LO SPAZIO DI HILBERT IN TERMINI SEMPLICI

(per quanto mi è possibile)

Risposta a diverse domande comparse su Quora:

Che cos'è lo spazio Hilbert o lo spazio Hilbert? (?)
Cos'hanno di speciale gli spazi di Hilbert?
Cos'è lo spazio di Hilbert?
Sapresti spiegare in termini semplici cosa è lo spazio di Hilbert?
Cosa è uno Spazio di Hilbert? E come si può spiegarlo in modo semplice?

I. RISPOSTA BREVE.

Più che dare un'idea in termini semplici, ma non troppo superficiale e non troppo fuorviante di che cosa si intenda per spazio di Hilbert, temo che questo mio saggio darà invece l'idea che è impossibile spiegare lo spazio di Hilbert in termini semplici. "Giova sperare, caro il mio Giacomo".

Ad esempio, nell'introduzione all'articolo di https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_di_Hilbert, si legge subito all'inizio:

…..*Euristicamente (1), uno spazio di Hilbert è un insieme con una struttura lineare (spazio vettoriale) su cui è definito un prodotto scalare (quindi è possibile parlare di distanze, angoli, ortogonalità) e tale che sia garantita la completezza, ovvero che qualunque successione di Cauchy ammetta come limite un elemento dello spazio stesso. Nelle applicazioni, i vettori elementi di uno spazio di Hilbert sono frequentemente successioni di numeri complessi o funzioni.*

La domanda, ovviamente, è: "Di quante delle parole sottolineate il lettore conosce il significato?" Se lo conosce di tutte, smetta pure di leggere qui, perché non troverebbe niente di nuovo, e forse troverebbe molto da ridire alla mia esposizione. Se invece è completamente all'oscuro, gli offro il seguente saggio.

Ho fatto qualche indagine e ho scoperto che nel nome "spazio di Hilbert", anche fra ricercatori in campi scientifici (non, ovviamente, matematici) il problema non è tanto "Hilbert" (che ovviamente anche un non matematico intuisce essere il nome di un più o meno oscuro matematico che ha inventato, o scoperto, o studiato questo “spazio”), quanto proprio il concetto di “spazio” (in matematica). Quasi ogni scienza, pseudoscienza e non-scienza parla di spazio, ma la matematica, oltre a considerare più “spazi” di tutte le altre discipline messe insieme, o forse proprio per questo, parla di spazio senza che chi legge abbia un concetto chiaro di che cosa esso sia. Il problema è che **in matematica non esiste una definizione del concetto di spazio**. Un vago concetto è che “*spazio è un* ***insieme*** *(cioè collezione di oggetti distinti), talvolta chiamato* universo*, con una* ***struttura***”, da https://en.wikipedia.org/wiki/Space_(mathematics). In altre parole, mentre in generale per spazio si intende qualcosa di vuoto, in matematica uno spazio completamente vuoto è di limitato interesse. Uno spazio come si deve è costituito da “oggetti”, *che possono essere trattati come punti*, e opportune *relazioni tra questi punti*. Sono queste relazioni tra gli oggetti, ciò che definisce la natura dello spazio.

Consideriamo alcuni esempi semplici.

Un insieme di cinquemila mele è uno spazio, in diversi modi. Se consideriamo ogni mela come un punto abbiamo uno spazio. Una struttura la si può creare anche fra cinquemila mele considerate come un insieme di cinquemila punti. Altre strutture possono essere create considerando lo spazio come costituito da tutti i punti che compongono le mele.

Vediamo un altro esempio: un foglio di carta millimetrata in due dimensioni.

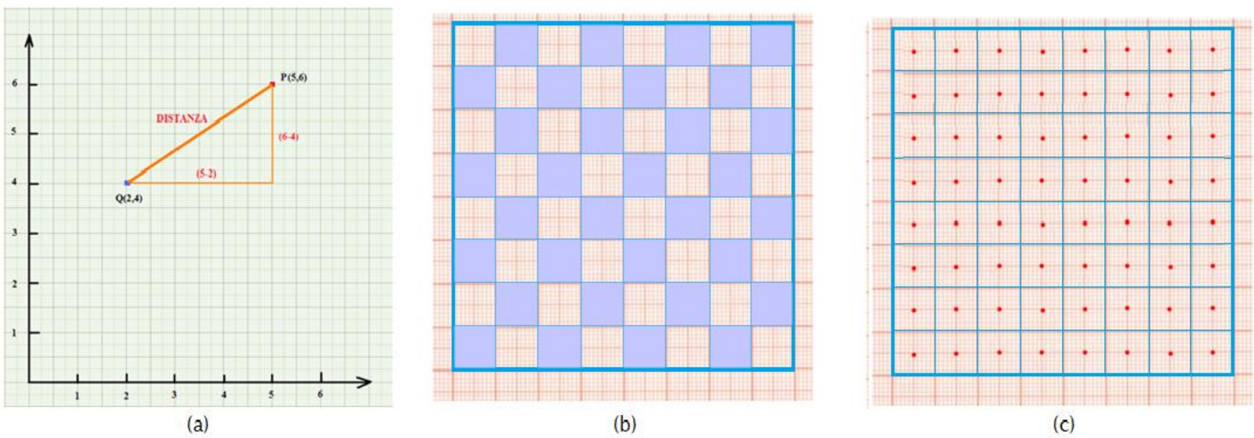


Fig.1

I punti del foglio di carta sono l'insieme, in linea di principio infinito e continuo, la struttura è data dagli assiomi della geometria euclidea in due dimensioni. Questo è certamente uno spazio a cui siamo abituati, semplice da trattare, in cui, inoltre, è definito un concetto di "distanza", la distanza "pitagorica" o "euclidea", come in (a). Tuttavia, si noti, nello spazio più generico possibile, un concetto di distanza non è richiesto.

