di gin and tonic, poi andarono a dormire come massi.

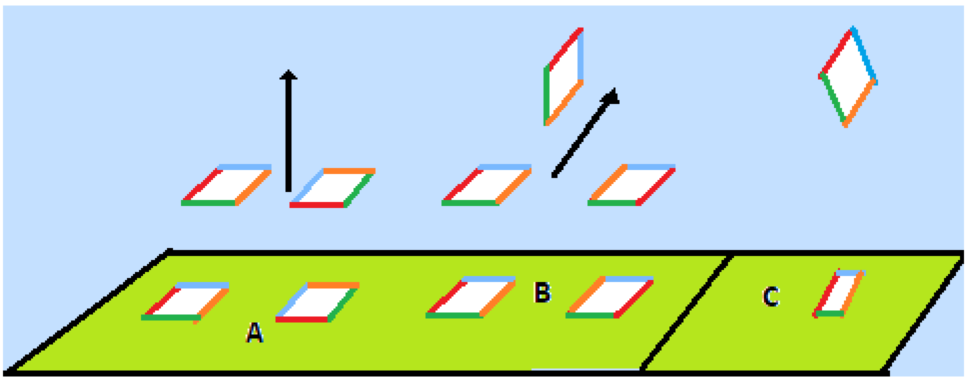
Qui il lettore può sempre scegliere fra il lieto fine (un altro terremoto che rimette le cose a posto, oppure il tutto non è stato altro che un incubo, con risveglio nella cara vecchia California) o il triste fine (con il trio che impazzisce e muore di fame prigioniero nella quarta dimensione). Sono ambedue conclusioni possibili, e con diverse varianti. Henlein scelse una terza via, che mi pare meno coerente con un racconto fin qui rigoroso: trovò il modo di uscire dalla casa in 3D. Ma dalla Scienza dovette passare alla Fantascienza.

Posso aver fatto qualche errore di colorazione qua e là, ma penso che nell'insieme il risultato sia corretto e permetta di controllare come si passi da una stanza all'altra stando all'interno, come il contorno del contorno sia nullo, e come passando alla stanza H un guanto destro diventi un guanto sinistro. Buon divertimento.

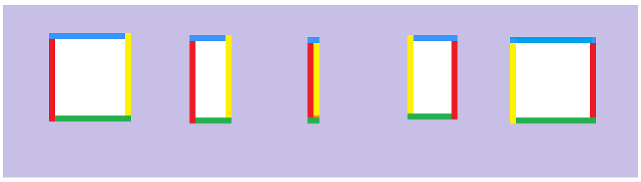
APPENDICE

La questione del "rivoltarsi come un guanto" può forse essere compresa meglio osservando una sequenza di immagini, in cui viene rappresentata una rotazione intorno alla quarta dimensione. Per noi, tre dimensioni sono le nostre dimensioni usuali, e la quarta non la percepiamo. Una rotazione intorno all'asse w, quindi, sarà quella che farà la differenza. Noi vedremo come si comportano le proiezioni nel nostro spazio tirdimensionale. Ma vanno notati due punti importanti:

1) L'asse w è per noi eccezionale, perché il nostro sottospazio a tre dimensioni è invariabile. Invece, per il tesseratto e i matematici che lo studiano in quattro dimensioni, l'asse w è un asse come gli altri, e quindi la rotazione intorno a w non è qualitativamente diversa da una rotazione intorno a uno qualunque degli altri assi. Si pensi ai Flatlandiani che vedono ruotare un quadrato intorno all'asse perpendicolare al loro piano. Non hanno magari cognizione di questo asse. Ma hanno idea dei fenomeni che si verificano. Però, molto probabilmente impazzirebbero a vedere le proiezioni di un quadrato intorno a un asse diverso dall'asse perpendicolare nello spazio 3D.



