

Qual è il modo più semplice per risolvere equazioni polinomiali?

(di qualsiasi grado, radici reali e immaginarie)

Breve domanda, risposta breve impossibile, soprattutto perché mi perturba quel “modo più semplice per risolvere ...”.

Anzitutto “il modo più semplice”. In che senso? Per esempio, un metodo semplice da comprendere, ma potenzialmente lungo da applicare, è preferibile ad un metodo difficile da comprendere ma breve da applicare? E poi, si vuole un metodo solo per risolvere equazioni polinomiali di qualsiasi grado, per economia di pensiero, oppure si preferiscono diversi metodi per polinomi di grado o caratteristiche diverse?

In secondo luogo, che si intende per “risolvere”? Se non stiamo facendo degli studi di algebra astratta, da un punto di vista pratico, noi vogliamo estrarre da un’equazione dei numeri e fino a che non abbiamo questi numeri, non possiamo dire di aver risolto il problema. Possiamo aver fatto le più complesse acrobazie e possiamo aver trovato una elegante formula generale di soluzione, $x(i) = F(a, b, c, d, \dots)$ dove a, b, c, d sono i coefficienti del polinomio, la “forma chiusa” in cui si inseriscono i valori dei coefficienti dell’equazione in esame e si ottiene il risultato. Un esempio sono i classici

$$x_1 = -b + \sqrt{b^2 - c}$$

$$x_2 = -b - \sqrt{b^2 - c}$$

che insieme ci danno la soluzione generale dell’equazione $x^2 - 2bx + c = 0$.

Ma è questo che vogliamo? Se il nostro scopo è ottenere il valore delle radici dell’equazione polinomiale, la soluzione del problema l’abbiamo solo quando inseriamo nella soluzione generale il valore di $\sqrt{b^2 - c}$. Oggi questo valore lo calcola il più modesto telefonino cellulare, ma un tempo - non molti anni fa - non era così. La radice andava estratta in qualche modo, o ricavata da tavole numeriche.

Occorrevano quindi metodi di **calcolo numerico** che dessero la soluzione con la precisione voluta, secondo il buon senso di che la cercava.

In questo sito si trova un esempio di un metodo efficiente per l’estrazione di una radice quadrata.

Dunque se dividiamo un numero, per esempio 23, per la sua radice quadrata otteniamo come risultato ancora la radice quadrata.

Se dividiamo il numero dato per un numero maggiore della radice quadrata, invece, il risultato sarà un numero minore della radice quadrata. Infatti se moltiplicassimo due numeri entrambi più grandi della radice quadrata di 23 otterremmo un numero maggiore di 23. Allo stesso modo, se lo dividessimo per un numero minore della radice quadrata il risultato sarebbe maggiore della radice quadrata, perché moltiplicando due numeri minori della radice quadrata di 23 si ottiene un numero minore di 23.

Allora può venirci un'idea. Si prende 23 e lo si divide per un numero più piccolo di 23, per esempio 5.

$$23/5 = 4.6.$$

La nostra radice quadrata starà dunque fra 4.6 e 5.

Se facciamo la media tra 4.6 e 5, otteniamo $(4.6+5)/2 = 4.8$ e, dato che la radice quadrata è fra i due, questo numero, 4.8, dovrebbe essere più vicino alla radice quadrata di 23 di quanto non lo fosse 5 e di quanto non lo sia 4.6.

Rifacciamo il gioco, usando la nuova approssimazione che abbiamo trovato:

$$23/4.8 = 4.7917;$$

La nostra radice quadrata sarà dunque tra 4,7917 e 4,8.

Si fa la media tra 4.7917 e 4.8 e si trova 4.79583.

Ora, la radice vera è appunto 4.79583.... In due passi e sei semplici operazioni abbiamo trovato 5 cifre decimali. Come si fa a sapere quando dobbiamo fermarci?

Se la radice quadrata non è esatta, in genere ci vien detto: andate fino a 2 o 3 o N cifre decimali. In questo caso noi procediamo con questi calcoli fino a che le N prime cifre decimali non cambiano più.

Ma supponiamo di non essere particolarmente brillanti e di esser partiti con un numero molto diverso dalla radice quadrata, per esempio 10.

Niente paura, il metodo funziona ancora.

Primo passo:

$$23/10 = 2.3$$

Vediamo che evidentemente se 10 era molto più grande della radice quadrata, 2.3 sarà molto più piccolo.

