TRE VARIAZIONI
SUL TEMA DELLA DIVISIONE

Non c'è dubbio che per lo scolaro medio la divisione sia l'operazione più temuta tra le quattro operazioni, e che un gran numero di esseri umani non saprebbe come farla senza il sussidio almeno una piccola calcolatrice.

Tuttavia, se i nostri antenati non avessero mai pensato ad inventare l'operazione inversa della moltiplicazione, che è la divisione, quasi certamente la matematica come scienza, arte, grande gioco non esisterebbe. Ci sarebbero solo delle tecniche per eseguire tre operazioni, che oggi sarebbero tutte eseguite da calcolatori elettronici. La divisione sarebbe sostituita da una serie di sottrazioni successive.
Invece, la divisione come noi la conosciamo, porta al concetto di divisori di un numero, di massimo comun divisore, e poi di numeri primi, che non hanno altri divisori oltre ad 1 e a se stessi. Una volta poi che incominciamo a parlare di numeri primi è come se una diga si sfasciasse, ed una folla di concetti nuovi si impone alla nostra riflessione. Qui, naturalmente, esamineremo solo i più semplici.

I. IL MASSIMO COMUN DIVISORE (MCD)

1. Il MCD

Assumendo che il mio eventuale lettore sappia almeno (matematicamente) camminare, ora vorrei parlare di Massimo Comun Divisore (MCD) di due numeri.

Ci sono due modi di trovarlo. Uno è per pura forza bruta, e consiste nel paragonare le scomposizioni in fattori primi dei due numeri e tenere solo i fattori primi comuni, ciascuno con il minimo esponente. Anche questo metodo, inutile dirlo, ha le sue applicazioni. Per esempio dalla scomposizione di un numero in fattori primi possiamo ricavare **quali** e **quanti** sono i suoi divisori e qual è la loro **somma** (Vedi Appendice 1)

Ma ora vorrei discutere il metodo di Euclide ("Algoritmo Euclideo") per trovare il MCD. Questo, dei due metodi è – penso - il meno intuitivo.
Supponiamo di voler trovare il MCD di 174 e 30. Si divide il maggiore, 174, per il minore, e si ottiene 5 con resto 24. Adesso arriva una frase che è comunemente imparata a memoria:"Il MCD di 174 e 30 è anche il MCD di 30 e del resto, 24". Allora applichiamo lo stesso metodo e dividiamo 30 per 24, troviamo 1 con resto 6. Ora il MCD di 174 e 30 è lo stesso MCD di 24 e 6. Dividiamo 24 per 6 e troviamo 4 con resto 0. 6 è quindi un divisore di 24, di 30 e di 174. Ed è il MCD di tutti quanti, in particolare 174 e 30.

Vediamo la frase che la maggior parte del genere umano studia a memoria. Il MCD dei due numeri

dati è anche il MCD del resto della loro divisione e di uno dei numeri (in verità di entrambi).
Non è difficile però arrivarci. Se chiamiamo M il MCD di due numeri X e Y, abbiamo che
X = A M, dove A è il quoziente della divisione di X per M, e anche Y= B M

In ogni caso:
M divide X,
M divide Y,
M divide X+Y , perché X+Y= A**M**+BM= (A+B)M,
M divide X-Y, stesso ragionamento (A e B sono in genere diversi, perché altrimenti staremmo cercando il MCD di un numero con se stesso, che è il numero stesso. Poiché questo non è vietato, abbiamo che M divide 0, una stranezza che può venire utile in seguito).
M divide la somma o differenza di aX+bY, con a, b qualsiasi. aX+bY= aAM+bBM = (aA+bB)M.
M divide quindi anche X-qY = AM-qBM = (A-qB)M

Ma se identifichiamo q con il quoziente di X e Y, allora X-qY non è altro che il resto R della divisione di X per Y. Infatti

$$\frac{X}{Y} = q \quad\quad con\ resto\ R$$

Per fare la prova della moltiplicazione dobbiamo moltiplicare q per Y ed aggiungere il resto R, cioè X= qY+R, o X-qY=R. Inutile notare che R < Y, altrimenti abbiamo sbagliato a fare la nostra divisione.

Usando la notazione X = MA, Y = MB, in cui ovviamente M , il MCD, è un intero non nullo, abbiamo:
Divisione 1, **X/Y= MA/MB**:
MA = q_1 MB + R1, cioè R1 = M(A-q_1B) = C_1 M
Ricordiamoci che noi vogliamo trovare M. Ma il resto C_1 M deve essere un intero minore di BM, quindi possiamo utilmente cercare M dalla
Divisione 2, BM/ C_1M che ci dà:
BM = q_2 C_1 M + R2, con R2 = (B- q_2 C_1)M = C_2 M
dove C_2M deve essere un intero minore di C_1M
Ora C_2M è minore di C_1 M, e possiamo cercare M dalla
Divisione 3 di **C_1M / C_2M**. Avremo
R3= (C_1- q_3C_2)M = C_3M con $C_3 < C_2 < C_1$
Eccetera.
Poiché dividendo e divisore, che sono numeri interi, progressivamente decrescono, ed M filtra attraverso tutte queste operazioni, il processo potrà terminare solo quando il coefficiente di M sarà 1. A questo punto M resterà solo, e dividerà il precedente dividendo lasciando resto =0. Avremo così trovato il MCD, il resto precedente allo 0. Non è una regola da impararsi a memoria: quando il resto è 0, vuol dire che il divisore usato divide esattamente il dividendo. E' inevitabile arrivare a zero, perché la successione dei resti decresce, ma si tratta di numeri non-negativi. Non c'è nulla che possa arrestare questa discesa, che quindi può solo arrestarsi arrivando a zero.

Per giustificare "meglio" l'ultimo passo e per complicare le cose, taluni autori (Courant & Hilbert non esclusi) affermano che MCD(a,0) = ...a. senza spendere una parola per chiarire questa stranezza. In effetti, a divide 0, nel senso che 0/a=0, e la prova è che 0·a= 0. In effetti a è il massimo divisore di a, e anche il massimo divisore COMUNE di a e 0 (poiché evidentemente, facendo la prova, si trova che tutti i numeri dividono zero. Ma, appunto, solo i numeri fino ad a dividono a). E' quanto si è già visto più sopra.

Abbiamo due possibilità: o M è diverso da 1 o è eguale a 1. Il caso forse più interessante (anche perché è unico) è quando MCD = 1. In tal caso i due numeri X e Y hanno un solo divisore comune, che è 1, e si dicono "primi fra loro". Ne parleremo più avanti.

Inoltre, M non viene mai scomposto nei suoi divisori, e, se è il massimo in partenza, resta il massimo comun divisore in arrivo. Non perde nessun divisore comune per strada, come si vede dalle varie operazioni che eseguiamo.
Per la stessa ragione non si aggiungono dei divisori per strada, perché abbiamo già fatto l'ipotesi che M sia il massimo dei divisori di X e Y, ed è quello che cerchiamo.

Facciamo la radiografia del metodo di Euclide supponendo di conoscere il MCD di 48 e 26,che è 2, e vediamo cosa succede nei vari passi.

Operazione	Dividendo X	Divisore Y	Quoziente, q	Resto R=X-qY
1	48 = 2·24	26 = 2·13	1	48 – (1·26) = **22** (2·24) - 1 (2·13)= 2(24-13)= 2·11
2	26 =2·13	22 =2·11	1	26 – (1·22) = **4** (2·13)- 1(2·11)= 2(13-11)= 2·2
3	22 =2.11	4 =2·2	5	22 –(4·5) = **2** (2·11) - 5(2·2)=2(11-10) =2
4	4	2	2	**0**

La quarta divisione è 4/2 = 2, resto zero. Cioè abbiamo trovato che il resto precedente a 0 è 2, il **divisore** comune di 4, e di tutti i resti precedenti, fino ai due numeri iniziali.

