



Risposta da me data il giorno 16 luglio 2019 alla domanda apparsa su Quora:
[Cos'è la costante Eulero-Mascheroni?](#)

Risposta breve:

La costante di Euler–Mascheroni è definita come:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \log(n)) = \gamma$$

dove

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Non è ancora stato dimostrato se la costante sia razionale o irrazionale. Il suo valore è stato calcolato (2019) fino a 477511832674 cifre. Le prime dieci sono:

$$\gamma \approx 0,57721\ 56649 \dots$$

Per ulteriori informazioni sulla costante di Euler Mascheroni si veda: [Costante di Eulero-Mascheroni - Wikipedia](#) nonché le versioni in altre lingue (l'inglese essendo frequentemente il testo più completo), e innumeri altri siti in rete.

Commento.

Presumo che a questa domanda non si sia ancora risposto, perché la costante γ (gamma greco minuscolo) di **Euler** (e **Mascheroni** – così chiamata, soprattutto da noi italiani, forse per distinguerla dalle troppe altre scoperte fisico-matematiche di Euler) è in pratica la terza costante più importante della matematica, dopo Pigreco (saldamente in vetta, anche per diritti di anzianità) e la base dei logaritmi e (saldamente al secondo posto). Per questa ragione ci si può chiedere come mai chi fa la domanda sia disposto ad attendere una risposta, che sinora non è venuta, mentre potrebbe tranquillamente ricavare da Wikipedia,

persino in italiano, una quantità di informazione. Se rispondo è per sottolineare alcuni aspetti che secondo me possono sfuggire leggendo in rete.

Si veda: https://it.wikipedia.org/wiki/Costante_di_Eulero-Mascheroni nonché le versioni in altre lingue (l'inglese essendo frequentemente il testo più completo).



Fig.1

Leonardo Eulero, qui in un ritratto del 1753, era cieco dall'occhio destro fin dal 1741. Più tardi soffrì di cataratta all'occhio sinistro, e alla fine della vita era praticamente cieco. Ma la parziale cecità non lo arrestò. Euler resta con ogni probabilità il più produttivo matematico della storia con almeno 872 lavori (di cui alcuni sono "non picciol" libri), anche se molti risultati ottenuti "alla garibaldina" furono in seguito criticati o dimostrati falsi.

I. Anzitutto la costante fu introdotta da Euler, indicandola con C. Il suo articolo originale è intitolato: *De progressionibus harmonicis observationes*, pubblicato in *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (che sarebbe "di San Pietroburgo") 7, 1740, pp. 150-161. Perché non provare a dare un'occhiata a questo lavoro, presentato (immagino che fu letto in latino) all'Accademia di San Pietroburgo il giorno 11 marzo 1734, quando Euler aveva 27 anni? Il documento è disponibile su Internet al sito <http://eulerarchive.maa.org/>. E' il numero 43 del loro elenco.

A pagina 157 Euler presenta per la costante C il valore 0.577218 (l'ultima cifra dovrebbe essere 5). Si noti che la "i" che compare nel testo non è la radice quadrata di -1. La formula sarebbe più chiara se Euler avesse usato la lettera n in luogo di i. Inoltre "l" è il logaritmo naturale.

Quae series, cum sint conuergentes, si proxime sum-
 mentur prodibit $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{i} = l(i+1) + 0,577218$
 Si summa dicatur s , foret, vt supra fecimus, $ds = \frac{dx}{x}$,
 ideoque $s = l(i+1) + C$. Huius igitur quantitatis con-
 stantis c valorem deteximus, quippe est $C = 0,577218$.

Fig.2

La pubblicazione originale della costante di Euler.

Oh malinconia! A quel tempo la lingua dei dotti era il latino! Ma non solo la lingua della scienza: Euler conosceva l'Eneide in latino a memoria.

II. Perché interessarsi a questa costante? Difficile entrare nella mente di Euler, che si interessava a tutto ciò che aveva a che fare con la matematica. Per me la costante ha un suo fascino perché risulta dalla differenza fra due entità matematiche che divergono lentissimamente.

La prima di queste entità è la serie armonica. Perché si chiama così? Perché, data una corda vibrante di lunghezza 1 fissata agli estremi, gli armonici hanno lunghezze d'onda il cui rapporto con la fondamentale può essere espresso mediante gli addendi della serie armonica.