Secondo passo, facciamo la media:

$$(10+2.3)/2 = 6.15$$

Ed ora iteriamo da capo, col valore trovato 6.15 invece di 10.

$$23/6.15 = 3.7398$$

Facciamo la media :

$$(6.15+3.7398)/2 = 4.94492$$

Iteriamo di nuovo :

$$23/4.94492 = 4.65124$$

Media :

$$(4.94492+4.65124)/2 = 4.79808$$

Abbiamo dovuto camminare di più perché siamo partiti da più lontano. Ma intanto abbiamo già recuperato due cifre decimali ed al prossimo passo ne potremmo aggiungere altre due. Se provate trovate 4.79584, con quattro cifre decimali esatte.

Questo metodo, quando siamo vicini

al risultato, ci dà due nuove cifre corrette per ogni passo.

E con questo abbiamo risolto numericamente un'equazione di secondo grado,

$$x^2 = 23.$$

Metodi di questo genere, in cui si utilizza ripetutamente una serie di operazioni identiche che ci avvicinano progressivamente al risultato che desideriamo, sono detti *metodi iterativi*. Essi presentano in genere il vantaggio di essere più facili da comprendere e più adatti ad essere codificati in un programma per computer. Si parte con un'approssimazione qualsiasi $v(0)$, anche lontana dal risultato finale, poi si eseguono certe operazioni (nel caso della radice quadrata di 23, una divisione e una media), si ottiene un valore $v(1)$, e su di esso si ripetono ("si iterano") le stesse operazioni: nuova divisione, nuova media, si ottiene un valore $v(2)$ e si va avanti di questo passo. I primi valori possono essere abbastanza poco convincenti, ma poi l'approssimazione converge verso il valore esatto, naturalmente se il metodo scelto è corretto e ben scelto.

Se invece siamo più ambiziosi e vogliamo la famosa formula generale, la "forma chiusa" $x_i = F(a,b,c,d...)$, in cui a, b, c, d sono i coefficienti della nostra equazione polinomiale di grado n , la matematica da utilizzare è maggiore, il cervello fa uno sforzo inumano, ...ma ci imbattiamo in due problemi, su cui non si insiste molto in generale.

Il primo problema è che la funzione $F(a,b,c,d...)$, una volta inseriti i coefficienti $a,b,c,...$ può essere assai complicata da calcolare (già l'equazione di secondo grado, con la sua radice quadrata, presenterebbe per un bambino delle elementari che non sia un giovane Gauss delle difficoltà praticamente insuperabili).

Ad esempio, sia l'equazione di terzo grado $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$, dall'aspetto particolarmente innocente (ho eliminato il termine di secondo grado perché è facile farlo comunque, ed è la prima cosa che si fa per trovare la soluzione di un'equazione di terzo grado).

Le radici A, B, C in forma chiusa (calcolate con Wolfram Mathematica) sono:

$$A \rightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{27}{2} - \frac{3\sqrt{69}}{2} \right)^{1/3} + \frac{\left(\frac{1}{2} (9 + \sqrt{69}) \right)^{1/3}}{3^{2/3}},$$

$$B \rightarrow -\frac{1}{6} (1 + i\sqrt{3}) \left(\frac{27}{2} - \frac{3\sqrt{69}}{2} \right)^{1/3} - \frac{(1 - i\sqrt{3}) \left(\frac{1}{2} (9 + \sqrt{69}) \right)^{1/3}}{2 \times 3^{2/3}},$$

$$C \rightarrow -\frac{1}{6} (1 - i\sqrt{3}) \left(\frac{27}{2} - \frac{3\sqrt{69}}{2} \right)^{1/3} - \frac{(1 + i\sqrt{3}) \left(\frac{1}{2} (9 + \sqrt{69}) \right)^{1/3}}{2 \times 3^{2/3}}$$

I cui valori numerici sono rispettivamente:

$$A = 1.32472; \quad B = -0.662359 + 0.56228 i; \quad C = -0.662359 - 0.56228 i$$

Come si vede, applicare la soluzione generale per estrarre dalla formula ottenuta i valori degli zeri come risultato finale non è uno scherzo. E si noti che se si prova ad utilizzare un

apposito programma per risolvere formalmente equazioni di quarto grado con coefficienti scelti a caso, si può restare a bocca aperta davanti alla complicazione delle soluzioni.

Il secondo problema è che magari la $F(a,b,c,d\dots)$ semplicemente non esiste. In effetti è o dovrebbe essere noto che il **teorema di Ruffini-Abel** afferma che non esiste una soluzione generale "in forma chiusa" per equazioni di grado superiore al quarto, *che richieda unicamente l'uso di radicali*. (Si veda in questo sito una dimostrazione semplificata: <http://dainoequinoziale.it/scienze/matematica/2018/06/21/Ruffini.html>).