Come si è detto, due numeri qualsiasi hanno almeno 1 come divisore comune. Se questo è il loro MCD (e quindi l'unico divisore comune) diciamo che i due numeri sono **"primi fra loro".**
Proviamo con 23 e 14:

Primo numero	Secondo numero	Primo resto	Secondo resto	Terzo resto	Quarto resto	Quinto resto
23	14	9 (di 23/14)	5 (di 14/9)	4 (di 9/5)	1 (di 5/4)	0 (di 4/1)

Nel quarto resto non c'è posto per altri fattori, e quindi i numeri sono primi fra loro, anche se 14, in sè, non è primo. Altrimenti detto, 4/1 =4, con resto 0.

2. Il MCD come "combinazione lineare" dei due numeri di partenza.

Una bella proprietà è che il MCD può essere scritto come una combinazione (lineare, cioè con X e Y alla prima potenza) dei due numeri X, ed Y iniziali, cioè nella forma MCD = A X + B Y, dove A e B (che possono essere positivi o negativi, anzi, quasi certamente uno dei due sarà negativo) possono essere ricavati con più attenzione che sforzo.

Supponiamo di prendere 48 e 26 come numeri di partenza.

Primo resto: 48 - 26 = 22
Secondo resto: 26 – 22 = 4
Terzo resto 22- 5 x 4 = 2.
Che è il nostro MCD.

Primo numero	Secondo numero	Primo resto	Secondo resto	Terzo resto
48	26	22=48-26	4=26-22	2 =22 - 5 x 4

Cominciando dal fondo (e sarà sempre questa l'equazione su cui lavoreremo facendo continue sostituzioni, perché questa equazione parte bene ponendo **MCD = qualcosa**):

2 = 22 –5 x 4
Le regole del gioco sono:
1) Non spostare mai il MCD da sinistra. L'equazione deve sempre essere della forma: MCD = qualcosa
2) Quando riusciamo a trovare uno dei nostri resti (blu) dobbiamo lavorare su quelli, facendoli scomparire NON eseguendo le moltiplicazioni, ma sostituendoli dall'equazione precedente;
3) quando troviamo uno dei due numeri iniziali, ce lo dobbiamo tener stretto (in rosso).

Sappiamo che 4 = 26-22; mentre 22 = 48-26
Sostituendo
2 = (48-26) - 5 x (26-22)

Resta ancora da liberarci di 22, che è 48 - 26
2 = (48-26) – 5 (26-48+26) = **6 x 48 – 11x 26.**
Ora che suiamo arrivati ad un'espressione dei soli numeri iniziali, possiamo dire che

2 = **6 x 48 – 11x 26.**

In effetti 288 – 286 fa 2.

Suggerisco di fare molti esercizi, perché è assai facile confondersi in questo calcolo. Ma non si può fallire se si tiene ben in mente l'obiettivo finale, di esprimere il MCD di X, Y come AX + BY. Inoltre, questo risultato ci sarà utile diverse volte in seguito.

La dimostrazione data da Bézout partiva dal primo resto, e scriveva, cercando il MCD M di X,Y:

Sappiamo che $R1 = X - q_1Y$. In altre parole, R1 può essere scritto nella forma
$R1 = k_1X + l_1Y$ con $k_1=1$, $l_1 = -q_1$.
La seguente divisione produce:
$R2 = Y - q_2R1 = Y - q_2(k_1X + l_1Y) = (-q_2k_1)X + (1 - q_2l_1)Y = k_2X + l_2Y$.
Il procedimento può essere ripetuto per i successivi resti, R3, R4 etc, fino ad arrivare all'ultimo $Rn = k_nX + l_nY$, il risultato voluto.

3. Applicazione del risultato precedente quando X e Y sono primi fra loro.

Che succede se due numeri X e Y sono primi fra loro, cioè non hanno divisori comuni, cioè l'unico divisore comune (che è anche il MCD) è 1?

Allora abbiamo un risultato importante. Cioè si possono trovare due numeri a e b tali che:

$$aX + b\,Y = 1$$

Questa, non è altro che l'applicazione di quanto abbiamo appena mostrato, che

$$MCD = A\,X + B\,Y$$

Questa formula, che costituisce in parte il cosiddetto "Lemma di Bézout", è usatissima in teoria elementare dei numeri, come vedremo subito, perché ci aiuta a dimostrare un risultato anche più importante: se un numero **primo** divide il prodotto di due numeri, o divide l'uno, o l'altro, o entrambi.

Questo sarebbe il cosiddetto "Lemma di Gauss", il quale però, secondo una leggenda, si sarebbe limitato a dire che il risultato era ovvio. Per lui.

Scegliamo il caso più semplice: "Se un numero primo p è divisore di un prodotto $a\,b$, deve essere divisore o di a o di b". Perché p deve essere un numero primo? Se constasse di due fattori, uno potrebbe dividere a e l'altro b. Per esempio, 6 divide il prodotto 4 x 3, senza dividere né 4 né 3.

Supponiamo che p, pur dividendo ab, non divida a, per cui i due numeri (p, a) sono primi fra loro.
Vogliamo dimostrare quindi che p è un divisore di b.
Allora, come da risultato precedente, devono esistere due numeri h e k tali che

$$h\,p + k\,a = 1$$

Moltiplichiamo ambo i membri per b:

$$h\,p\,b + k\,a\,b = b$$

ma, per ipotesi, p divide $a\,b$, e quindi possiamo scrivere

$$q\,p = a\,b$$

ovvero:

$$h\,p\,b + k\,q\,p = b$$

da cui

$$b = p\,(h\,b + k\,q),$$

ove tutti i numeri sono interi e in cui si vede che p moltiplicato un certo numero intero ci dà b, cioè è un suo divisore. E con ciò resta dimostrato il lemma, che è estensibile a più fattori, raggruppandoli progressivamente a coppie: se p divide abcdef, o divide a o divide bcdef. Se non divide a, e quindi divide bcdef, o divide b o divide cdef eccetera, fino a ridursi alla coppia e•f ed alla nostra dimostrazione.

4. Teorema fondamentale dell'aritmetica (unica scomposizione in fattori primi)

Di qui discende immediatamente il "teorema fondamentale dell'aritmetica", che afferma che un numero intero può essere scomposto in un unico modo in fattori primi.

Supponiamo che un numero N sia decomponibile in due modi in fattori primi:

$$N = p_1 p_2 p_3 \ldots p_r = q_1 q_2 q_3 \ldots q_s$$

Siccome p_1 divide N, applicando il risultato precedente, vediamo che deve dividere uno dei fattori q_i, che però è primo e non ha divisori. Quindi, se p_1 divide q_i, i due numeri p_1 e q_i sono eguali e possono essere semplificati. Si rifà lo stesso ragionamento con p_2 e si semplifica un altro q. Si continua in questo modo fino a che il prodotto delle p si riduce a 1, e a destra non possono restare q, perché sono tutte superiori a 1. Dunque, magari con i fattori in diverso ordine, le due scomposizioni sono identiche.

5. Applicazione del lemma di Bézout a un problema caratteristico.

La vecchia fattoria.

Il problema che arriva adesso è molto più interessante di quel che non sembri a prima vista. L'idea è semplice. Nella vecchia fattoria ci sono conigli, cioè quadrupedi, e oche, cioè bipedi. Ci sono 20 teste e 50 zampe. Quanti sono i conigli, quante le oche? Naturalmente tutti i nostri conigli hanno quattro zampe e tutte le oche due.

Questo problema è un problema difficile, lo dico subito. Ma non del tutto. Intanto possiamo costruire uno schema per andare a tentativi. Per prima cosa teniamo subito conto del fatto che le teste rappresentano il numero di animali. Quindi se c'è un solo coniglio dobbiamo avere 19 oche.