Ma supponiamo di voler giocare a scacchi e di esserci scordati la scacchiera alle isole Mauritius, come tutti. Allora prendiamo lo stesso foglio di carta millimetrata e disegniamo la scacchiera (b). Poi in qualche modo, ci faremo degli oggetti opportuni (bastano dei quadretti di carta con l'iniziale del pezzo o pedone che rappresentano) e potremo giocare. Ma, se vogliamo considerare la scacchiera come oggetto matematico, vediamo subito che, per incominciare, il (diverso) colore delle caselle è irrilevante. Poi notiamo che ogni casella, matematicamente parlando, è essenzialmente un punto. Non presenta alcun interesse per il giocatore sapere quali punti della casella occupi la base di un pedone. La casella è individuata da due coordinate che nei manuali del gioco sono una o più lettere e un numero, a seconda delle varie convenzioni. Due numeri interi potrebbero andare benissimo per identificare una determinata casella, anzi, per fare le cose più complicate, basterebbe un numero solo da 1 a 64. Per i manuali di Dama, poi, normalmente basta un numero solo, da 1 a 32 (incominciando dall'alto a sinistra, nella Dama Italiana).

Ebbene, anche i 64 punti degli scacchi e i 32 punti della dama sono due insiemi di punti basati su una struttura (che qui è costituita dalle regole del gioco, complete di scacchiera). Dunque, a buon diritto sono due spazi anche loro.

Le cosiddette "geometrie finite" sono conferme di come gli spazi matematici siano costituiti da insiemi di punti, anche in numero finito. Il **piano minimo affine** contiene solo 4 punti, e il **piano proiettivo minimo** (attribuito a Fano) 7 punti, mentre lo **spazio proiettivo minimo** ha 15 punti, e la struttura è fornita dagli assiomi della geometria proiettiva. https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_geometry#The_smallest_projective_three-space (Purtroppo non ho trovato la versione italiana, ma al livello del mio saggio basta guardare le figure).

Una volta dati questi – spero – chiarimenti, possiamo passare al nostro glossario.

I.1 Glossario.

I concetti che ho sottolineato all'inizio nella definizione di *it.wikipedia*, per la maggior parte identificano diversi spazi "matematici", compresi l'uno nell'altro come da figura 2., a "cipolla" (che proviene da https://en.wikipedia.org/wiki/Normed_vector_space , un po' ritoccata da me). Non si tratta di un diagramma di Venn, nel senso che non bisogna credere che tutti gli spazi metrici siano spazi vettoriali e via dicendo. Piuttosto, a partire dallo spazio più interno, il diagramma va letto dicendo che "Lo spazio di Hilbert (qualunque cosa esso sia) ha tutte le proprietà degli spazi in cui è incluso e in più qualche proprietà peculiare, che lo rende diverso – per esempio - dagli altri spazi completi".

Dunque, per comprendere che cosa è lo spazio di Hilbert, bisogna che "leggiamo la cipolla" a partire dallo strato più esterno.

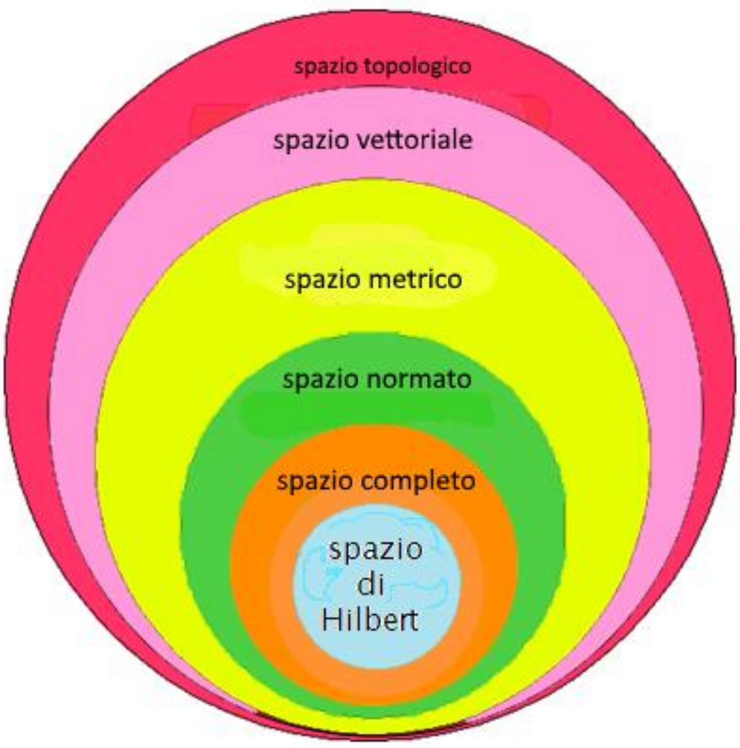


Fig.2

Definizioni (molto banalizzate):

1) Uno **spazio topologico** *è lo spazio più generale che permette la definizione del concetto di continuità.* (Da P. Alexandroff, Elementary Concepts of Topology"(1932, ed. inglese 1961) §8). A nostro beneficio

https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_topologico aggiunge: lo **spazio topologico** è l'oggetto base della topologia. Si tratta di un concetto molto generale di spazio [come insieme di punti], accompagnato da una nozione di "vicinanza" definita nel modo più debole (cioè meno restrittivo) possibile.

Esistono anche spazi topologici con un numero finito di punti. Chi ha coraggio può leggere https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_topological_space (purtroppo neanche qui ho trovato una versione italiana).

2) **Spazio vettoriale.** La denominazione **spazio vettoriale** in "analisi funzionale" (il soggetto che stiamo studiando) è per molti matematici e soprattutto fisici **sinonimo di spazio lineare**. Lo sarà anche per noi. Per comprenderne la definizione che darò, si può fare riferimento agli spazi vettoriali che immagino noti dai banchi del liceo. I vettori (sessant'anni fa, in seconda liceo classico) erano dati come freccette, che avevano una lunghezza, una direzione e un verso. Queste freccette potevano essere sommate (regola del parallelogramma) *producendo un vettore*, e potevano essere moltiplicate per un numero o *scalare* (che sui banchi del liceo era reale) *producendo un vettore* simile a quello di partenza, ma di differente lunghezza. Chi ha fatto qualche studio in più sa che il vettore poteva anche essere espresso in termini di tre vettori unitari (o versori) ortogonali (**i, j, k**) lungo i tre assi coordinati (x,y,z, nello spazio), e delle sue componenti , che altro non erano che le sue proiezioni sui tre assi coordinati, ed erano costanti anch'esse reali. Avevamo così un primo spazio vettoriale, costituito da due specie di oggetti (vettori e scalari) e tanto le componenti dei vettori quanto gli scalari erano numeri reali. Si vede subito che se gli scalari fossero stati numeri complessi, moltiplicandoli per un vettore a componenti reali avrebbero prodotto vettori a componenti complesse, cioè diversi da quelli di partenza, che avevano per definizione componenti reali. Quindi possiamo dire che lo spazio vettoriale da noi appreso aveva a suo fondamento i numeri reali, o, in linguaggio più tecnico *era definito "sopra" il "campo" dei numeri reali*. U**n campo** è insieme di numeri in cui sono definite due operazioni, normalmente chiamate somma e prodotto, affini alla somma e prodotto ai quali siamo abituati, che danno come risultato un numero appartenente allo stesso campo.
Abbiamo ora gli elementi per comprendere la definizione di **spazio vettoriale**: si tratta di uno ***spazio topologico*** *definito "sopra un* ***campo"*** *di numeri*, normalmente numeri razionali, reali o complessi. Fanno parte dello spazio vettoriale in primo luogo degli elementi presi dal "campo" (in pratica