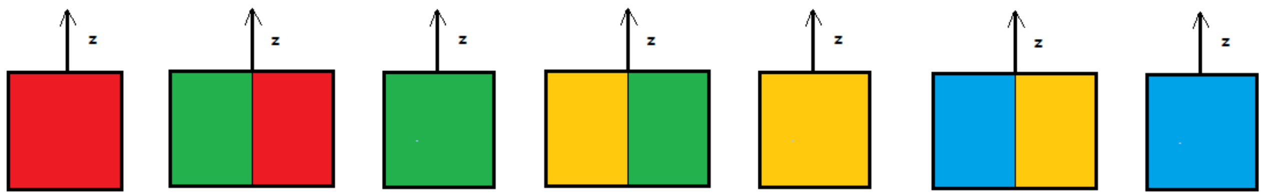
La rotazione in A , intorno all'asse z, può essere ottenuta grazie a una semplice rotazione su 90° in senso antiorario. La rotazione in B, intorno a un asse parallelo a Flatlandia non può essere ottenuta con rotazioni nel piano, perché le due immagini sono speculari. Infine, la rotazione con inversione speculare e contrazione non può essere ottenuta nel piano di Flatlandia, e solo qualche genio comprenderebbe che si tratta ancora dello stesso oggetto ruotato nello spazio 3D.



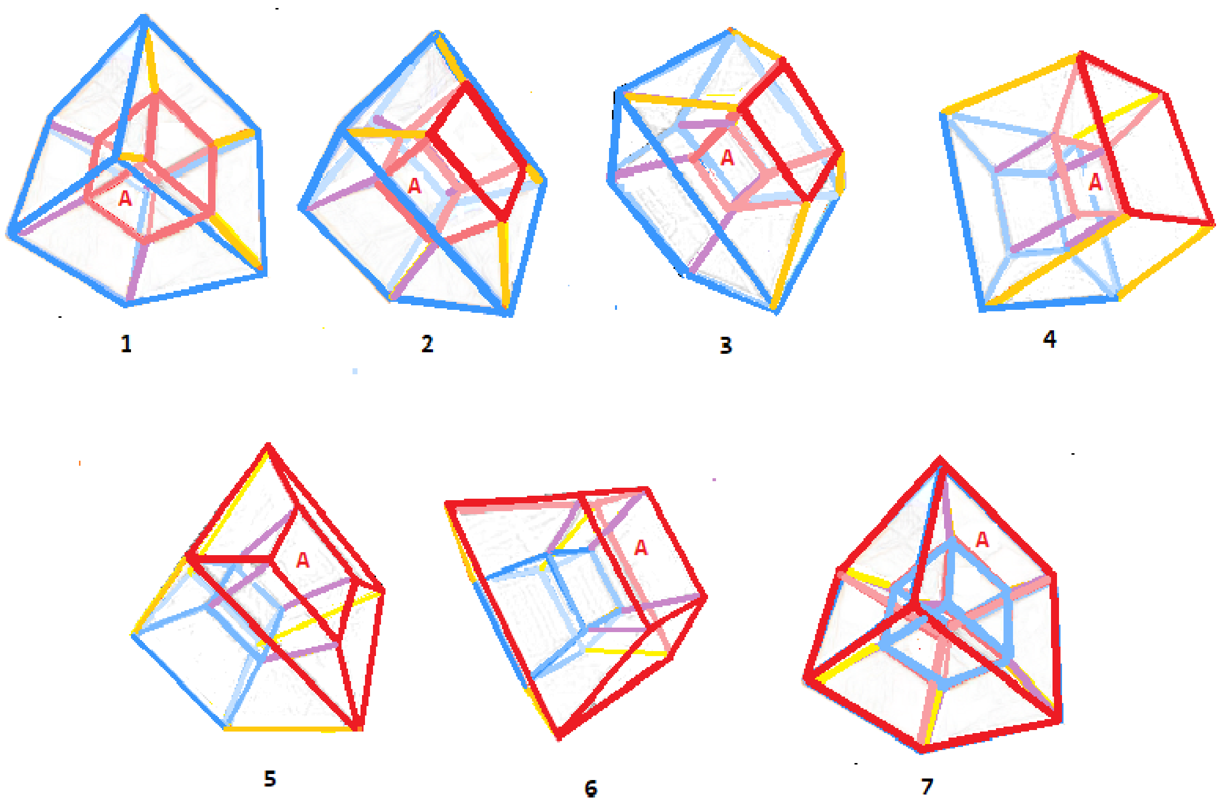
Ho aggiunto qualche disegno alla rotazione nel caso C. Il Flatlandiano avrebbe l'impressione che il lato rosso e il lato giallo si passino l'uno attraverso l'altro, come se ci fosse un tunnel in cui, nel corso di quella che noi sappiamo essere una rotazione rigida, i due lati, giallo e rosso si scambiassero continuamente di posto, mentre il tunnel si allunga e si accorcia. Noi sappiamo invece che un quadrato rigido e invariabile sta ruotando intorno a un asse nella terza dimensione. Lo si tenga presente per il seguito.