Facciamo dunque una tabella tenendo conto del fatto che ci sono 20 animali.

teste	conigli	oche	zampe
20	0	20	40
20	1	19	42
20	2	18	44
20	3	17	46
20	4	16	48
20	5	15	50
20	6	14	52
20			
20	19	1	78
20	20	0	80

La risposta già l'abbiamo, e se anche la si trova così non vedo perché la dovremmo disprezzare. Ma intanto da questo esame vediamo diverse cose:

1) Costruendo la tavola vediamo che quando aumentiamo di uno il numero di conigli e quindi diminuiamo di uno il numero di oche, il numero di zampe aumenta di due. Non c'è niente di strano, un coniglio ha una sola testa come un'oca, ma ha due zampe più di un'oca.
2) Il numero di zampe non può mai essere minore di 40 (nel caso di tutte oche, perché ogni animale è come minimo un'oca e quindi ha almeno due zampe). D'altra parte il massimo numero di zampe è 80, che si raggiunge solo se abbiamo unicamente conigli nella vecchia fattoria.
3) Siccome tutti gli animali contribuiscono un numero pari di zampe (o due o quattro), la somma delle zampe sarà anche un numero pari.

Quindi **non ci sono soluzioni** se, date 20 teste, ci sono:
a) meno di 40 zampe
b) più di 80 zampe
c) un numero dispari di zampe, anche se compreso fra 40 e 80.

Ma c'è un modo di trovare che per avere 50 zampe occorrono appunto quindici oche e cinque conigli, oltre a questo sistema di procedere per tentativi?

1. Risposta semplice

La risposta è interessante. Qui vedremo il metodo più semplice, che, tra l'altro non è sempre adottabile. Poco oltre ne vedremo altri più generali e più complicati, che aprono uno spiraglio su campi molto avanzati della matematica.
Ora questo è il nostro metodo. Molto sovente in matematica si fa un tentativo estremo e si vede che succede. In questo caso ci chiediamo: se fossero tutte oche, quante zampe avremmo? 40.
Invece ne abbiamo 50. Dividiamo il numero extra di zampe (10) per la differenza in numero di zampe fra un coniglio e un'oca (2), perché ogni coniglio contribuisce solo due zampe in più. Il risultato è 5. Cioè le dieci zampe che ci sono in più appartengono a cinque super-oche che hanno quattro zampe, e che *sostituiscono* cinque oche bipedi. Queste super-oche sono appunto i conigli. Quindi abbiamo cinque conigli e le teste rimanenti (15) sono teste di vere oche.

Avremmo anche potuto dire: se gli animali fossero tutti conigli, le zampe sarebbero ottanta. Mancano 30 zampe, appartenenti a quindici mezzi conigli mancanti. Quindici dei venti conigli sono quindi solo semiconigli, con una testa e due zampe, cioè oche.

2. Usciamo dalla fattoria

Ci sono problemi simili, o il nostro metodo vale solo per oche e conigli? Naturalmente, potremmo avere struzzi ed elefanti, ma non è che le cose cambino molto.

Ma ci sono altri esempi. In tasca abbiamo biglietti da dieci e da 5 euro, in tutto 14, per un totale di **cento euro**. Quanti sono i biglietti da cinque e quanti i biglietti da dieci? Con il metodo indicato sopra vediamo subito (lo si può fare a memoria) che ci sono **otto biglietti da cinque e sei biglietti da dieci.**

Ma supponiamo di avere anche dei biglietti da 20 euro.

Qui vediamo che il problema si complica e diviene indeterminato, nel senso che ha più di una soluzione.
Supponiamo che ci sia un biglietto da venti tra i nostri 14: allora dovremmo distribuire 13 biglietti da 10 e da 5 in modo da avere 80 euro: risposta col metodo di cui sopra (che si può risolvere a memoria!!): abbiamo 10 biglietti da 5 e 3 da 10. Prima soluzione.
E che succede se abbiamo due biglietti da venti? Adesso dobbiamo distribuire 12 biglietti da 5 e da 10 in modo da avere 60 euro. Qui abbiamo 12 biglietti da 5 e zero biglietti da 10.
E che succede se in generale abbiamo "dei biglietti da venti" tra i nostri 14, e vogliamo sapere quanti biglietti da venti ci sono? Per incominciare non possono essere più di cinque, e già non ci resterebbe spazio per 9 biglietti di altre denominazioni. Notando che 5 è la denominazione più piccola vediamo che anche quattro biglietti da venti ci impicciano, in quanto ci dà spazio solo per quattro biglietti da 5.
Con tre biglietti da venti non c'è nessuna soluzione, perche ci restano 11 biglietti che devono valere 40 euro, e 11 biglietti da cinque (quelli di minor valore) valgono 55 euro.

Abbiamo dunque tre soluzioni egualmente accettabili:
0 da venti, 6 da dieci, 8 da cinque;
1 da venti, 3 da dieci, 10 da cinque
2 da venti, 0 da dieci, 12 da cinque.

Se chi ci assegna il problema ci indica che dobbiamo avere almeno un biglietto per specie, allora solo la seconda soluzione è accettabile. Questo naturalmente dipende dalla particolare scelta di numeri fatta nell'assegnare il problema. Con altro numero di biglietti o altra somma totale avremmo potuto avere un numero maggiore o minore di soluzioni accettabili.

Se il problema è presentato come indovinello, normalmente ci si dice:
Ho 100 euro in biglietti da cinque, da dieci e da venti. Poi dò un biglietto da venti, uno da dieci e uno da cinque a Arcibaldo. Quanti biglietti da venti, da dieci e da cinque mi restano? Ciò implica che ci sia almeno un biglietto da dieci, uno da venti e uno da cinque, e quindi la soluzione corretta è la seconda, e dopo di aver reso felice Arcibaldo restano 0 biglietti da venti, 2 da dieci, 9 da cinque.

4. Come rendere accettabili soluzioni non accettabili?

Se torniamo alla vecchia fattoria, ricordiamo che avevamo la seguente equazione:

4 x Conigli + 2 x Oche = 50 (zampe)

In più sappiamo che ci sono 20 animali in tutto, cioè

Conigli + Oche = 20.

Adesso facciamo una manovra di aggiramento e prendiamo alle spalle il problema, *dimenticando la questione delle teste. Vedremo che le sole zampe ci propongono un metodo di soluzione*. Noi sappiamo che il MCD di due numeri N e M può sempre essere espresso *(Lemma di Bézout)* come

MCD = A x M+ B x N,

dove A e B (uno dei quali è certamente negativo, perché N ed M sono entrambi eguali o maggiori del MCD) sono interi calcolabili senza troppa difficoltà.

Nel caso di N= 4 e M=2 il MCD è 2, e - usando il sistema imparato a suo tempo - è dato da:

4 x 1 – 2 x 1 = 2

Sarebbe bello in questa semplice equazione avere a destra 50, per avere qualcosa che assomigli alla nostra equazione di conigli e oche data più sopra. Semplice, 50 è 2 x 25, come si trova facendo la divisione.
Quindi, se moltiplichiamo tutta l'equazione per 25, troviamo

4 x 25 – 2 x 25 = 50

equazione naturalmente corretta che ci dà quella che potremo chiamare **soluzione base**: **25 conigli e (-25) oche.** *Con questo avremo risolto il problema delle zampe, ma non quello delle teste*.
Ora l'equazione è assai simile a quella da cui siamo partiti nella vecchia fattoria, e tutto andrebbe bene, se non fossimo restati con un numero negativo di (-25) oche. A rigore, 25 teste di coniglio positive più 25 teste di oca negative dovrebbe fare zero teste. In qualche modo, però, dobbiamo riuscire ad avere 20 teste, e un numero giusto di oche positive, anche perché le oche negative nessuno le vuole.