numeri) detti *scalari*. Inoltre, lo spazio vettoriale comprende un **secondo tipo** di elementi, detti *vettori*, con cui sono possibili **due operazioni**, che *connettono i vettori fra loro* (addizione di due vettori, che deve produrre un vettore) e *i vettori con gli scalar*i (moltiplicazione di un vettore per uno o più scalari, che deve pure produrre un vettore). Tali operazioni rispettano certe leggi e hanno certe proprietà (per le quali si veda ad esempio https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_vettoriale), che nell'insieme ne definiscono , tra l'altro , la linearità.

Con queste leggi e proprietà viene creata una particolare **"struttura algebrica",** come vengono chiamate in matematica le entità composte da certi elementi (qui abbiamo vettori e scalari), insieme ad un numero finito di assiomi ed operazioni che devono rispettare determinate proprietà.

3) Uno **spazio metrico** è uno spazio in cui è definita in modo arbitrario una distanza. Tuttavia, per quanto arbitrariamente definita, la distanza matematica fra due punti A e B deve obbedire a certi requisiti abbastanza ovvii (è un numero reale positivo; è nulla se i due punti coincidono; è simmetrica (d(AB) = d(BA)); in essa vale la "disuguaglianza triangolare", cioè la lunghezza di un lato di un triangolo è sempre inferiore alla somma delle lunghezze degli altri due lati).

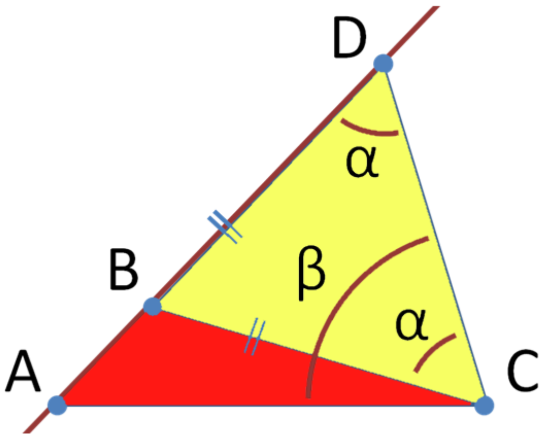


Fig.3

Dimostrazione (dovuta a Euclide) della disuguaglianza triangolare applicata al triangolo ABC sul piano. Si vuol dimostrare che AC< AB+BC. Si prolunghi AB di un tratto BD = BC, per cui il triangolo CBD sarà isoscele. Si consideri ora il triangolo ADC. Qui l'angolo β > α, per cui il lato opposto a β sarà maggiore del lato opposto a α, cioè AB+ BD = AB + BC > AC.

Come già notato, non tutti gli spazi in cui può essere definita una metrica sono spazi vettoriali, ma esistono spazi metrici che hanno *anche* le proprietà degli spazi vettoriali, e viceversa. Per esempio, nella scacchiera, che è uno spazio costituito da 64 punti discreti, per il Re la distanza è caratterizzata dal fatto che gli è permesso muovere di un solo passo in qualsiasi direzione. In Fig.4 il re è nella casella blu; le otto caselle contigue sono a distanza 1; le sedici caselle caratterizzate da un punto rosso sono tutte a distanza 2. I vettori sono meno chiaramente definiti.

(I curiosi noteranno che in questo spazio, prendendo come circonferenza il numero di caselle a eguale distanza in numero di mosse, e come raggio il numero di mosse, si ottiene che $\pi=4$).

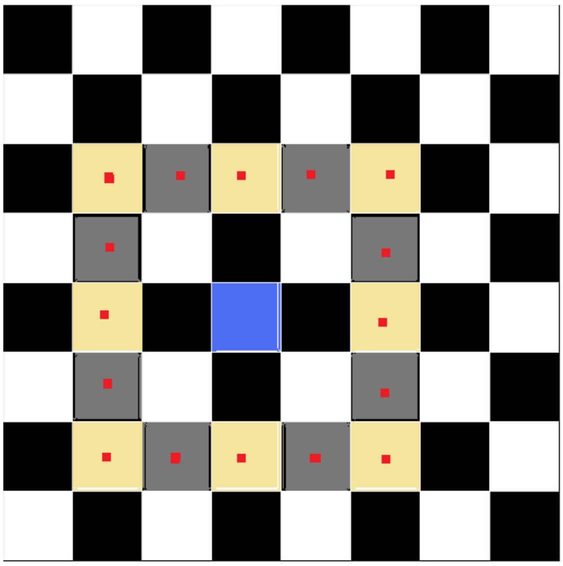


Fig.4

La geometria del Re di Scacchi

4) **Spazio normato** è uno spazio vettoriale in cui a tutti i vettori può essere assegnata una *lunghezza finita* o **norma**.

Tutti gli spazi normati sono metrici (cioè vi è definita una distanza, mentre non vale l'inverso); la norma del vettore nullo vale zero e la norma di tutti gli altri vettori è un numero reale positivo; il prodotto di una norma per un numero positivo cambia la lunghezza, ma non la direzione del vettore; la norma del prodotto di un vettore per uno scalare è data dal prodotto della norma del vettore per il *valore assoluto* dello scalare. Infine, ogni norma deve soddisfare la disuguaglianza triangolare: la norma della somma di due vettori è minore o uguale alla somma delle loro norme. Sono tutte proprietà nessuna delle quali, penso, può causare sorpresa.