Un compito di chi vorrà entrare nella quarta dimensione sarà cercare di comprendere come sia possibile che una rotazione ordinaria , per esempio intorno all’asse z, vista nello spazio a quattro dimensioni, si trasformi nel guazzabuglio che mostrerò (mi scuso fin d’ora se le figure che ho tratto da un’animazione che compare in molti siti in rete saranno di difficile comprensione, o peggio conterranno errori, che l’attento lettore non mancherà di scoprire).

2) Se si prende un cubo e lo si fa ruotare intorno a un asse, che chiameremo z, perpendicolare a due facce del cubo come in figura (),, si vede che la rotazione riguarda solo quattro facce. Dei colori delle altre due facce non sapremo mai niente. Allo stesso modo, come vedremo, non tutti gli otto cubi che compongono il tesseratto parteciperanno allo spettacolo più interessante.



Ecco dunque che cosa succede facendo ruotare in tesseratto intorno all’asse w:



Come gli sfortunati bidimensionali o Flatlandiani , vedendo le varie proiezioni del 3-cubo, potevano essere lungi dall'immaginare che si trattasse sempre dello stesso oggetto tridimensionale, così a guardare le proiezioni 1-7 di un tesseratto in rotazione intorno a w noi siamo senz'altro autorizzati a non percepire che si tratti di un solo oggetto rigido che si muove nello spazio quadridimensionale. In effetti, tutto sembrano le immagini, fuorché la rotazione di un unico oggetto rigido (come del resto le fotografie di una stessa casa, prese girando intorno alla casa, possono dare l'impressione di essere fotografie di oggetti diversi). Ma certe regolarità si possono notate. Il numero di vertici, spigoli, facce, poliedri formati da sei facce contigue (deformazioni di cubi, come abbiamo visto in Fig. 12), è costante, come il numero e il colore degli spigoli che escono da un vertice. In effetti si tratta sempre di quattro spigoli che si dipartono da ogni vertice, formando tra loro quattro angoli, che nella realtà quadridimensionale sono sempre angoli retti.