La nostra equazione, però, continua a dare 50 (zampe) se noi aggiungiamo oche, ricordando che intanto dobbiamo togliere conigli. Ma per lasciare il numero di zampe immutato, per ogni coniglio che togliamo dobbiamo aggiungere 2 oche. Quindi la nostra equazione resta invariata scrivendo:

4 x (25- k) + 2 x (-25+ 2k) = 50

Dove k sono i conigli che togliamo.
E quindi il numero dei conigli è dato da 25-k, quello di oche è dato da -25 + 2k, e la somma dei due numeri conigli + oche deve dare 20.

Cioè
25-k- 25 + 2k = 20, ovvero **"correzione del numero di conigli = numero totale di teste".**
E questo ci dice che **k = 20**. Ricordiamo che k non è il numero di conigli, ma la correzione al numero di conigli.
Risultato, ci sono (25-20) = 5 Conigli, e (-25 + 40) = 15 Oche, che è la soluzione che avevamo trovato da tempo, ma l'abbiamo trovata ora con il metodo più sofisticato possibile. Il quale ci dice anche che in ogni equazione CON NUMERI INTERI

$$xA+yB = N$$

dove x e y sono i numeri che cerchiamo, *N deve essere divisibile per il MCD di A e B.*

In qualche modo questo l'avevamo già visto, notando che il numero di zampe deve essere un numero pari. Però ne segue, cosa che può sembrare stupefacente, che l'equazione è **sempre** solubile se A e B sono primi fra loro, perché il loro MCD è 1 e tutti i numeri interi sono divisibili per 1.

Una seconda osservazione è che noi abbiamo ragionato sulle zampe ed abbiamo trovato che per ogni coniglio che aggiungiamo o togliamo dobbiamo togliere o aggiungere due oche. Se il problema fosse dato in astratto,

$$4x + 2y = 50$$

essendo x ed y numeri interi, dovremmo vedere che la correzione che ci porta al numero giusto y, chiamiamola Y, è legata alla correzione X, che ci porta al giusto numero x, dalla relazione $Y = -(4/2)X$. In altre parole, se nell'equazione sostituiamo

$4(x-X)+2(y+2X)$ otteniamo $4x-4X+2y+4X$, che sarebbe ancora eguale a 50.

In astratto, uno potrebbe dunque dire che alla soluzione di $Ax+By = N$ possiamo aggiungere una qualsiasi tra le soluzioni di $AX + BY = 0$ senza perturbare l'equazione di partenza. Cioè, sommando membro a membro

$$Ax + By = N$$

e

$$AX+BY = 0$$

otteniamo

$$A(x+X)+B(y+Y) = c$$

Di queste soluzioni X e Y ce ne sono infinite e rispondono alla forma $Y = -(A/B)X$ (proveniente dalla seconda equazione), e possiamo farle giocare in modo da soddisfare ad altre condizioni, come la $x+y=20$.
Però non è così semplice. Uno studioso di algebra sarebbe soddisfatto, ma noi no, perché vogliamo ancora dei numeri interi. Supponendo, per esempio, di voler risolvere

$$25X + 10Y = 0$$

la nostra soluzione sarebbe: $Y = -(25/10)X$. Ma non tutte le X vanno bene. Intanto per $X = 1$ otteniamo $Y = 2.5$, che non è intero. Potremmo allora dire che X deve essere un multiplo del denominatore 10, che non è altro che il coefficiente di Y. Funzionerebbe, ma perderemmo diverse soluzioni. Per esempio si vede subito che $X = 2$ ci dà comunque una Y intera, pur non essendo un multiplo di 10. E allora?
Intanto possiamo **semplificare** – (A/B) "dividendo numeratore e denominatore, come si usa fare, per il MCD", che vale 5, e nel nostro caso otteniamo $Y = -(5/2)X$. A questo punto si possono avere numeri interi solo se x è un multiplo di 2, cioè del coefficiente di Y (che è 10) diviso il MCD. A sua volta $X = -(10/25)Y = -(2/5)Y$, e Y ci dà valori interi di X solo se è un multiplo di 5, cioè del coefficiente di X diviso il MCD. Infine, notiamo che i segni di X e Y sono opposti.

La soluzione in forma generale è quindi:

$$\boldsymbol{x' = x + r\frac{B}{MCD(A,B)}}; \quad \boldsymbol{y' = y - r\frac{A}{MCD(A,B)}}$$

Dove r (positivo o negativo) va cercato in modo da soddisfare le varie condizioni accessorie, quali $x'+y' = 20$

Nel nostro caso, quindi:

$$25 - 25 + r\ (1-2) = 20$$

Da cui $r = -20$, $x = 25-20$, $y = -25+40$.

Naturalmente il bello di questo metodo di soluzione è che una volta soddisfatta la condizione che tra conigli e oche ci siano 50 zampe, possiamo trovare le correzioni alla soluzione base, di 25 conigli e (-25) oche dato qualsiasi numero di teste. L'equazione chiave è quella che ci dice che la correzione al numero di conigli C è eguale al numero di teste. Se invece che 20 teste ne avessimo 21, dovremmo inserirla nella soluzione base, e troveremmo 4 conigli e 17 oche.

Non so se qualcuno ha voluto seguirmi fino qui. Se qualcuno ci è riuscito, sappia che questo problema è il più semplice di un campo intero, e non banale, della teoria dei numeri, che porta il nome preoccupante di "analisi indeterminata" e fu introdotto da Diofanto, matematico greco di circa 1700 anni fa.

Va detto che circa mille anni dopo Diofanto, gli Arabi introdussero l'algebra. Questa dà un diverso modo per risolvere il problema. In effetti, a guardarlo bene, questo non è propriamente il problema di Diofanto, ma è già un problema preparato per l'algebra degli Arabi.
Il problema

$$ax + by = c$$

con a,b,c,x,y numeri interi sarebbe già sufficiente per Diofanto, un matematico così antico che ai suoi tempi non solo non si conosceva l'algebra, ma neanche si conoscevano ancora i numeri negativi, senza cui l'algebra non ci sarebbe. Per Diofanto, il problema di trovare i numeri di conigli ed oche accettabili dato il numero di zampe, indipendentemente dal numero di teste, è un problema completo e se ne può dare una soluzione elegante. Nella sua soluzione, che noi abbiamo seguito or ora, le teste, se avete notato, le facciamo arrivare dopo. Gli Arabi invece sarebbero andati giù pesanti ed avrebbero detto: "Le incognite sono il numero di conigli, chiamiamolo x, ed il numero di oche, chiamiamolo y. Ma:

$$x + y = 20, \text{ quindi } x = 20 - y$$

Sostituiamo x nell'equazione originale (avevamo da distribuire cinquanta zampe) , $4x + 2y = 50$, e otteniamo $4(20-y) + 2y = 50$. Riordiniamo le y e troviamo: $80-2y = 50$, cioè, in forma standard, $\mathbf{2y - 30 = 0}$.
Applichiamo la formula risolutiva e troviamo y (che è il numero di oche) = 15. Quello che volevamo.
Perché dovremmo preferire il macchinoso metodo di Diofanto per risolvere questo problema? Non c'è veramente un motivo. Se il problema ha una soluzione in numeri interi, l'algebra degli Arabi ce la dà. Il problema è che il sistema ci dà una soluzione anche se questa non esiste, senza suonare campanelli d'allarme. Dobbiamo poi rifiutarla noi applicando il nostro buonsenso.

Sia per esempio: numero di teste = 7, numero di zampe $23 = 4x + 2y$.
Abbiamo $x = 7 – y$. Sostituiamo nella seconda equazione ed otteniamo:

$23 = 4(7 – y)+ 2y = 28-2y$
In forma standard abbiamo $2y -5 = 0$, da cui $y = 2.5$ e poi $x = 7 - 2.5 = 4.5$.
Che ci troviamo infine con mezzi conigli e mezze oche a quanto pare non ne importa niente a nessuno, e in fondo se conigli e oche possono essere defunti è una soluzione anche questa.