5) Spazio di Banach. A uno spazio normale e metrico si può aggiungere la nozione di *completezza*. In uno spazio metrico *completo* ogni successione di Cauchy (successione in cui i vari elementi successivi si avvicinano tra loro indefinitamente) (2) tende a un punto limite che fa parte dello spazio. Se ad esempio lo spazio sotto studio fosse la retta pre-pitagorica, cioè costituita di *soli numeri razionali*, tutte le successioni che tendono a un limite irrazionale, tenderebbero a un numero che non fa parte dello spazio in questione. La retta pre-pitagorica, quindi, non sarebbe uno spazio completo. Un esempio è la successione (di Cauchy) 1-1/2+1/3-1/4…, che tende a ln2. **Uno spazio normato, metrico e completo è detto spazio di Banach.** Va notato che Banach (3) si limitò a osservare che undici spazi "inventati" da altri e da lui considerati avevano tutti, magari espresse in forme diverse, certe proprietà comuni. Quindi bastava elencarle in un unico testo, e fare in modo che tutti gli altri testi facessero riferimento a quell'unico testo: come si può immaginare, ora è sufficiente dire che uno spazio è uno "spazio di Banach", per affermare che possiede tutte le proprietà elencate a suo luogo da Banach.

(6 a) Nella figura non compaiono gli spazi **pre-hilbertiani,** cioè gli spazi in cui norma e distanza provengono da un *prodotto interno* (l'analogo del prodotto scalare, che si studia nella teoria elementare dei vettori: si veda qualche chiarimento in sezione II.3). La ragione per cui non ho incluso nella figura gli spazi pre-hilbertiani è che uno spazio pre-hilbertiano non è necessariamente completo. Va notato (e vedremo più avanti) che nello spazio di Hilbert la distanza e la norma sono un'estensione della distanza e della norma dei vettori dello spazio Euclideo, il che rende intuitive diverse proprietà dello spazio di Hilbert.

6) Spazio di Hilbert. Nello spazio di Banach, norma e distanza sono legate l'una all'altra, ma non provengono necessariamente da un prodotto interno. Se provengono da un prodotto interno, eccoci finalmente atterrati nello **spazio di Hilbert**. Ne discende che lo spazio di Hilbert è una specie particolare di spazio di Banach. Qui https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_space non lascia dubbi: *Come spazi normati completi, gli spazi di Hilbert sono per definizione anche spazi di Banach. Come tali, sono spazi vettoriali topologici. Etc.* Gli spazi sempre più interni raffigurati in Fig.2 posseggono loro sempre più specifiche proprietà oltre a quelle generiche degli spazi più esterni.

Conclusione: Lo spazio di Hilbert è uno spazio (topologico, vettoriale (o lineare), metrico, normato, completo cioè) **di Banach, in cui la metrica proviene da un prodotto interno.**

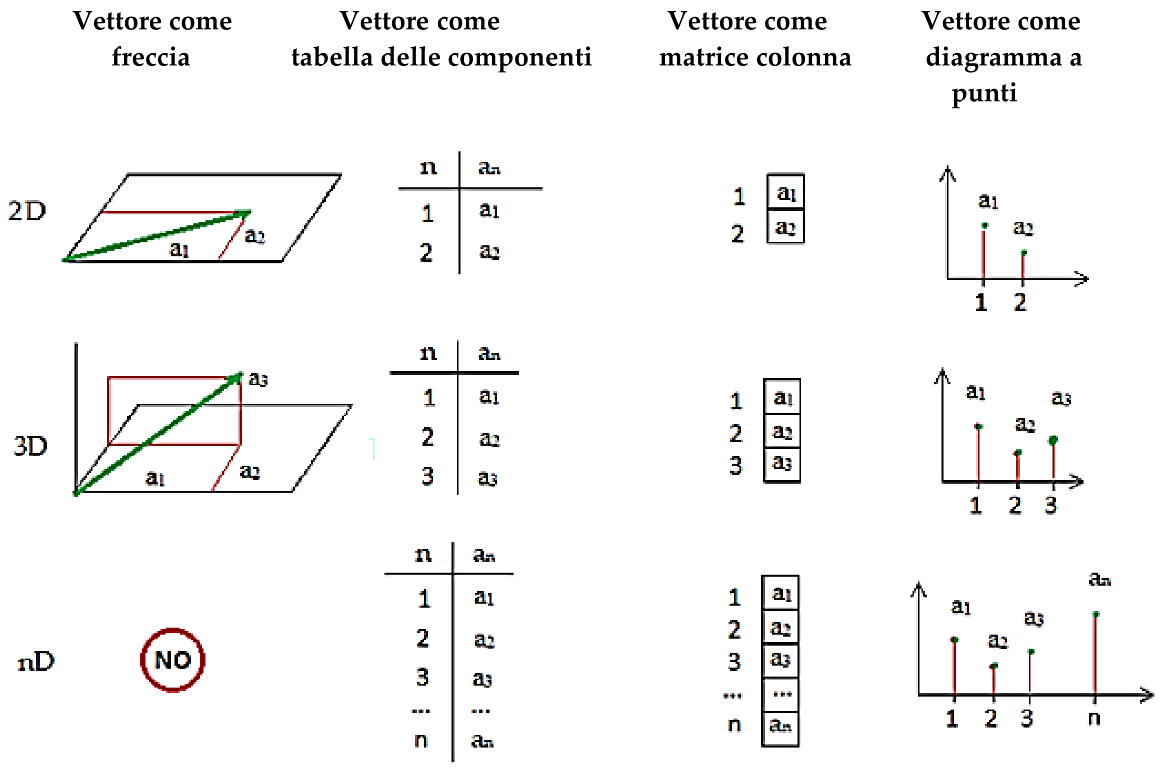
II. COMMENTO.

Lo spazio di Hilbert come estensione dello spazio Euclideo.

Non credo affatto che quanto ho scritto sia di una chiarezza speculare. Per fare ammenda, vorrei ora mostrare come lo spazio di Hilbert estenda "euristicamente" il concetto di spazio Euclideo. Sfortunatamente, qui si richiede qualche conoscenza in più di matematica.

II.1 la funzione come vettore con un'infinità continua di componenti.

La rappresentazione del vettore tradizionale in termini di due versori (o vettori di lunghezza unitaria) **i, j** , nel piano (bidimensionale) euclideo può essere estesa senza sforzo allo spazio tridimensionale euclideo, usando naturalmente tre versori **i, j, k** (colonna 2). Ma qui si fermano le possibilità di estensione, in quanto non sapremmo come disegnare un quarto versore ortogonale ai precedenti. Tuttavia, l'uso dei tre versori **i, j, k** non è l'unico modo di descrivere un vettore.