Ho letto che abbiamo soluzioni "in forma chiusa" fino al settimo grado, ma sono in termini di funzioni trascendenti (funzioni ellittiche, iper-radicali, funzioni theta e compagnia), che ci gettano in acqua profonda: o abbiamo le tavole necessarie, o dei programmi adeguati per calcolare queste funzioni numericamente. È assai *possibile* che **tutte** le equazioni polinomiali di qualsiasi grado abbiano soluzioni in forma chiusa, ma è **praticamente certo** che queste richiederebbero funzioni speciali non ancora studiate.

Tutto dipende da dove si traccia la linea: dove smettiamo le nostre acrobazie formali e dove incominciamo con il calcolo numerico. Ma non ci si facciano illusioni: si può (e per polinomi di gradi alti si deve) fare a meno del calcolo formale, *ma del calcolo numerico a meno non si può fare mai, per poco elegante che possa essere*.

Nel secolo XIX c'erano sì dei brillanti matematici teorici (da Ruffini, Abel, Galois in poi) che speculavano su quali equazioni algebriche possano avere una soluzione "in forma chiusa", come la $x_i = F(a,b,c,d\dots)$, e via dicendo, ma c'erano anche dei matematici applicati a cui occorrevo dei numeri nudi e crudi. Diversi matematici si dedicarono quindi al calcolo numerico delle soluzioni delle equazioni polinomiali (e di altre più generali equazioni della forma $f(x) = 0$). Ne sorse un certo numero di teoremi e soprattutto di metodi di calcolo numerico delle soluzioni di tali equazioni. Il calcolo numerico è visto con qualche sufficienza da alcuni matematici che si occupano per esempio dei "problemi del millennio", ma, a mio parere, alcuni di questi metodi sono semplicemente geniali.

Il risultato è chiaro: *Con il calcolo numerico si possono risolvere in linea di principio tutte le equazioni polinomiali di qualsiasi grado ottenendo le radici reali e le radici complesse.*

Il mio prediletto ("il modo più semplice" - almeno per me) è il metodo scoperto da Karl Weierstrass nel 1891 e poi riscoperto da Durand nel 1960 e da Kerner nel 1966. E' noto come metodo di Durand -Kerner, ma evidentemente si tratta di una delle tante attribuzioni ingiuste in matematica. Prima degli anni Sessanta il metodo più utilizzato era probabilmente quello attribuito a Graeffe (1837), per quanto Dandelin ci fosse arrivato nel 1826 e Lobacevskij nel 1834. Ma, come ho detto, i metodi e le loro varianti e i loro raffinamenti erano molti. (Si veda un elenco ragionato in <https://en.wikipedia.org/wiki/Ro...>)

Non solo, ma ci sono certamente altri metodi scoperti più di recente, e utilizzati nei computer. Tuttavia, a me pare che il metodo di Weierstrass sia il più semplice, tanto per

l'idea originale quanto per il fatto che non richiede nulla più delle quattro operazioni, *estese però al campo complesso*. Ma la semplicità la si paga (non esiste nulla di gratuito in matematica): le semplici operazioni richieste vanno ripetute, iterate, quanto basta per raggiungere la precisione voluta. Tuttavia, non solo le operazioni da farsi sono le più semplici possibili (le quattro operazioni nel campo complesso – se vogliamo trovare anche le radici complesse), ma questo tipico problema, che viene risolto con un semplice programma per computer (un programma completo si trova al sito [Durand-Kerner method for solving polynomial equations " Python recipes " ActiveState Code](#)) è anche abbastanza semplice da capire. Non ne darò una rigorosa dimostrazione, ma cercherò di mostrare come funziona.

Il metodo assomiglia alquanto al metodo di Newton per trovare gli zeri di una funzione qualunque, quindi non soltanto di un polinomio, in una variabile reale.

Come è noto, partendo da un valore $x(k)$ vicino a uno zero, si pone $x(k+1) = x(k) + w(k)$, dove $w(k)$ è una correzione che va identificata, sperando che ci diriga verso un $f(x(k+1)) = 0$. La correzione viene ad esempio dalla Serie di Taylor, che ci dice che in prima approssimazione

$$f(x(0)+w(0)) = f(x(0)) + f'(x(0)) w(0) + \text{termini di ordine superiore.}$$

Se vogliamo trovare uno zero della $f(x)$, dobbiamo mirare ad avere $f(x(0)+w(0)) = f(x(1)) = 0$, supponendo naturalmente che $f(x(0))$ non sia già nulla. Abbiamo allora:

$$x(1) = x(0) + w(0) = x(0) - f(x(0))/f'(x(0))$$

La chiave del successo è dunque la correzione w . (Uso w per indicare la “correzione” a mio rischio e pericolo, in omaggio a Weierstrass).