II. DIVISIONE SENZA CARTA E MATITA.

Sono rari i bambini che non capiscono che se una madre ha 10 euro e cinque bambini a ciascuno di quali vuole dare una stessa somma, per sapere qual è questa somma occorre semplicemente dividere 10 per 5, ottenendo 2, la somma che ciascun bambino ottiene. Questo viene semplicemente capito, e penso che se non ci fosse nella nostra testa un meccanismo che ci fa capire quasi immediatamente la soluzione, sarebbe assai difficile spiegarlo. Comunque l'idea che la divisione ci aiuti a fare parti eguali di una data quantità è abbastanza chiara.

Un fatto interessante è che c'è un mezzo pratico (che per di più tutti conoscono) di dividere soldi in parti uguali in un gruppo di persone, anche se si hanno banconote e monete di diverso valore, e per di più senza usare carta e matita. In altre parole tutti cnosciamo intuitivamente la soluzione di un problema ben più complicato di quello di dividere sei mele fra tre bambini. E, per giunta, il metodo non richiede carta e matita.
Supponiamo di dover dividere 500 Euro in tre parti. Senza fare nessuna operazione matematica si mettono 100 euro sul tavolo per Carlo, 100 per Giorgio, 100 per Simonetta. Ne restano 200. Che si fa? Si cambiano i 2 biglietti da 100 in quattro biglietti da 50. Il trucco è quello di avere sempre un numero di banconote o monete *eguali*, che sia eguale o superiore al numero di ragazzi, in questo caso 3 - altrimenti qualcuno resta senza. Ora si danno 50 euro per uno a Carlo, Giorgio e Simonetta. Restano 50 Euro da dividere. Cambiarli in biglietti da venti non serve perché ne otteniamo solo 2. Allora cambiamoli in biglietti da 10. Ne diamo uno per uno ai tre ragazzi e ci restano due biglietti da dieci, che divideremo in 4 biglietti da cinque. Ora diamo un biglietto da 5 a ciascuno dei tre ragazzi e ci resta un biglietto da cinque. A questo punto tutti hanno un biglietto da 100, uno da cinquanta, uno da dieci, uno da cinque, per un totale di 165 Euro e ci resta un biglietto da cinque. Ora cambiamo il biglietto da cinque in monete da un euro e ne diamo una per uno. Ce ne restano due. Le dividiamo in monete da cinquanta centesimi e ne diamo una per uno, con che ne resta una, che cambieremo in monete da dieci: ne daremo una per uno e ce ne resteranno 2, che cambieremo in quattro monete da cinque centesimi. Ne daremo una per uno, e ce ne resterà una. A questo punto la cambiamo in cinque monetine da un centesimo, ne diamo una per uno e ce ne restano 2. Di monetine più piccole non ce ne sono e ci fermiamo qui. Ma intanto il risultato è che tutti avranno una banconota da 100, una da cinquanta, una da dieci, una da cinque, una moneta da 1, una moneta da 50 centesimi, una da dieci, una sa 5, una da 1. Totale, 166 Euro e 66 centesimi (con un piccolo resto). Si può controllare che dividendo 500 per 3 si ottiene appunto 166,66.. Insomma, non abbiamo fatto nessuna operazione matematica, ma il risultato lo abbiamo ottenuto.
Non disprezziamo questo metodo, che sta alla base della divisione e vale anche lavorando con basi diverse da 10.

Se si fa bene attenzione, dividendo 500 per 3 con carta e matita si fa quasi esattamente lo stesso. La differenza è che abbiamo solo, per così dire, banconote e monete da 100, da 10, da 1 euro, 10 e da 1 centesimo. Niente banconote e monete da 50 o 20 euro, da 2 euro, da 50 centesimi etc.
Per avere il nostro risultato, prima si divide 5 per 3, si trova 1 con resto 2. Adesso si "abbassa uno zero". Questo equivale a dire che abbiamo "cambiato" le 2 banconote da 100 che ci restavano in 20 banconote da 10. 20 diviso 3 dà 6, con resto 2. "Abbassiamo" un altro zero, cioè cambiamo 2 banconote da 10 in 20 monete da 1 Euro. E via dicendo. Questo "abbassare" zeri corrisponde a cambiare una certa quantità di monete in monete di taglio dieci volte più piccolo.

Qualcuno potrebbe dire: "Ma perché non cambiamo direttamente 500 Euro in monetine da 1 centesimo? Nessuno ce lo vieta, e poi dando un centesimo a Carlo, uno a Giorgio, uno a Simonetta, e poi uno a Carlo, uno a Giorgio ed uno a Simonetta e così via, vedremmo che alla fine ciascuno ha 16666 centesimi con l'avanzo di due. Il risultato, evidentemente è lo stesso. Il solo problema è che usando subito unità di un centesimo ci occorrono 50000 centesimi e poi dobbiamo fare il giro di

Carlo, Giorgio e Simonetta quasi 17000 volte. Ci vorrebbe un giorno a lavorare assai svelti, mentre usando unità intermedie la distribuzione la si fa in qualche minuto, a meno di dover andare ogni volta in banca a cambiare le banconote e le monete.

Questo, insomma, è il meccanismo della divisione. Se non perdiamo la testa possiamo imparare a fare divisioni in basi diverse, un'operazione che, vi garantisco, meno di una persona su mille sa fare al primo colpo.

Supponiamo di avere una nuova moneta, il Baiotto, che viene solo in banconote da 64, 8, 1 Baiotto e monete da 1/8 e 1/64 di Baiotto. (Un tempo c'erano monete che si chiamavano Baiocchi, ma erano diverse. Comunque, qualche bisnonno forse ricorda almeno il nome).
Supponiamo di avere 128 Baiotti in 2 banconote da 64 Baiotti e di volerle dividere per tre. Anzitutto le cambiamo in banconote da otto Baiotti. Quante saranno? Ogni banconota da 64 baiotti equivale a otto banconote da otto Baiotti e quindi avremo 16 banconote da otto Baiotti. Ne possiamo dare **cinque** per uno ai nostri amici e ci resta una banconota da otto. La cambiamo in otto banconote da un Baiotto. Ne diamo **due** per ciascuno agli amici, e ce ne restano 2. Adesso cambiamo i due Baiotti in monete da 1/8 di Baiotto, e ne avremo 16. Ne diamo **cinque** per uno ai tre, e ne resta 1.
A questo punto ognuno ha 5 banconote da otto Baiotti, 2 da 1, 5 da un ottavo e resta una monetina da 1/8. Cambiamo in 8 monete da 1/64 e ne diamo due ciascuno. Ne resteranno due.

In base 8, 8 si scrive 10, 64 (=8 x 8) si scrive 100, 512 si scrive 1000 e così via. Mentre il numero "ABCD" in base 10 significa 1000A + 200B+10C+D, in base 8 significa 512 A + 64 B + 8C + D. Questo spiega perché abbiamo scritto 200 per indicare due banconote da 64 baiotti. In quanto ai decimali, 1/8 si scrive 0.1, 1/64 si scrive 0.01 eccetera.

L'operazione che abbiamo fatto, in base 8, è la quasi impossibile (per la maggior parte del genere umano):

200/3 = 52.52 con resto 0.02 (Base 8)

Vedete un po' se riuscite a ricostruire l'ultimo passaggio. Magari provare continuare a scrivere decimali, continuando a cambiare i resti in monete otto volte più piccole (supponendo che esistano).