(1) (2) (3) (4) (5)

Fig.5

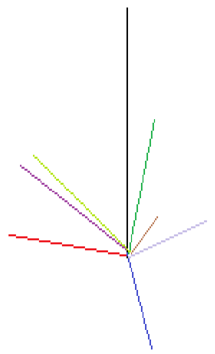
In cui la colonna (1) dà il numero di dimensioni dello spazio considerato; la (2) dà la forma in freccette, che non va oltre 3D; la (3) enumera le componenti; la (4) pone il vettore in forma di matrice-colonna; la (5) ne fa un diagramma, in questo caso discreto, in cui il numero della componente sta in ascissa, e il valore della componente corrispondente è posto in ordinata.

La forma tabulare (colonna 3), ad esempio, è ancora valida, anche se il vettore ha ***n*** componenti. Lo stesso vale per la forma matriciale (4). Infine, colonna (5), il vettore può essere rappresentato graficamente mettendo in fila le ***n*** componenti. Nelle forme (3), (4), (5) rappresentiamo, in altre parole, una funzione a(n) definita solo per i valori interi di n. Incidentalmente, non cambia nulla se invece di a_n scriviamo a(n). Userò l'espressione più comoda secondo i casi, fidando nella comprensione del lettore.

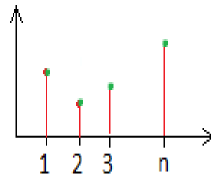
Fissiamoci un momento sulla rappresentazione (5). Sulle ascisse, come abbiamo visto, il vettore è definito solo per valori interi di n, mentre in ordinate ogni componente può avere qualsiasi valore. Quando incominciamo a chiederci quale sia il valore dell'ordinata corrispondente a un numero non più intero, per esempio n = 1.3 (dove per il momento un'ordinata non è definita), ciò vuol dire che incominciamo a sentirci attratti dall'idea di "passare al continuo".

Fig.6

Procedendo sempre euristicamente, possiamo dire allora che **una funzione continua è interpretabile come un vettore, con un'infinità continua di componenti, le quali non si chiameranno più a(n), con n intero, ma a(x) o f(x) con x reale – per ora.** Il valore di x identificherà la componente del vettore. Molti concetti elementari dello spazio euclideo bidimensionale vengono estesi in modo logico, tanto a vettori a componenti discrete (anche in numero infinito), quanto a funzioni. Ciò giustifica gli esempi di vettori dati in Fig. 5, che forse a prima vista risultavano un poco ostici all'eventuale lettore, anche se probabilmente non quanto sembrarono ostici a me la prima volta che ne lessi. E devo dire che, siccome nessuno mi aveva mostrato i semplici diagrammi delle Fig. 5 e 6, non riuscivo a immaginarmi che cosa significasse la frase: **una funzione è interpretabile come un vettore che possiede un'infinità continua di componenti.** Invece si tratta di un'intuizione banale, che non riuscivo a formarmi, perché ero sul binario sbagliato:



Da dove partivo



da dove bisognava partire

Fig. 7

Ma sia ben chiaro: anche se ha un'infinità continua di componenti, **una funzione continua in tale spazio è pur sempre rappresentata da un solo punto**, estremo di un vettore con origine in O.

II.2 Distanze tra funzioni. Un metodo "pitagorico".

I vettori P(i) e Q(i) a n (o anche infinite) dimensioni sono diventati due funzioni continue. Per il momento limitiamoci a due funzioni a variabile reale.

(a) (b)

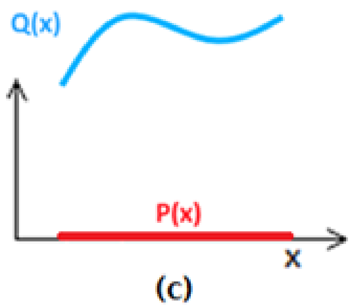


Fig.8
Distanza tra due punti in n dimensioni (a) e tra due funzioni (b) nonché norma di una funzione (c), passando al continuo

In qualche modo, comprendiamo che la distanza Euclidea o Pitagorica viene generalizzata a n dimensioni sommando i quadrati delle differenze coordinata per coordinata dei vettori, e viene generalizzata al continuo sommando i quadrati delle differenze punto per punto delle funzioni. Ma questa somma punto per punto dei quadrati delle differenze delle funzioni non è altro che un integrale. Se poi scegliamo come P(x) la funzione P(x) = 0, allora abbiamo il quadrato punto per punto della funzione Q(x), una sorta di "grandezza della funzione " analoga alla "lunghezza di un vettore" geometrico, la cui "**norma**" è data dalla radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti, ponendo l'inizio del vettore nell'origine.

Nel nostro spazio di funzioni, **la funzione Q(x) è un punto**, con infinite coordinate, e la sua lunghezza è la distanza dal **punto "zero", rappresentato dalla funzione P(x)=0**, anch'esso con infinite coordinate, però tutte nulle.

Norma di Q(x) al quadrato = $\int (Q(x))^2\,dx$ per Q(x) **funzione reale**

Notiamo che abbiamo fatto derivare la NORMA, "grandezza della funzione" (analogo della "lunghezza del vettore") dalla metrica. Potremmo anche prendere altre strade, ma Hilbert, presumo, preferì la strada che abbiamo seguito, che è un'estensione "euristica" della distanza euclidea.

II.3 Prodotti interni

(i) L'esempio classico è dato dai vettori ordinari della meccanica. Essi si presentano come coppie (nel piano) o triplette (in 3D), ordinate di numeri reali, le componenti dei vettori.

Come è (o dovrebbe essere) noto, il prodotto interno di due vettori A e B è dato in due modi:

1) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |A||B| \cos \theta$ dove |A| e |B| sono le norme o moduli dei due vettori (le lunghezze delle freccette) e cosθ è l'angolo compreso fra di essi;

2) se i vettori sono dati nelle loro componenti secondo la *base ortonormale* **i, j, k ,** come *A = (a**i**+b**j**+c**k**)* e **B =** *(u**i**+v**j**+w**k**),* allora, sfruttando le regole $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = \mathbf{1}$; $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \mathbf{0}$, (ortonormalità della base: due versori diversi qualsiasi sono ortogonali cioè ad angolo retto perché cos(π/2) = 0), otteniamo:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = au + bv + cw$$

Possiamo generalizzare questo esempio in due modi immediati: (i) ammettendo che le componenti siano numeri reali o *complessi*; (ii) ammettendo che il numero di componenti sia n (un intero qualsiasi).

$$\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, \dots a_n)$$

In tal caso il prodotto interno, ponendo $\boldsymbol{B} = (b_1, b_2, \dots b_n)$, è (come si può accettare con un attimo di riflessione)

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} b_i^* \, a_i$$

Grazie all'introduzione delle componenti complesse per uno dei due vettori, *per convenzione quello di sinistra*, abbiamo che la norma del vettore $\boldsymbol{A}$ data da: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \, a_i = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$, è sempre positiva.