La formula di Newton si presta ad una serie di iterazioni, che generalmente danno buoni risultati, anche se non mancano diversi *caveat* (si veda su Wikipedia <https://en.wikipedia.org/wiki/Ne...>)

L'iterazione nasce dal fatto che non vogliamo essere troppo fiduciosi e credere che il valore $w(0)$ primo arrivato ci porti direttamente al risultato, ma confidiamo nel procedere per approssimazioni successive in cui

$$x(k+1) = x(k) - f(x(k))/f'(x(k)).$$

Sia ora $f(x)$ il polinomio di grado n di cui si vogliono le radici. Supponiamo, tanto per fissare le idee, che si tratti di un polinomio di terzo grado, della forma $p(x) = x^3 + m x^2 + n x + p$. Si noti il primo coefficiente = 1, ciò che si può sempre ottenere; gli altri coefficienti possono essere numeri complessi.

Il metodo di Newton si applica a qualsiasi funzione, ma Weierstrass notò che nel caso dei polinomi abbiamo un notevole vantaggio che deriva dal fatto che il polinomio può essere anche espresso in termini dei suoi zeri, che, sappiamo, sono in numero eguale al grado n del polinomio (in questo caso 3), tra reali e complessi. Supponiamo che gli zeri siano A, B, C , per cui possiamo scrivere $p(x) = (x-A)(x-B)(x-C)$, da cui seguirebbe che $p(A) = p(B) = p(C) = 0$. Per comodità chiameremo $g(x, A, B, C)$ la forma $(x-A)(x-B)(x-C)$ del polinomio $p(x)$.

Il metodo di Weierstrass, coraggiosamente, si propone di calcolare tutti gli zeri simultaneamente.

L'applicazione del metodo viene iniziata con tre numeri $a(0), b(0), c(0)$ tra i quali non ci devono essere coppie eguali. Poi si costruisce il polinomio $g(x) = (x-a(0))(x-b(0))(x-c(0))$. Per maggior generalità, scriverò $a(0) = a(k), b(0) = b(k), c(0) = c(k)$ (si può anche supporre di aver applicato il **metodo che mostreremo** fino ad una iterazione k).

Abbiamo la relazione, in cui si usa per $p(x)$ la forma $g(x, A, B, C)$:

$$(1) \quad p(x) - g(x) = \frac{\partial g(x, A, B, C)}{\partial A} w_a + \frac{\partial g(x, A, B, C)}{\partial B} w_b + \frac{\partial g(x, A, B, C)}{\partial C} w_c$$

$$= -w_a (x-B)(x-C) - w_b (x-A)(x-C) - w_c (x-A)(x-B)$$

Dobbiamo ora calcolare le tre correzioni $w_a(k), w_b(k), w_c(k)$ per le tre radici approssimate, ricordando che il metodo di Newton suggeriva le iterazioni

$$x(k+1) = x(k) - f(x(k))/f'(x(k)).$$

L'idea chiave è di usare al denominatore non la derivata di $p(x(k))$ ma quella della sua forma equivalente $g(x(k)) = (x-a(k))(x-b(k))(x-c(k))$,

Calcoliamo ad esempio la correzione $w_a(k)$. Seguendo il metodo di Newton dobbiamo porre nella (1) $x = a(k)$, da cui:

- $p(x) = p(a(k)) = (a(k))^3 + m(a(k))^2 + n a(k) + p$;
- $g(x) = (x-a(k))(x-b(k))(x-c(k)) = 0$ (il primo termine del prodotto si annulla per $x = a(k)$).
- $g'(a(k)) = - (a(k)-b(k))(a(k)-c(k))$. Qui si è usata la notazione $g'(x)$ in luogo di $\frac{\partial g(x, A, B, C)}{\partial A}$ per comodità di lettura). Come si vede, $g'(a(k))$ è stata ottenuta valutando la derivata nel punto $a(k)$, e utilizzando per A, B, C i valori approssimati fin qui ottenuti $a(k), b(k), c(k)$, il che annulla i prodotti che moltiplicano w_b e w_c .