Da notare che in base 8 le cifre sono solo da 1 a sette e abbiamo la corrispondenza:

Base 10:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Base 8:	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17	20	21	22	23	24

Con questa idea della distribuzione ben chiara come base della divisione, possiamo anche risolvere un problema che, sono certo, manderebbe in tilt quasi tutti gli adulti (non madri) nel giro di un chilometro, perché hanno dimenticato come risolverlo. Il problema è quello della madre che, per qualche ragione, vuole dare ad un figlio il doppio di caramelle dell'altro, per esempio perché uno è stato cattivo, o perché uno è più grande ed ha già una paga sua. Comunque vediamo come procede la madre che vuol fare questo tipo di distribuzione. È semplice, ad ogni giro dà due caramelle al figlio buono e una al figlio che l'ha fatta disperare. E così fino a che ha esaurito le caramelle. Dunque ad ogni giro dà tre caramelle, due all'uno, una all'altro. Quanti giri farà? Facile, si divide il totale per tre. Quindi sarà meglio se il totale sarà divisibile per tre, oppure la madre resterà con una o due caramelle che si mangerà lei. Se le caramelle sono 50, dividendo per tre si trova sedici con resto due, che la madre si tiene. Dunque sedici giri in cui il buono si prende 2 caramelle al giro, totale 32, ed il cattivo una per giro, 16 in tutto. Si può verificare che i numeri sono giusti. L'idea funziona anche se bambini sono tre (il buono, il brutto e il cattivo) o quattro o cinque.

In verità si può anche ragionare in altro modo: il bambino buono vale per due bambini. Quindi si fa come se la madre dovesse distribuire le caramelle fra tre figli. Alla fine della distribuzione restiamo con tre mucchietti eguali di caramelle, e il buono ne piglia due.

Cioè un simile problema che è un po', solo un po' meno immediato: è il caso in cui la mamma vuol dividere le caramelle in modo che alla fine della distribuzione uno dei due figli ne abbia, per esempio, 5 più dell'altro. Qui l'idea della distribuzione non va tanto bene. Pensateci un momento. Per esempio, ci sono 35 caramelle, e la mamma ne vuol dare ad un figlio cinque più che all'altro. E' solo alla fine che vedremo se la distribuzione è stata fatta come volevamo.

Ma è proprio vero che lo si può vedere solo alla fine? Qui c'è una specie di blocco mentale in azione. Se la madre desse subito le cinque caramelle a Giorgio, resterebbe poi con trenta caramelle che potrebbe dividere in parti eguali tra Giorgio e Carlo.

Altro modo:
Le caramelle di Carlo sono eguali al numero di caramelle di Giorgio meno cinque. Quindi Giorgio+ Carlo= Giorgio + Giorgio - 5 = 35.
Dunque, se alle 35 caramelle aggiungessimo le cinque che mancano a Carlo, ne avremmo 40, ed i due figli avrebbero lo stesso numero di caramelle di Giorgio. Questo stesso numero è dato da 40/2, cioè 20. Quindi Giorgio ha 20 caramelle e Carlo ne ha cinque in meno, cioè 15. E i conti tornano, cioè le caramelle sono sempre 35.

Ma torniamo al problema generale. Dividere somme di denaro in parti eguali richiede una divisione e, come ho detto, quasi tutti ci arrivano subito.
Curiosamente, il problema inverso lo si incontra assai più sovente, travestito in diversi modi. Il problema é: se una mamma ha 1000 euro e si trova a dare 200 euro per figlio senza che avanzi niente, quanti figli ha? La risposta è 1000 diviso 200, cioè 5. E' come se la mamma avesse di fronte a sé un certo numero di cassetti, uno per figlio. Mette 200 euro nel primo, 200 nel secondo, 200 nel terzo...duecento nel quinto cassetto ed ha finito i soldi. Dunque può riempire solo cinque cassetti. Se tutti i figli hanno la stessa somma e nessuno resta a bocca asciutta, vuol dire che i figli sono cinque.

Questo problema così formulato non sembra di grande utilità, anche perché di solito le madri sanno quanti figli hanno. Ma, come ho detto, ci sono altri problemi che richiedono la stessa operazione.

III. COMMENTO SULLE FRAZIONI (DIVISIONI TRAVESTITE)

Tutti impariamo le frazioni nelle scuole elementari per subito detestarle. Le regole del calcolo con le frazioni, che io non ho dato, sembrano fatte solo per complicare le cose e per affliggere la vita di innocenti scolari.

In realtà il problema è la somma o differenza delle frazioni. Una volta che abbiamo imparato quelle, il prodotto e la divisione non sono altro che giochetti.

Ma perché la somma è così complicata?
In generale l'esempio usa torte o pizze. Quanto fa 1/3 di torta più 1/5 di torta? Naturalmente possiamo prendere le due fette e metterle l'una accanto all'altra, o addirittura mangiarle.

Ma che succede se il fratello vuole la metà di 1/3+1/5 di torta? Ancora si può risolvere il problema dividendo separatamente in due il terzo e il quinto. E se abbiamo una torta non ancora tagliata?
Si divide idealmente il terzo in cinque parti e il quinto in tre parti. Con questo da una parte abbiamo 5/15 di torta, dall'altra 3/15. La somma è 8/15, un po' più di una mezza torta. Diviso due fa 4/15, la parte del fratello.

Sovente si invita lo studente a trovare prima di tutto il minimo comun denominatore. Secondo me non è necessario, a meno che il minimo comun denominatore non sia ovvio. Per esempio tra otto e quattro il minimo comun denominatore è 8. In ogni altro caso (in particolare i casi in cui dovremmo metterci a scomporre i due denominatori in fattori primi) è probabilmente più rapido accontentarci di un denominatore ottenuto semplicemente moltiplicando i due denominatori.
Dopodiché si moltiplicano i due numeratori "incrociati". Se non ci mettiamo in testa che la regola è maligna, può anche piacerci per una certa sua bellezza:

$$\frac{1}{C} + \frac{1}{D} = \frac{D + C}{CD}$$

$$\frac{a}{C} + \frac{b}{D} = \frac{aD + bC}{CD}$$

Ma se la regola non ci piace, senza dubbio ci chiediamo perché mai rimorchiarci le frazioni con le loro regole strane.

Intanto diciamo subito che le frazioni avevano un'importanza particolare quando non c'erano macchine per fare i calcoli. Delle quattro operazioni la più temuta è sempre stata la divisione, e diversi miliardi di persone al mondo oggi non hanno la minima idea di come si divida 53 per 24, se non c'è una calcolatrice a disposizione. E poi ci sono quei dannati numeri periodici che saltano fuori quasi sempre. Abbiamo l'impressione che a sommarli o sottrarli il risultato sia sempre impreciso, come è infatti.
Sia ben chiaro però che 1/3 non è altro che un modo di scrivere "1 diviso 3".
Ed 1/3=0.3333 (periodico); 1/5, invece, è 0.2 (non periodico).
Vogliamo sommare 1/3+1/5? Il nostro calcolatore fa la due divisioni, ottiene i risultati dati qui sopra (0,3333 e 0.20000) e infine ci dice che fa 0.533.
Su questo non ci piove, o ci piove poco.
Se avessimo dovuto seguire le regole imparate alle elementari che avremmo fatto, per sommare 1/3+1/5?
Avremmo trovato il minimo comun denominatore, che in questo caso è anche il prodotto dei denominatori, (15) e poi avremmo trasformato 1/3 in una frazione in quindicesimi (cioè 5/15) e gli avremmo sommato 1/5, scritto anch'esso in quindicesimi (cioè 3/15), quindi la somma, 8/15.
Se ora dividiamo 8 per 15 troviamo 0.5333.
Ma perché andare a cercare tanti problemi con i minimi comuni denominatori eccetera?

Non trascuriamo l'uso di una calcolatrice, perché ci dà sempre un modo di verificare il risultato che troviamo. Se il problema era solo quello di eseguire il calcolo 1/3+1/5, direi che il risultato 0.5333 ottenuto sommando i risultati di due divisioni non può essere rifiutato da nessuno. In una classe di matematica bisognerebbe dare dieci a chi trova il risultato giusto in un modo o nell'altro, e undici o dodici o tredici a chi lo trova in modo elegante.