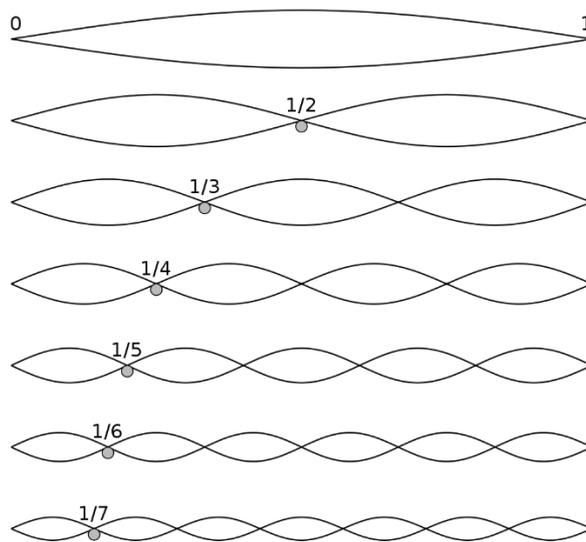


Fig. 2

Modi di vibrazione di una corda fissata agli estremi. Le lunghezze d'onda stanno con la fondamentale nei rapporti definiti dagli addendi della serie armonica.

La nostra serie è quindi $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots$

Sebbene i termini decrescano indefinitamente, la somma della serie armonica, come è noto, aumenta all'infinito ("diverge")...lentissimamente. Il fatto sorprendente, della (lentissima) divergenza era noto da secoli e fu dimostrato da **Nicolas de Oresme** nel Trecento.

Lentissimamente: Le somme parziali sono dette "Numeri Armonici", $H(n)$.

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

La somma dei primi cento termini vale 5.187; quella dei primi mille termini vale 7.486; quella del primo milione vale 14.392: quella del primo miliardo vale 21.30005. In pratica, aumentando i termini di un fattore mille, si aggiunge un 7 al risultato. Ciò vale fino a circa 100000000000000000000 termini, che producono un numero armonico $H = 48.931$.

Le dimostrazioni della divergenza della serie armonica sono molte, e più o meno complicate. La prima, di Oresme (1360) è che i vari numeri armonici *il cui indice è una potenza di 2* aumentano indefinitamente. Infatti:

$$H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$
$$H_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

E quindi abbiamo che $S = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \infty$.

Piccola curiosità: i numeri armonici crescono indefinitamente, **ma non sono MAI un numero intero (a parte il primo)**. La piccola curiosità, per sorprendente che sia, può essere dimostrata senza troppa difficoltà, se si riesce a dimostrare che qualsiasi numero armonico è dato da una frazione in cui il numeratore è dispari e il denominatore è pari (un multiplo di un numero pari è sempre pari: $(2n+1) \cdot 2m = 4nm+2m$, dispari*pari=pari)

Ricordiamo infine che la serie armonica non è altro che la $\zeta(1)$, dove ζ , naturalmente, è la famosa funzione di Riemann, sulla quale però Euler aveva già dato diversi risultati fondamentali non banali, e non solo per il valore 1.

I logaritmi non si comportano diversamente: è noto che anche **log(x)** aumenta all'infinito al crescere di x ("diverge")...**lentissimamente**. Per i logaritmi decimali, che differiscono da quelli naturali unicamente per un fattore fisso, sappiamo che un aumento di 1 equivale a un prodotto per 10.

Ma fin dal Settecento si notò che la serie armonica e i logaritmi naturali divergono in modo, per così dire, parallelo. Nacque così il sospetto che, "all'infinito"

$$H(n) - \log(n) = \text{costante.}$$

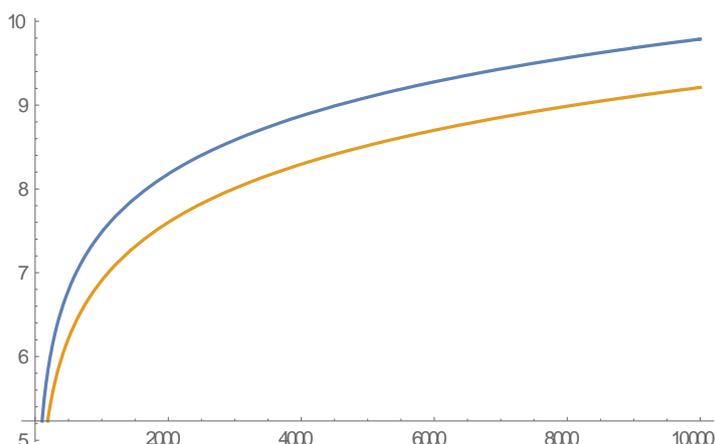


Fig.3. La "divergenza parallela" di $H(n)$ e di $\log(n)$.

Come si è detto, Euler, nel 1734, fu il primo a "pubblicare" questo parallelismo, e a calcolare 6 cifre della ipotizzata costante (l'ultima cifra, come si è già notato, è errata). In seguito ne calcolò 15 e infine, nel 1781, 16.