Ad ogni modo seguiamo il movimento. In (1) abbiamo la classica forma del tesseratto (figura 11 a destra) con un cubo con spigoli rossi al centro e un cubo con spigoli blu all'esterno. La rotazione incomincia, e vediamo che il cubo rosso muove in direzione Nord-Est verso la superficie del cubo azzurro. In (2) la superficie del cubo blu è già un poco oltrepassata dalla faccia superiore del cubo, "il soffitto". In (3) il processo continua. In (4) il "soffitto è oramai una faccia del cubo e quattro facce con spigolo (nell'ordine) rosso-giallo-blu-giallo si sono rivoltate, mentre il cubo ha di nuovo la forma di un tesseratto, convenzionale, con un cubo al centro, il cui soffitto è la faccia A (che era il pavimento del cubo rosso), e il cui pavimento ha spigoli azzurri. Soffitto e pavimento sono connessi da spigoli gialli. Ma i colori sono inessenziali, servono sono a distinguere i cubi che si succedono al centro e all'esterno del tesseratto. Il fatto è che abbiamo già visto due immagini simili dello stesso tesseratto, ma il cubo esterno e il cubo interno non sono più gli stessi. L'ex-pavimento A continua a salire fino ad emergere in (5). Ora le pareti ai suoi lati si rivoltano come il dito di un guanto e il processo continua in (6), mentre da Sud-Est entra nel tesseratto il cubo azzurro. In (7) il processo è completo. Il cubo rosso rivoltato è ora il cubo esterno, e A è il soffitto. Il cubo azzurro è ora interno, e anche qui possiamo notare (osservando il colore delle connessioni che partono dai vari vertici) che soffitto e pavimento si sono scambiati di posto. Un nuovo cubo (azzurro) è quindi al centro. Continuando la rotazione, comparirebbe un quarto cubo interno, con soffitto a spigoli azzurri, pavimento a spigoli rossi (ma non sarebbe più la faccia che abbiamo chiamato A), e congiungenti pavimento - soffitto di colore giallo. Continuando il processo (ora siamo giunti circa a mezza via) si tornerebbe in figura 1.

Come si vede, solo quattro cubi su otto si danno il turno per passare nella parte centrale delle proiezioni del tesseratto, quando la rotazione avviene intorno a w (come quattro sole erano le facce del 3-cubo che si vedevano in una rotazione intorno all'asse z, o come due lati di un quadrato si scambiavano di posto in Flatlandia.

Spero che una riflessione su questo "ciclo" dei cubi e sul fatto che in 4D tutti gli assi sono equivalenti, posso aiutare qualcuno ad aggiungersi all'infima schiera di coloro che hanno un'intuizione completa della quarta dimensione, eletta schiera di cui farebbe parte nulla meno di Albert Einstein.

(Le figure da me disegnate sono tratte dall'animazione che compare su YouTube come https://www.youtube.com/watch?v=Z73uXPBUT7o, ma si trovano anche in altri siti)

NOTE

(1) L'affermazione di Poincaré:

Un homme qui y consacrerait son existence arriverait peut-être à se peindre la quatrième dimension.

è riportata da H.S.M. Coxeter nel suo volume "*Regular polytopes*"(1948), p.118.

(2) Il volonteroso lettore potrà provare ad estendere a 5 dimensioni il metodo indicato. Per questo basterà aggiungere una riga T in basso, contenente il numero di Tesseratti, e sostituire in seconda e quarta colonna i valori trovati per il Tesseratto: 16, 32, 24, 8, e 1 per T. Se tutto va bene, troverà che il **Penteratto o 5-cubo**, ha 32 Vertici, 80 Spigoli, 80 Facce, 40 Cubi, 10 Tesseratti. In altre parole, se si conoscono i dati dello n-cubo, si possono ricavare i dati dello (n+1)-cubo, il che significa che dietro il nostro semplice metodo si nasconde una formula di ricorrenza. Non è del tutto banale trovarla. Ma si faccia attenzione: i numeri divengono presto abbastanza grandi: l'8-cubo ha 256 vertici, 1024 spigoli e 1792 facce e altrettanti cubi eccetera.

(3) Secondo l'*Oxford English Dictionary*, la parola Tesseract è stata coniata e utilizzata per la prima volta nel 1888 da **Charles Howard Hinton** nel suo libro *A New Era of Thought,* dal greco τέσσερεις ἀκτίνες (téssereis aktines, "quattro raggi"), riferendosi alle quattro righe che congiungono ciascun vertice ad altri vertici. Lo stesso Hinton chiamava il Tesseract anche Tessaract.

Tuttavia non vedo nel suo libro la classica rappresentazione del Tesseract di Fig. 11: il libro è piuttosto difficile da seguire anche perché lo Hinton non ebbe la possibilità di fare figure a colori e i molti colori vengono chiamati per nome.