Supponiamo poi che l'insegnante ci dica che vuole il risultato espresso in forma di frazione. Niente

paura, abbiamo delle regole (generalmente non spiegate, ma magari vedremo in seguito, in Appendice 2) che ci dicono come tramutare un numero periodico in una frazione:
La regola generale é: **“scrivere antiperiodo e periodo uno dietro l’altro, sottrarre l' antiperiodo, e dividere per un numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguito da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo”**, cioè nel nostro caso 0.5333= (53-5)/90 = 48/90 =(semplificando) = 8/15. Ma guarda! (L’aspetto importante di questo risultato è che i numeri decimali periodici sono quindi sempre numeri razionali, cioè il rapporto di due numeri interi).

Quindi in un modo o nell'altro ci arriviamo.
Allora, perché imparare tutto l'armamentario delle frazioni?

i. Anzitutto, e il motivo ormai non vale più, perché manipolando le frazioni con l'uso di operazioni generalmente semplici, si può arrivare ad un risultato finale espresso in forma di frazione, ed in pratica dovremo fare una sola divisione complicata alla fine del calcolo invece di molte divisioni strada facendo.

ii. Secondo, perché così facendo non ci si devono portare appresso diversi numeri periodici le cui somme e differenze ci lasciano sempre insoddisfatti.

Supponiamo di dover fare 2/3+1/3. Col calcolatore ci viene 0.99999, mentre usando le nostre frazioni ci viene (2+1)/3 = 1. Tra l'altro i matematici dicono che un numero della forma 0.99999 è uguale a 1. Perché? Provate a calcolare la frazione generatrice,
Risposta: la frazione generatrice è 9/9 =1.

3iii. Terzo, perché i risultati sono più eleganti.
Per esempio: uno scarico vuota un terzo di un serbatoio per ora. Quante ore ci vogliono per vuotare il serbatoio interamente? (**quanti terzi stanno in un’unità**?) Risposta

$$\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

Ma supponiamo che uno scarico vuoti 3/5 di serbatoio per ora, in quante ore lo vuoterà del tutto? (Quante frazioni 3/5 stanno in un’unità?) Risposta:

$$\frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

Ora, 5/3=1.666 ore. Ma questo risultato, anche se giusto, non è molto chiaro. Il vantaggio a mantenere le frazioni è che 5/3=1+2/3, e siccome un'ora sono 60 minuti primi, 2/3 di sessanta minuti primi cioè $\left(\frac{2}{3}\right)60$ sono 40 minuti. Quindi un bel risultato pulito di un'ora e quaranta minuti.

iv. Quarto, perché i metodi che si imparano possono essere utili anche in casi più complessi, per esempio quando nella frazione compaiono non più dei numeri ma delle lettere. In questo caso la calcolatrice non ci aiuta ed il calcolo con le frazioni è l’unico modo di procedere. .

Per esempio, vediamo il caso 1/3 - 1/5. Uno potrebbe dire che 1/3-1/5= 1/3 -1/(3+2). Questo è un caso particolare di una operazione più generale: 1/n-1/(n+2).
Se non cerchiamo quello che - come ho detto - secondo me è un eccesso di eleganza, un denominatore comune è sempre dato dal prodotto dei denominatori, in questo caso n(n+2). Non sarà forse il minimo comun denominatore, ma in genere va bene, e sovente va meglio

così.
Ne risulta che:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-n}{n(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)}$$

Adesso non dobbiamo fare altro che mettere al posto di n il numero che ci pare.

Con n=3 abbiamo 1/3-1/5= (applichiamo la formula trovata mettendo 3 al posto di n) 2/15

Con n=4: ¼-1/6 = 2/24, semplificando 1/12 (To', 12 era poi il minimo comun denominatore)

Con n=11, il risultato è 2/143.

Se avessimo usato una calcolatrice trasformando subito le frazioni in numeri decimali non avremmo trovato la legge generale.

Insomma, usare subito il calcolatore per fare tutte le divisioni ci porta al risultato, ma è un po' come se uno volesse studiare gli animali di una foresta e per far ciò entrasse nella foresta armato di uno schioppo e sparasse su tutto quel che si muove. Certo, si potrebbero poi portare a casa gli animali defunti e sezionrli o impagliarli e studiarli, ma da morti, non da vivi. Le frazioni sono numeri vivi, la loro espressione decimale è un po' il cadavere .... non per questo privo eventualmente di soprendente interesse.

APPENDICE 1.

Applicazioni del metodo della scomposizione in fattori primi.

Una delle prime cose che si insegnava in prima media ai miei tempi era la scomposizione in fattori primi, esercizio poco attraente, anche perché fatto senza sapere che per stabilire se un numero - anche relativamente grande - è primo non occorre provare a dividerlo per tutti i numeri a lui inferiori, ma basta provare con i numeri primi inferiori o eguali alla sua radice quadrata. Perché? Perché ad ogni fattore più piccolo della radice quadrata corrisponde uno e un solo fattore più grande della radice quadrata. Trovando quindi i fattori inferiori alla radice quadrata, troviamo automaticamente anche quelli superiori.

Per scomporre tutti i numeri primi fino a mille ce ne bastano dodici tra quelli trovati poco fa,
1 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 …., anzi undici, perché 1 è ovvio. Se poi il numero è pari, naturalmente si arriva fino a 2000.
E poi si vede subito se un numero è divisibile per 2,3,5,11. Dunque ci restano sette numeri un po' più spinosi, cioè 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31.
Con i venticinque primi da 1 a 100, poi, si scompongono tutti i numeri fino a 10000 e i pari fino a 20000.

A che serve la scomposizione in fattori primi?

1. La scomposizione in fattori primi per trovare il MCD (e il minimo comun multiplo) di uno o più numeri.

Anzitutto la scomposizione in fattori primi serve a trovare il massimo comun divisore di due o più numeri (prendendo solo i fattori primi comuni).
Per esempio i MCD di 484 e 312. Con l'algoritmo Euclideo ci si arriva in fretta. Con i fattori primi si trova che: $484 = 2^2 11^2$ e $312 = 2^3 3\ 13$.
Scrivendo per disteso invece di usare gli esponenti si trova subito il MCD, costituito da 2 fattori 2, cioè 4.
$484 = 2 \times 2 \times 11 \times 11$
$312 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 13$
Per *ottenere il minimo comun multiplo*, invece, occorre includere tutti i fattori primi, comuni e non comuni, ciascuno col massimo esponente. Moltiplicare 484 x 312 dà evidentemente un multiplo comune, ma non è il minimo, perché abbiamo contato due volte i due "rossi", ovvero abbiamo contato due volte il massimo comun divisore. Per forza. Allora bisogna toglierne uno. In pratica, *il prodotto di due o più numeri diviso il MCD ci dà il loro minimo comun multiplo.*

2. La scomposizione in fattori primi per trovare il numero di divisori di un numero.

Una buona scomposizione in fattori ci dà (quasi) subito due informazioni: quanti divisori ha un numero e qual è la loro somma. Non ricordo che queste due divertenti applicazioni mi siano state insegnate a quel tempo.