Insomma, per n tendente ad infinito, $H(n)$ e $\log(n)$ restano vicinissime ma non si toccano mai. Vien quasi la rabbia a pensare che la differenza potrebbe essere zero, e il mondo sarebbe decisamente più felice. Oppure potrebbe essere un numero noto: 0.5, o Pigreco, o e. No, ci vuole una nuova costante, oggi indicata con γ e la relazione corretta è:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \log(n)) = \gamma$$

Ma perché la differenza non può essere zero? La risposta viene dal fatto che $\int_1^n \frac{1}{x} dx = \log(n)$, mentre i numeri armonici sono la somma di rettangoli di altezza $1/t$, e base 1, e quindi eccedono sempre il segmento di $1/x$ sottostante. Peccato.

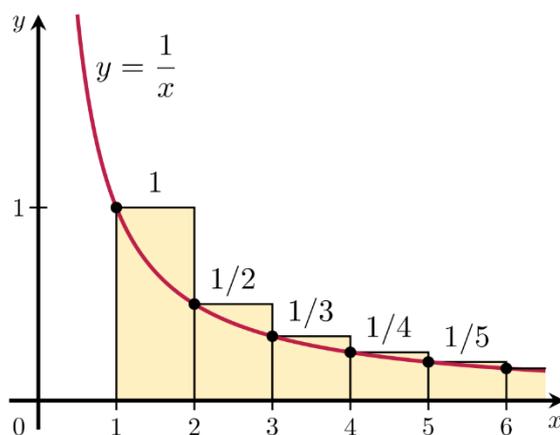


Fig.4

Origine della differenza fra $H(n)$ e $\log(n)$.

Intorno al 1835 il matematico **Bretschneider** introdusse il simbolo γ e produsse 32 cifre, di cui 12 errate. Qui si mise all'opera Lorenzo Mascheroni che, nel 1790, calcolò 32 cifre (di cui cinque sbagliate). Abbiamo già visto che il calcolo, fatto a mano, procede lentissimamente. Persino un mostro del calcolo numerico, il celebre **William Shanks**, che nel 1873 calcolò 527 cifre corrette di Pigreco, nel 1867 non andò oltre le 49 cifre per γ). Oggi, secondo Wikipedia (inglese) Ron Watkins ha calcolato 477511832674 cifre.

Le prime cento (da it.wikipedia) sono:

$\gamma \approx 0,57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\ 40243\ 10421\ 59335\ 93992\ 35988\ 05767\ 23488\ 48677\ 26777\ 66467\ 09369\ 47063\ 29174\ 67495.$

Ma, se la costante di Euler-Mascheroni non è importante come Pigreco e e , essa ha una peculiarità che Pigreco e e hanno perso: lungi dall'aver dimostrato che essa è un numero trascendente, non si è neppure sicuri che sia un numero irrazionale. Un aneddoto afferma che il matematico Hardy dichiarò che avrebbe lasciato la sua cattedra "Saviliana" a Cambridge a chi avesse dimostrato anche solo l'irrazionalità della costante. Hilbert giudicò che ai suoi tempi il problema era "inattaccabile". Intanto, si è calcolato che se si tratta di un numero razionale (cioè del rapporto di due interi) il denominatore deve avere almeno 10^{242080} cifre. Sovente questo risultato è attribuito a Julian Havil, autore del libro (in inglese) "*Gamma: exploring Euler's constant*". Ma Havil stesso attribuisce l'affermazione a Thomas Papanikolaou, a p.97 del suo libro, come il solito spesso citato e mai letto.

"Date a Cesare quel che è di Cesare, e a Papanikolaou quello che è di Papanikolaou".

Ma serve a qualcosa?

(Non traduce il testo da en.wikipedia, per facilitare la ricerca in rete)

The Euler–Mascheroni constant appears, among other places, in the following (*' means that this entry contains an explicit equation):

- Expressions involving the [exponential integral](#)*
- The [Laplace transform](#)* of the [natural logarithm](#)
- The first term of the [Laurent series](#) expansion for the [Riemann zeta function](#)*, where it is the first of the [Stieltjes constants](#)*
- Calculations of the [digamma function](#)
- A product formula for the [gamma function](#)
- An inequality for [Euler's totient function](#)
- The growth rate of the [divisor function](#)
- In [Dimensional regularization](#) of [Feynman diagrams](#) in [Quantum Field Theory](#)
- The calculation of the [Meissel–Mertens constant](#)
- The third of [Mertens' theorems](#)*
- Solution of the second kind to [Bessel's equation](#)
- In the regularization/[renormalization](#) of the harmonic series as a finite value
- The [mean](#) of the [Gumbel distribution](#)

- The [information entropy](#) of the [Weibull](#) and [Lévy](#) distributions, and, implicitly, of the [chi-squared distribution](#) for one or two degrees of freedom.
- The answer to the [coupon collector's problem](#)*
- In some formulations of [Zipf's law](#)
- A definition of the [cosine integral](#)*
- Lower bounds to a [prime gap](#)
- An upper bound on [Shannon entropy](#) in [quantum information theory](#) ([Caves & Fuchs 1996](#))

"Messo t'ho innanzi: omai per te ti ciba".