ELEMENTARI CONGRUENZE

1. Che giorno della settimana sarà Sant'Anna?

Se lavoriamo con i numeri naturali (= interi positivi), non ci sono numeri decimali. Semplicemente 10/7 = 1 + resto 3. Addizioni e moltiplicazioni funzionano bene, sottrazioni richiedono che il minuendo sia maggiore del sottraendo; le divisioni possono dare un resto.

Il "principe dei matematici" (C.F. Gauss) trovò che i resti hanno delle interessanti proprietà. Intanto, è evidente che i resti di una divisione di un numero qualsiasi D (dividendo) per un numero N (divisore) sono necessariamente più piccoli di N. Ci sono quindi N-1 possibili resti, oltre allo 0, valido per il caso in cui il dividendo sia divisibile per N.

Abbiamo allora delle belle proprietà facili da ricordare:
- il resto della somma è la somma dei resti
- il resto della differenza è la differenza dei resti
- il resto del prodotto è il prodotto dei resti.

Resti di cosa? della divisione per un numero qualunque. Dovremmo scrivere per disteso: **il resto della divisione della somma di due o più numeri per un divisore qualunque è uguale alla somma dei resti delle divisioni di ciascuno degli addendi per lo stesso divisore.**

Consideriamo per esempio i resti della divisione per 7.
Il resto della somma (10 + 24) **diviso sette** è eguale alla somma
Resto di 10 (diviso sette) + Resto di 24 (diviso sette).
Ora il resto della somma di 10+24 (=34) diviso 7 è 6, che è appunto la somma dei resti di 10/7 (=3) e di 24/7 (= 3).

É strano? No. Un numero qualunque può essere scritto come N= 7 n + (resto di N diviso 7); un

secondo numero come M= 7m + (resto di M diviso 7).
Sommiamo: N+M= 7n+7m+ resto di N + resto di M
Cioè N+M= 7(n+m) + resto di N + resto di M
Dividiamo per sette ambo i lati.
A sinistra abbiamo Resto (M+N). A destra 7(n+m) non dà resto, perché è un multiplo di sette, e rimangono Resto N+Resto M. Che è quel che volevamo dimostrare.
Se (resto di N diviso 7) + (resto di M diviso 7) fosse maggiore di 7, si dovrebbere togliere 7 per trovare un resto minore di 7. Si provi con 12+24: il resto della somma è 1, mentre la somma dei resti è 8. Ma 8 è maggiore di 7, per cui si deve sottrarre 7 e si trova 1, il risultato voluto.

Si provi a seguire lo stesso ragionamento per dimostrare la stessa cosa per il prodotto dei resti.

E tutto questo, serve a qualcosa?
Io penso che se ci si chiede questo, di già la nostra vita ha preso una sua direzione, che lascia poco spazio al godimento intellettuale. Ciò può non essere una tragedia, ma certo è una perdita.

Comunque.

Siete a pranzo con la vostra famiglia e zia Agata dice: “Bisogna andar a trovare nonna Anna il giorno della sua festa, 26 luglio. A proposito, che giorno della settimana è il 26 luglio?”. Voi sapete naturalmente che oggi 7 aprile è giovedì. Normalmente nessuno sa come fare a trovare che giorno sarà il 26 luglio. Molti non credono neanche che sia possibile. Altri ricordano l'esistenza di calendari perpetui, che però non sono mai a disposizione e con cui è facile commettere errori. Si vanno quindi a cercare almanacchi, calendari, agende. Magari non si trovano, magari sono quelli dell'anno prima. Magari nessuno ricorda che praticamente ogni telefonino cellulare contiene un calendario perpetuo e una piccola calcolatrice. Un disastro, una perdita di tempo. Eppure non è così difficile. Qui intervenite voi con sguardo fermo e occhio sereno e magari, ma non necessariamente, carta e matita.

La chiave di tutto è che, se oggi 7 è giovedì, tra una settimana (cioè sette giorni, cioè il 14) sarà ancora giovedì, e lo stesso sarà tra due, tre, cinque, diecimila settimane. Una settimana sono 7 giorni, 2 settimane sono 14 giorni, 5 settimane sono 35 giorni, 10000 settimane sono 70000 giorni. Se dividiamo per sette otteniamo sempre resto zero. Numero esatto di settimane: tra 7000 giorni, mille settimane sarà ancora giovedì.
Invece tra una settimana e un giorno (il 15 aprile) sarà giovedì e un giorno, cioè venerdì. Lo stesso tra due settimane e un giorno, tra mille settimane e un giorno.
Tra una settimana e due giorni sarà sabato e così via. Vedete che quello che importa è il resto della divisione per sette del numero di giorni tra oggi e la data di cui vogliamo sapere il giorno della settimana.
Resto 0 vuol dire lo stesso giorno di oggi (giovedì), resto uno vuol dire lo stesso giorno di domani (venerdì), per il resto 6 contate sulle dita: 1 - venerdì, 2 - sabato, 3 - domenica, 4 - lunedì, 5 - martedì, 6 - mercoledì. Resto 7 è come resto 0 ed è di nuovo giovedì.