(ii) La classe delle ***funzioni di variabile reale f(x), definite sull'intervallo chiuso [a,b] e "al quadrato sommabili"*****, cioè tali che**

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \int_a^b f^*(x) f(x) dx < \infty$$

Esse formano uno spazio vettoriale (vedremo poco oltre come si possa rendere intuitivo questo concetto). Qui, la somma di due vettori f(x) e g(x) è data dalla somma "punto per punto" delle due funzioni. In quanto al prodotto interno, esso è *definito* come:

$$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g} = \int_a^b f^*(x) g(x) dx$$

Ciascuno arriva a queste due intuizioni (di norma e di prodotto interno) come può. Un modo è quello di scrivere:

$$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g} = \sum_{i=1}^{n} f_i^* \, g_i$$

Ma, considerando che per passare da $\boldsymbol{f_i^*} \, \boldsymbol{g_i}$ a $\boldsymbol{f_{i+1}^*} \, \boldsymbol{g_{i+1}}$ si può pensare di aver fatto un passo di lunghezza Δi = 1, possiamo senza molto sforzo immaginare di scrivere che

$f_{i+1}^* \, g_{i+1}$ = $f_i^* \, g_i$ Δi, nel qual caso non saremo stupiti se

$$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g} = \sum_{i=1}^{n} f^*(i) g\,(i)\,\Delta i \rightarrow \int_a^b f^*(x) g(x) dx$$

In cui *i*, da variabile discreta, è diventato x, variabile continua, e quindi Δi = 1 è diventato l'infinitesimo dx.

Lo spazio delle funzioni al quadrato sommabili è noto come spazio L^2(a,b), o con altro nome (ma voglio lasciare qualche sorpresa per il seguito), purché l'integrale esista.

(iii) Sia w(x) ≠ 0 una funzione fissa, a valori reali, integrabile, definita e non negativa nell'intervallo [a, b] dell'asse reale (che può essere anche una costante). Si consideri la *collezione di tutti i polinomi*

$$\mathbf{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n}$$

con coefficienti reali e grado ≤ n, per qualche n dato, anche infinito, definiti sull'intervallo [a,b]. Questa collezione forma uno spazio vettoriale metrico con prodotto interno se la somma di due vettori è definita nel modo abituale, e il prodotto interno è dato da:

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = \int_a^b p^*(x) q(x) w(x) dx$$

Anche qui si è eseguito il passaggio da

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} \ = \ \sum_{i=1}^{n} p^{*}(i) q\ (i)\, w(i)\ \Delta i \ \ => \int_{a}^{b} p^{*}(x) q(x)\, w(x)\ dx$$

La funzione w(x) è detta funzione "peso" (w deriva da "weight", che in inglese vuol dire peso), ed è un'aggiunta necessaria, se vogliamo che i nostri intervalli si possano estendere fino all'infinito senza che l'integrale stesso diventi infinito. Ad esempio, se i nostri polinomi sono definiti su un intervallo limitato, per esempio (-1, +1) la funzione peso può benissimo valere 1, costante. Di qui emergeranno altri polinomi che possono essere utilmente usati: è questo il caso, come vedranno coloro che continueranno questi studi, dei polinomi detti di **Legendre**. Se però i nostri polinomi sono definiti sul semiasse x > 0, allora l'integrale 2.1 non è finito, a meno che la w(x) per x -> infinito non vada a zero più rapidamente della potenza x^n. Ad esempio, w(x) = **exp(-x)** può renderci questo servizio. E' questo il caso dei polinomi detti di **Laguerre**. Se poi l'intervallo è (- ∞, + ∞) allora ci occorrerà una funzione peso del tipo di w(x) = **exp(-x²),** che riduce l'impatto di qualsiasi potenza x^n per |x| tendente a ∞. È questo il caso dei polinomi detti di **Hermite**. La funzione w(x) = exp(-x²), è quindi necessaria per rendere integrabili, in questo caso, dei polinomi assegnando un "peso" sempre minore ai valori del polinomio per |x| tendente a ∞.

Il prodotto interno viene qui dato "per definizione", come alcuni testi di algebra lineare fanno (*ad esempio il Wilf, nel suo classico testo "Mathematics for the Physical Sciences", 1962*). Lo si può più rigorosamente presentare introducendo prima il cosiddetto **spazio duale**. Ma non mi è parso necessario farlo.

II.4 Vari spazi di Hilbert.

Contrariamente a quello che può far pensare la domanda, e parte della mia risposta, non esiste un solo spazio di Hilbert. La meccanica quantistica ne usa in particolare tre: (i) spazi con vettori che posseggono un numero finito di componenti (reali o complesse); (ii) spazi con vettori che posseggono un numero infinito numerabile (ovvero un'infinità discreta) di componenti (reali o complesse); (iii) spazi di vettori-funzioni f(x). Tuttavia, in questo caso, per poter applicare un concetto di norma e di distanza coerente, queste funzioni,

come si è visto, devono essere "al quadrato sommabili", cioè la norma, vista in II.3, deve essere data da un integrale finito, (ciò che corrisponde al concetto che ogni "vettore deve avere una lunghezza finita").
Il prodotto interno è già stato opportunamente definito, e la distanza deve essere data da:

$$d^2\big(f(x), g(x)\big) = \int \big(f^*(x) - g^*(x)\big)\big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Ma c'è qualcosa di più. Nel caso dei vettori euclidei in 3 dimensioni, il prodotto interno è definito come:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |a||b|cos\theta$$

Dove |a| e |b| sono i moduli o "Norme" dei vettori **a** e **b**. Abbiamo quindi, nelle nostre notazioni (prego decifrare):