Per quanto riguarda il **numero di divisori** vediamo per esempio $484 = 2^2 11^2$. I divisori sono:
1,2,4,11,22,44, 121,242,484

Sono nove divisori in tutto. E' facile distrarsi e, per numeri grandi, uno o due fattori li manchiamo sicuro.
Ma come si procede razionalmente?
Per avere tutti i fattori "si moltiplicano tutte le possibili potenze di 2 per tutte le possibili potenze di 11". La frase è corretta, ma bisogna capire quello che significa: se tra le potenze di 2 non includiamo $2^0 = 1$, usando solo 2 e 2^2 , non avremo mai i divisori 11 e 121, che, sappiamo bene, dividono 484. Similmente, se non includiamo 11^0 , non otteniamo mai i divisori 2 e 4. Quindi le potenze possibili di 2 hanno esponenti 0,1,2 e analogamente quelle di 11 hanno esponenti 0,1,2. Ciascuna delle tre potenze di 2 si combina con ciascuna delle tre potenze di 11. In tutto 3 x 3 = 9 combinazioni, che sono i nostri fattori, di cui il più piccolo è $2^0 11^0 = 1$ e il più grande è $2^2 11^2 =$ 484. Queste 3 potenze non sono altro che l'esponente della potenza più alta, 2 in entrambi i casi, a cui aggiungiamo 1, che rappresenta l'esponente zero.

In conclusione, se, scomponendo un numero N in fattori primi troviamo che esso può esser scritto
$N = p_1^a \, p_2^b \, p_3^c \ldots$ abbiamo che il numero di divisori è semplicemente
Numero divisori = $(a + 1)(b + 1)(c + 1)\ldots$
indipendentemente dai numeri primi in gioco.
Ad esempio, 144 ha 15 divisori. Provate a verificare.

3. La scomposizione in fattori primi per trovare la somma dei divisori di un numero.

La **somma dei divisori,** che la scomposizione in fattori primi rende pure possibile, è un esercizio anche più interessante.
Consideriamo il numero $N = p_1^a \, p_2^b \, p_3^c \ldots$
Il prodotto: $(p_1^0 + p_1^1 + p_1^2 \ldots + p_1^a)(p_2^0 + p_2^1 + p_2^2 \ldots + p_2^b)(p_3^0 + p_3^1 + p_3^2 \ldots + p_3^c)$ è proprio la somma di tutti i divisori. Infatti, svolgendolo, abbiamo una somma di termini tutti composti da tanti fattori quante sono le parentesi, ciascuno dei quali è scelto da una parentesi diversa. Questi termini sono appunto i vari divisori. Ad esempio, il divisore 1 lo si trova prendendo sempre il primo termine in tutte le parentesi. Il divisore p_1p_2 lo si trova prendendo il secondo addendo nelle prime due parentesi, e il primo (che vale 1) in tutte le altre. Dato che ogni divisore è costruito di prodotti i cui fattori sono un termine per ogni parentesi, non ci possono essere ripetizioni.

Per esempio, per il nostro vecchio 484, i cui divisori sono 1, 2, 4, 11, 22, 44, 121, 242,484 come già sappiamo, il prodotto che ci dà la somma dei divisori è:
(1 + 2 +4)(1 + 11+ 121) = (procedendo ordinatamente) =
(1 + 11 +121)+(2 + 22 + 242) +(4+ 44 +484).
Intanto vediamo che ci sono tutti i nove divisori, ciascuno una volta sola.
E la somma, dobbiamo proprio farla brutalmente? Se il numero fosse $2^{14}11^8$ avremmo 135 divisori e ci sarebbe da ridere.
Ma noi sappiamo da un pezzo che

$$1 + k + k^2 + k^3 \ldots. + k^n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

Per chi non ricorda la dimostrazione dirò che, chiamata S la nostra serie, se la moltiplichiamo per k, il che equivale a moltiplicare ogni termine per k, abbiamo:
$kS = k + k^2 + k^3 \ldots. + k^n + k^{n+1}$, in cui abbiamo perso la 1, primo termine di S, ed abbiamo guadagnato un k^{n+1} in coda,

cioè abbiamo l'equazione:
kS = S + $k^{n+1} - 1$, da cui $kS - S = k^{n+1} - 1$.
Di qui il nostro risultato.

E quindi ognuna delle parentesi originali, per esempio in (1 + 2 +4)(1 + 11+ 121), è data da un termine del tipo

$$\frac{{p_i}^{n+1} - 1}{p_i - 1}$$

Quindi, per 484 abbiamo che

$$Somma\ dei\ divisori = \frac{(2^3 - 1)}{(2 - 1)} \cdot \frac{(11^3 - 1)}{(11 - 1)} = 931$$

Magico! Se verificate, trovate che è proprio vero.

4. Numeri perfetti.

A questo punto siamo sulla soglia di un giardino nell'immenso paese della matematica, un giardino che ha i suoi cultori.
Un numero N è detto "perfetto" se la somma dei suoi divisori è eguale a 2N. O, se dalla somma dei divisori escludiamo per convenzione il numero N, il divisore più grande, "un numero N è perfetto se la somma dei suoi divisori è eguale ad N". Il più piccolo numero perfetto – a parte il solito 1, è 6. Il terzo è 28.
Due numeri sono detti "amici" se uno è la somma dei divisori dell'altro. Procedendo su questa strada troveremmo altre varietà di numeri.

Ma c'è subito anche qui una stranezza: non si conoscono (a parte 1) numeri perfetti dispari, anche se non c'è nessuna dimostrazione matematica che numeri perfetti dispari non possano esistere. Un numero perfetto dispari dovrebbe avere molte interessanti proprietà. Ad ogni modo, procedendo per forza bruta con opportuni calcolatori, si sa con certezza che nessun numero dispari minore di 10^{300}, cioè 1 seguito da 300 zeri, è perfetto. E ho scritto questo nel 2010.

APPENDICE 2.

Trovare la frazione generarice di un numero decimale periodico.

Poiché non mi piace l'idea di fare affermazioni ingiustificate, darò qui la dimostrazione della regola data più sopra, che , per trovare la frazione generarice di un numero decimale periodico, magari preceduto da un antiperiodo, occorre: **scrivere antiperiodo e periodo uno dietro l'altro, sottrarre l' antiperiodo, e dividere per un numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguito da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.**

Prendiamo un numero a caso 0.17531313131 (31 periodico)

L'antiperiodo 175 può essere eliminato moltiplicando il numero per 1000 (e ridividendolo alla fine)

Otteniamo: $\frac{1}{1000}(175.31313131) = \frac{1}{1000}(175 + 0.31313131)$
Ma ora attenzione, se non si sono mai fatti giochini del genere:

$0.313131 = \frac{31}{100} + \frac{31}{10000} + \frac{31}{1000000} \ldots = 31\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} \ldots\right) = \frac{31}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \ldots\right)$

Ora si può utilmente andare a leggere come si esegue la somma tra parentesi nella pagina http://dainoequinoziale.it/sassolini/2016/09/29/Zenone.html, da pagina 6 in avanti. Semplicemente, se chiamiamo 1/100 =x (x occorre solo che sia inferiore ad 1), la somma tra parentesi, che chiameremo **serie S**, è:

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots$$

Fino all'infinito (se si fermasse prima, cioè se fosse un polinomio sarebbe un poco più complicata):

Moltiplichiamo per x i due membri, e otteniamo

$$xS = x + x^2 + x^3 \ldots$$

Ma il secondo membro altro non è che S-1. Sembra strano che moltiplicando una serie infinita per un numero, la somma decresca, ma il fatto è che noi moltiplichiamo per x, minore di 1 per ipotesi (e nel nostro caso per ispezione, in quanto x =1/100).

Quindi xS = S-1, e, risolvendo per S, 1 = S-xS =S(1-x), da cui S = 1/(1-x) = 1/(1-1/100) = 100/99.

La frazione risultante è quindi:

$$\frac{1}{1000}\left(175 + \frac{31}{100} \cdot \frac{100}{99}\right) = \frac{1}{99000}(175 * 99 + 31)$$

che corrisponde alla ricetta data, in quanto 175 x 99 = 175 x (100-1) e 175x(100-1) +31=

17531-175 = 17356, cioè abbiamo rispettato la prima parte della regola: **scrivere antiperiodo e periodo uno dietro l’altro, sottrarre l' antiperiodo.**

Per la consolazione del lettore , 17356/99000= 0.175313131....