Probabilmente già vedete quel che va fatto. Bisogna trovare quanti giorni ci sono fra il 7 aprile e il 26 luglio e dividere per sette. Questo ci dice quante settimane ci restano e, quel che più importa, ci dà un resto in giorni della settimana. Se non c’è resto, vuol dire che il giorno è lo stesso di oggi.

Quanti giorni ci sono dal 7 aprile al 26 luglio?
Ne restano 23 in aprile, 31 in maggio, 30 in giugno, 26 in luglio, totale 110. Dividiamo per sette, il resto è 5. Quindi il 26 luglio è il quinto giorno dopo giovedì (oggi), cioè un **martedì.**

Ah, dice zia Agata per mettervi in trappola, e l'anno prossimo?   Che giorno sarà il 26 luglio - he he he? Qui ci aiuta il fatto che il resto della somma è la somma dei resti. Ora un anno non bisestile dà resto 1 nella divisione di 365 per sette, il che vuol dire che nel passare da un anno all'altro tutte le date avanzano di un giorno della settimana.
Dunque l'anno prossimo il 26 luglio sarà **mercoledì.**
Potete estendere questo tipo di ricerca e farvi le vostre regole. Non dimenticate gli anni bisestili che fanno avanzare di due giorni, eccetto nei primi due mesi, quando il giorno aggiuntivo (29 febbraio) non è stato ancora aggiunto.
Il problema con il calendario è che i mesi hanno durate più o meno arbitrarie intorno ai 30 giorni e non ci sono ragioni matematiche o scientifiche perché ciò sia così. Ci sono ragioni storiche, non prive di interesse, ma per queste suggerirei di leggere una buona enciclopedia.

E se non avete carta e matita, ci si arriva lo stesso? Ma certo. Semplicemente, invece di sommare i giorni dei mesi e alla fine dividere per sette e tenere il resto, si possono sommare i resti della divisione per sette progressivamente, scartando i sette in modo da restare sempre con un numero inferiore a sette. Perché scartiamo i sette? Perché il resto della divisione per sette è 0, e aggiungndo o togliendo tutti i sette che vogliamo, il risultato non cambia.
Nel nostro caso si procederebbe così:
23 giorni in aprile, diviso sette fa 3, resto 2. Teniamo 2.
Maggio 31 giorni, diviso sette fa 4, resto 3, sommiamo al 2 che avevamo da aprile, fa 5, teniamo 5.
Giugno 30 giorni, diviso sette fa 4, resto 2, sommiamo al 5 che avevamo, dà 7, togliamo 7, dà 0.
Luglio, 26 giorni, diviso 7 dà 3, resto 5. Più lo zero che avevamo, troviamo ancora 5. Questo è il risultato finale, che avevamo già ottenuto.
Con un po' di esercizio lo si fa a mente così in fretta da sbalordire chiunque, in modo più veloce che cercare il telefonino, cercare il calendario, cercare la data.

2. La prova del nove.

Quando non c'erano calcolatori meccanici o elettronici, una volta, fatta la moltiplicazione, si faceva la prova del 9.
Spiegare è più lungo che fare, come in molti casi in matematica.
Supponiamo di fare 25 x 78 = 1950 (lo si può fare rapidamente a mente! Moltiplicare 78 per 100 e dividere per 4)
La prova del nove consisteva nel sommare le cifre di 25 (=7), quelle di 78 (15, e sommarle di nuovo =6) moltiplicare 6x7 = 42, sommare le cifre = 6. Ora si vede se la somma delle cifre di 1950 dà 6: infatti dà 15, e poi 1+5 =6. Come, dà 15? E il 9? **Dato che, come vedremo, stiamo cercando il resto della divsione per 9, possiamo aggiungere e togliere tutti i 9 che vogliamo, il resto della divisione non muta.**
Dato che i due numeri che abbiamo ottenuto sono eguali, possiamo dire che il risultato è esatto.
Ma perché si chiama prova del nove? Che cosa abbiamo fatto, veramente? E poi, il risultato è veramente esatto?