Dunque ci resta

$$a(k + 1) = a(k) - wa(k) = a(k) - \frac{p(a(k))}{g'(a(k))} = a(k) - \frac{p(a(k))}{(a(k) - b(k))(a(k) - c(k))}$$

Il cuore del metodo di Weierstrass (Durand-Kerner), che ci porge appunto $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$ sono così le seguenti formule di iterazione (qui soltanto 3):

$$a(k + 1) = a(k) - \frac{p(a(k))}{(a(k) - b(k))(a(k) - c(k))}$$

$$b(k + 1) = b(k) - \frac{p(b(k))}{(b(k) - a(k))(b(k) - c(k))}$$

$$c(k + 1) = c(k) - \frac{p(c(k))}{(c(k) - a(k))(c(k) - b(k))}$$

Su Wikipedia si trova come esempio un caso del IV grado. L'estensione a casi di grado più elevato è, si può proprio dirlo in questo caso, ovvia. ([Durand-Kerner method - Wikipedia](#)).

Per eseguire l'iterazione, come si è detto, la si pratica sulle tre radici nello stesso passo, e si procede fino a raggiungere la precisione desiderata.

Per prima cosa occorre inizializzare il processo: si scelga un numero complesso $(a+ib)$ come $x(0)$. Se il numero non fosse complesso, non troveremmo le radici complesse dell'equazione, mentre questo sistema $W(DK)$, ed è uno dei suoi pregi, non ci obbliga a stabilire a priori, utilizzando altre cognizioni, quante sono le radici complesse. Il metodo le dovrebbe produrre automaticamente e dovremmo trovare che sono complesse coniugate a coppie, e quindi in tutto in numero pari.

Wikipedia nel suo esempio di IV grado consiglia come "seme" il numero $(a+ib) = (0.4+0.9i)$ e poi le sue potenze $a(0) = (a+ib)^0 = 1$; $b(0) = (a+ib)^1 = a+ib$; $c(0) = (a+ib)^2$ etc, che sono sufficienti a complicare abbastanza le parti reali ed immaginarie. Poiché vengono utilizzate le potenze (ma si potrebbero usare numeri del tutto a caso) è meglio che $a + ib$ non sia una radice dell'unità, soprattutto per evitare di cominciare l'iterazione con degli zeri multipli, che sarebbe cominciare male, perché le potenze delle radici dell'unità si ripetono in cicli. *Nulla ci vieta di usare sempre questo seme $(0.4+0.9i)$ e le sue potenze, quante ce ne servono, magari arrotondate, per qualsiasi equazione. E non siamo neppure obbligati a usare solo le potenze di questo numero, basta che non ci siano valori iniziali eguali per nessuna delle radici.*

Se $a(k)$ fosse già una delle radici che cerchiamo, $p(a(k))$ sarebbe eguale a zero, e le nostre approssimazioni successive di A sarebbero tutte eguali, come devono essere.

E' evidente che è meglio che questo programma, pur nella sua semplicità, sia eseguito con l'aiuto di un computer. (Su Wikipedia si può trovare una formula scritta in modo più leggibile, la cui estensione a equazioni di grado superiore è ovvia).

In conclusione:

1. Il meccanismo del metodo è abbastanza facile da capire, conoscendo il metodo di Newton;
2. Le radici vengono trovate simultaneamente e non in successione;
3. Non occorrono ricerche preliminari sul numero di radici complesse: scegliendo un "seme" dell'iterazione complesso, si avranno automaticamente anche le radici complesse.
4. I calcoli da farsi sono soltanto le quattro operazioni nel campo complesso.
5. Scrivere un programma per computer per applicare il metodo (nella forma meno sofisticata, penso anche in SmallBasic!) è facile.

Mi resta il dubbio se il metodo possa applicarsi anche ai polinomi con radici multiple, caso che normalmente è uno scoglio – non insuperabile - per i metodi numerici di soluzione.

Inoltre pensavo che i coefficienti del polinomio dovessero essere reali e non complessi. Ma de.Wikipedia mi assicura che i coefficienti possono essere complessi, purchè il coefficiente della potenza di grado più elevato sia 1.

Ma a parte il dubbio sulle radici multiple, che cosa si può chiedere di più, per risolvere un problema che, sono pronto a scommettere, non si presenterà mai nella vostra vita (a meno che siate un ingegnere)?

Personalmente non mi sono mai trovato nella necessità di risolvere un'equazione di grado superiore al secondo, se non per divertimento.

Have fun!