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|a||b|} \rightarrow \frac{\int_a^b f^*(x)g(x)dx}{\sqrt[2]{\int |f(x)|^2\, dx \cdot \int |g(x)|^2\, dx}}$$

che non solo è il coseno dell'angolo fra due vettori euclidei, ma anche, *mutatis mutandis,* **il coseno dell'angolo fra due funzioni continue di classe L² -** nello spazio di funzioni al quadrato sommabili di Hilbert - **qualunque cosa ciò significhi.**

Avere un'espressione per il coseno dell'angolo compreso fra due funzioni sembra un vantaggio abbastanza modesto, soprattutto se non abbiamo un'idea chiara del significato del risultato. Ma non è un risultato di poco interesse, perché ne discende il concetto di **"ortogonalità"** fra due funzioni, se il loro prodotto interno $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$ è uguale a zero. Come vedranno coloro che continueranno a arare questo campo, si tratta di un concetto importante, che permette di includere in uno spazio vettoriale di funzioni continue senza struttura, una base "ortonormale", in termini della quale ogni funzione potrà essere espressa, così come i nostri vettori nello spazio euclideo potevano essere espressi in termini delle loro componenti, i coefficienti dei **vettori i, j, k** che costituivano una base ortonormale. Uno sviluppo in serie di Fourier è un classico esempio in cui funzioni trigonometriche (in forma reale o complessa) fungono da base ortonormale. E l'analogia può essere spinta assai più avanti. Di qui una notevole utilità nel campo dell'"Analisi funzionale".

III. Ma perché questo spazio è diventato così importante in meccanica quantistica?

Nei primi anni della meccanica quantistica, in cui questa produceva equazioni a dir poco ingiustificate rigorosamente, che però davano risultati precisi, Dirac, che non era un matematico, ma un fisico, introdusse il suo formalismo generale, nell'ipotesi che *lo stato di un sistema quantistico* potesse essere rappresentato da un vettore.

Tra l'altro, in meccanica quantistica una funzione d'onda complessa rappresenta in generale una "ampiezza di probabilità", cioè una funzione il cui modulo quadrato (sempre reale positivo) ci dà, *ad esempio*, la probabilità di trovare una particella nella posizione x di un segmento, anche infinito, di retta su cui è costretta a muoversi. La funzione d'onda di una particella è di solito "normalizzata" (dividendola per il valore della "norma" che è l'integrale del modulo della funzione sull'intervallo di validità), e così il suo modulo quadrato è adatto a rappresentare la probabilità di trovare la particella sulla retta. L'integrale sull'intero intervallo di definizione del quadrato della funzione d'onda così normalizzata varrà 1. Così deve essere: la particella deve essere da qualche parte, e ce ne deve essere solo una.

Tutti questi vettori (in senso generale) appartenevano a diversi spazi di Hilbert. Poiché gli *stati* dei sistemi quantistici possono essere rappresentati da vettori con un numero finito di componenti, o vettori con un numero infinito di componenti, o funzioni complesse, ma "al quadrato sommabili", o polinomi del tipo indicato, Dirac preferì utilizzare un formalismo generale che potesse trattare tutti questi sistemi in un modo omogeneo ed introdusse i suoi famosi vettori "bra" e "ket".

Incidentalmente, fu presto introdotto anche il concetto di *spazio di Hilbert allargato* che tratta tutti questi vari spazi di Hilbert insieme, grazie alla cosiddetta "teoria delle distribuzioni", con cui viene generalizzato il concetto di funzione. (Per coloro che ne hanno sentito parlare, aggiungo che la più nota delle distribuzioni che non siano già funzioni ordinarie, è la cosiddetta funzione "*delta di Dirac*", $\delta(x)$, che fu da lui introdotta non rigorosamente, ma usata a tutto spiano).

4. Lo spazio di Hilbert, concetto sovente sottinteso.

Sebbene gli spazi di Hilbert abbiano numerose applicazioni in matematica, essi hanno un poco la funzione della "prosa" nel Bourgeois Gentilhomme di Molière:

M. Jourdain, le Bourgeois Gentilhomme, esclama stupefatto: « *Par ma foi, il y a plus de quarante ans que je dis de la* ***prose****, sans que j'en susse rien; et je vous suis le plus obligé du monde, de m'avoir appris cela !* » (Atto II, scena iv) (In fede mia, sono più di quarant'anni che parlo in **prosa** senza saperlo. Vi sono obbligatissimo di avermene informato).

Per decenni si è fatto cioè ricorso agli spazi di Hilbert senza neppure menzionarli. E questo anche in meccanica quantistica, il che sorprende un poco, perché gli spazi di Hilbert, introdotti da **David Hilbert** (1862-1943) in relazione alle *equazioni integrali*, ricevettero il nome di Hilbert nel 1929 da **John Von Neumann** (1903-1957), uno dei matematici che si sforzarono di porre la meccanica quantistica su solide basi matematiche.

Tuttavia, il **Dirac,** nel suo classico "*Principi della meccanica quantistica*" (1958), afferma che *uno spazio in cui (i vettori) hanno lunghezze finite e prodotti scalari pure finiti, è chiamato dai matematici "spazio di Hilbert". Ma (i vettori) da noi considerati formano uno spazio più generale di quello di Hilbert*. E di Hilbert non se ne parla più. In realtà qui il Dirac dimentica di citare la *completezza* dello spazio di Hilbert, che lo caratterizza in quanto spazio di Banach, ma essa è tacitamente sottintesa nel resto del suo testo.

Leonard Schiff, autore di un testo assai diffuso di meccanica quantistica, e addirittura tradotto in italiano, "*Quantum Mechanics*" (1949), non cita mai Hilbert , e lo stesso fa **Lev D.Landau**, nel suo "*Quantum Mechanics*" in collaborazione con **Evgenii Lifshitz** (ed. russa del 1948). Non si tratta di testi qualsiasi: un paio di generazioni di fisici Americani e Russi furono formati su testi che non menzionavano neppure Hilbert. I francesi, che si formarono sul testo di **Albert Messiah** (1964), ebbero invece una sintetica trattazione, in due parti, per un totale di tre pagine, dello spazio di Hilbert.

In seguito, la menzione di Hilbert divenne più frequente, ma penso che oggi sia di nuovo abbastanza rara o comunque poco approfondita: corsi e ricorsi, avrebbe detto il Vico, anche negli spazi matematici.

Conclusione.