Noi abbiamo semplicemente messo in pratica il fatto che il prodotto dei resti (della divisione per 9) di moltiplicando e moltiplicatore è uguale al resto (della divisione per 9) del prodotto. Dunque per questo motivo si chiama prova del nove.

Qualcuno dirà che in realtà non abbiamo fatto nessuna divisione per nove. Come sappiamo quali sono i resti? Ebbene, il resto della divisione di un numero per nove è dato dalla somma delle sue cifre, scartando i nove e tutte le somme parziali che arrivano a nove, e se è il caso risommando le cifre del risultato, fino a che si arriva ad un numero minore di nove. Ad esempio, il resto della divisione per nove di 999888, scartando i nove e sommando i tre 8 (=24) e poi di nuovo sommando le cifre del risultato, dà 6. Si provi a dividere per nove manualmente e si vedrà che è proprio così.

Qui qualcun altro si potrebbe porre delle domande:
Come è possibile che il resto della divisione di un numero per nove sia dato dalla somma delle sue cifre (scartando i nove)?
É completamente affidabile, questa prova del nove?
E poi, magari si possono trovare altri simili prove, non del nove, ma del 3 o del 5 o del 7....

Per quanto riguarda la prima domanda, la risposta non è difficile. Abbiamo detto che il resto della somma è uguale alla somma dei resti ed il resto del prodotto è eguale al prodotto dei resti.

Ogni numero con cifre ABCD vuol dire in pratica 1000·A+100·B+10·C+D.

In primo luogo osserviamo che la divisione di 10 per 9 lascia resto 1.
Possiamo trovare il resto della divisione di 100 per 9 sia facendo la divisione con forza bruta, sia notando che il resto di 10 x 10 = resto 10 x resto 10. In ogni caso fa 1.
E 1000? la divisione diretta è più lunga, ma noi moltiplichiamo resto 10 x resto 10 x resto 10, e troviamo ancora 1.
Dunque il resto della divisione per nove del numero "ABCD" è dato dal resto della somma
(A x resto di 1000+B x resto di 100+ C x resto di 10 + D) = resto della somma (A+B+C+D). Anche questa somma potrà essere un numero della forma 10 q + r, e di nuovo avremo che il resto è (q+r). Insomma, tanto faremo che il resto sarà sempre lo stesso, e ci troveremo con un numero minore di 9.

Per quanto riguarda la seconda domanda, se la prova del nove sia affidabile, è chiaro che passando dai numeri ai loro resti della divisione per nove classifichiamo tutta l'infinità dei numeri naturali in 9 resti, contando lo zero. Quindi abbiamo perduto una certa quantità di informazione. Infatti, dalla prova del nove non possiamo ricostruire l'operazione originale. Dato poi che si tratta di resti, vediamo che se al prodotto che vogliamo verificare aggiungiamo (o togliamo) tanti nove quanti vogliamo, il suo resto della divisione per 9 è sempre lo stesso. (Nell'esempio fatto, se avessimo detto che 25 x 78 fa 1968 invece di 1950, la prova del nove ci avrebbe detto che il risultato è giusto, e invece non lo é).

La terza osservazione è corretta. Ci sono anche prove del 2, del 3, del 4, del 5, ma, se provate a costruirle (operando sui resti), vedrete che dicono poco. La prova del 7 è troppo complicata, perché i resti della divisione di 10 per 7, di 100 per 7 eccetera, non sono immediati da ricordare. C'è però una prova che funziona bene, quasi come quella del nove, ed è quella dell'undici.

Qui bisogna osservare che il resto di 10/11 dà 10. Ma potremmo anche dire che dà -1, nel senso che manca un'unità per arrivare a 11.
A questo punto abbiamo la chiave in mano. Il resto di 100/11 sarà 1, a cui si può arrivare o facendo la divisione e trovando che 100/11 = 9 con resto. Ci si può però anche arrivare facendo il quadrato del resto di dieci, cioè (-1)(-1)=1.
Abbiamo quindi, chiamando R_{11} il resto della divisione per 11:
R_{11} di ABCD =
R_{11} di 1000 x R_{11} di A + R_{11} di 100 x R_{11} di B + R_{11}di 10 x R_{11}C + R_{11}D =
(-1)A + (+1) B + (-1) C + D.

Perché ABCD sia divisibile per 11 (cioè $R_{11}(ABCD)=0$) occorre quindi che $-(A+C)+(B+D)=0$.
In conclusione, la somma delle cifre di posto dispari meno la somma delle cifre di posto pari dà zero. O, se si vuole, la somma delle cifre di posto pari è uguale a quella delle cifre di posto dispari (da qualsiasi parte incominciamo a contare).