Essendo di formazione fisico e non matematico, non credo affatto che in questa mia esposizione manchino errori di vario tipo, dalle sviste tipografiche agli errori di esposizione che possono trarre in inganno il lettore, forse (spero di no) sino ad errori di fondo da far rizzare i capelli a un matematico vero. Però i casi sono due: o l'eventuale lettore continuerà i suoi studi di matematica, e allora potrà utilmente divertirsi a trovare tutti gli errori della mia esposizione, oppure non continuerà i suoi studi di matematica, e allora penso che questa esposizione, per quanto lunga e non priva di errori, possa dare un'idea di una *piccolissima porzione* del mondo della matematica, *un'introduzione alla moderna* ***Analisi funzionale,*** *ufficialmente inaugurata da Banach nel 1922.*

Con questo si potrebbe forse incominciare a dare un'idea della risposta al grande interrogativo del genere umano "*Che cosa diavolo fanno i matematici?"*.

Mi scuso comunque per gli errori.

NOTE

1) ***Euristico***: *in matematica, procedimento euristico, qualsiasi procedimento* ***non rigoroso*** *(a carattere approssimativo, intuitivo, analogico, ecc.) che consente di prevedere o rendere plausibile un risultato, il quale in un secondo tempo dovrà essere controllato e convalidato per via rigorosa.*
(http://www.treccani.it/vocabolario/euristico/).

Euristico significa quindi "non rigoroso", e prego il lettore di aspettarsi un limitato rigore matematico in quanto segue.

2) In matematica, una **successione di Cauchy** o **successione fondamentale** in uno *spazio metrico* (cioè in cui è definita una distanza) è una successione tale che, comunque si fissi una distanza arbitrariamente piccola ε, da un certo punto in poi *tutti* gli elementi della successione hanno distanza reciproca inferiore ad ε.

"Tutti" non significa solo le distanze tra elementi consecutivi d(x(n), x(n+1)), ma tutte le distanze d(x(n), x(n+p)) tra elementi in cui n è superiore a un certo N. ***Ogni successione convergente è di Cauchy***, e tale nome è dovuto al matematico e ingegnere Augustin-Louis Cauchy (1789 -1857).

L'importanza del concetto di successione di Cauchy viene dal fatto che la convergenza della serie non è dedotta dal fatto che i vari termini della successione si avvicinano a un limite noto, ma dipende solo dai termini della successione. In questo modo si può escludere che la serie 1+2+3+4+5… converga (domanda ricorrente su Quora). D'altra parte, come mostriamo nel testo, non ogni successione di Cauchy converge a un elemento dello spazio metrico. Solo se tutte le successioni di Cauchy in uno spazio metrico convergono a un elemento dello spazio, abbiamo uno "spazio metrico completo".

Noi abbiamo sempre utilizzato le serie, piuttosto che le successioni. Ma si noti che le serie diventano facilmente successioni. Sia la serie a(1) + a(2) + a(3)… + a(n)... Se ne possono estrarre successioni in vari modi, come, ad esempio: a(1) , a(1)+a/2), a(1) + a(2) + a(3)…. e in questo caso le differenze fra i termini successivi della successione sono anche i termini successivi della serie. Il limite della serie, naturalmente, è anche il limite di una successione così costruita. Quando i segni variano, per esempio si alternano regolarmente + - + - + -, si possono utilmente costruire successioni prendendo due termini per volta.

3) Stefan Banach *(Cracovia, 1892 - Leopoli, 1945)* fu un matematico polacco, il fondatore della moderna "analisi funzionale". Tra le due guerre, pubblicò in francese la sua tesi dottorale « *Sur les opérations dans les ensembles abstracts et leur application aux équations intégrales* » sul giornale matematico polacco *Fundamenta Mathematicae* **3**, *1922, pages 133-181.* Nell'introduzione, Banach , dopo aver definito alcuni concetti (dominio, campo, funzione di linea) scrive:

L'ouvrage présent a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels, que je spécifie dans la suite. Toutefois, afin de ne pas être obligé à les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici: je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théorèmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui.

J'ai introduit pour plus de simplicité les notations suivantes de quelques champs fonctionnels:

L'ensemble de fonctions continues $(\mathcal{C})$

L'ensemble de fonctions sommables (intégrables au sens de Lebesgue) $(\mathcal{S})$

L'ensemble de fonctions intégrables (L) avec la $r^{\text{ième}}$ puissance $(\mathcal{S}^r)$

L'ensemble de fonctions mesurables bornées $(\mathcal{M})$

L'ensemble de fonctions duhameliennes bornées $(\mathcal{D})$

L'ensemble de fonctions ayant la $p-1^{\text{ème}}$ dérivée absolument continue et la $p^{\text{ième}}$ dérivée

	continue	$(\mathcal{C}^p\mathcal{C})$
	intégrable (L)	$(\mathcal{C}^p\mathcal{S})$
	intégrable (L) avec la $r^{\text{ième}}$ puissance	$(\mathcal{C}^p\mathcal{S}^r)$
	bornée	$(\mathcal{C}^p\mathcal{M})$
	duhamelienne	$(\mathcal{C}^p\mathcal{D})$

Je passe aux postulats concernant les ensembles traités dans cet ouvrage.

"*Scopo di questo lavoro è stabilire alcuni teoremi validi per differenti campi funzionali, che specifico più oltre. Tuttavia, per non essere obbligato a dimostrarli isolatamente per ogni campo particolare, lavoro ben ingrato, ho scelto una via differente: considero da un punto di vista generale gli insiemi di elementi, di cui postulo determinate proprietà, deduco teoremi e dimostro in seguito di ogni campo funzionale che per esso sono validi i postulati da me adottati.* (Segue l'elenco di undici principali tipi di "campi funzionali"esaminati, con notazioni che non hanno veramente attechito.)"

In altre parole, "Perché ripetere undici volte gli stessi postulati e le stesse dimostrazioni in undici libri diversi, in forme magari non esattamente eguali? Perché non scriverli una volta per tutte in un solo libro, e poi fare in modo che gli undici libri facciano riferimento a quello?". Dunque ciascuno degli spazi considerati da Banach non era una novità: molti matematici avevano lavorato su ciascuno di essi. Inutile dire che il numero di spazi di Banach è aumentato nel tempo, ed è più che raddoppiato (https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_di_Banach#Alcuni_tra_gli_spazi_di_Banach_più_diffusi).