

ENTRA IN SCENA GIUSEPPE LUIGI

Dialogo di Lagrange ed un amico



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c4/AduC_179_Lagrange_%28J.L.%2C_1736-1813%29.JPG

By H. Rousseau (graphic designer) Augustin Challamel, Desire Lacroix [Public domain or Public domain], via Wikimedia Commons

Siamo a Torino, poco meno di un secolo dopo i dialoghi di Isacco con l'amico. Siamo in Via Lagrange, che allora si chiamava Contrada dei Conciatori. Un tizio vede un giovane con la testa nelle nuvole e gli dice:

- *Ehi, Giuseppe Luigi, come va? Sempre con la testa nelle nuvole?*
- *Quali nuvole? Quale testa?*, chiese Giuseppe Luigi Lagrange, che era effettivamente un po' trasognato.
- *Sveglia! A cosa stai pensando?*
- *Già, pensavo...pensavo che se i dati non sono equispaziati il metodo di Newton non si applica.*
- *Che diavolo significa?*

- *Significa che il metodo di Newton per interpolare dati di una tavola numerica usando il binomio che lui ha inventato non funziona se i punti in cui conosciamo la funzione non sono regolarmente spaziati, come per esempio, $\sin 30^\circ$, $\sin 40^\circ$, $\sin 50^\circ$, ma sono, per esempio, $\sin 30^\circ$, $\sin 35^\circ$, $\sin 42^\circ$ eccetera.*
- *Non mi sembra un problema grave, disse l'amico.*
- *Lo dici tu. Io invece devo fare proprio questa interpolazione e devo trovare il modo di riuscire.*
- *Se non c'è riuscito Newton, vuoi riuscirci tu?*
- *Il peggio è che mi sembra che lui avesse inventato un metodo di interpolazione anche per questo caso, ma non sono riuscito a trovarlo nella biblioteca dell'Accademia delle Scienze, anche perché non l'ho ancora fondata. Mi pare che lo chiamasse il "metodo delle differenze divise".*
- *Non ti posso aiutare.*
- *Va bene, adesso ti lascio. Mi è venuta proprio adesso un'idea che forse forse...*

Dopo qualche giorno, sempre in Contrada dei Conciatori, dove Lagrange era nato ed abitava, l'amico ritrova Giuseppe Luigi, raggianti.

- *Non mi dire che sei riuscito!*
- *Sicuro. Vediamo se riesco a spiegarti il metodo.*
- *Avanti.*
- *Noi vogliamo trovare una funzione semplice che interpoli tra i valori di un'altra funzione, per esempio $\cos A$ o qualsiasi altra. Abbiamo i valori della funzione desiderata in tre punti **a caso**, a , b , c . Chiamiamo i valori noti della funzione $y(a)$, $y(b)$, $y(c)$. A noi occorre una $y(x)$, con x qualsiasi tra a , b , c , che per $x = a$ valga $y(a)$, per $x = b$ valga $y(b)$, per $x = c$ valga $y(c)$.*
- *Puoi mica andare un po' più piano?*
- *Non è complicato. Per $y(x)$ scegliamo il polinomio più semplice possibile...*
- *Buon'idea.*
- *...che non può essere una retta, perché una retta passa sempre per due punti qualsiasi, non per tre punti.*

- *A meno che sia abbastanza spesso.*
- *Molto spiritoso. Dunque, l'equazione più semplice dopo la retta è un'equazione del secondo grado.*
- *Come vuoi.*
- *Scriviamola così:*

$$y(x) = y(a) \cdot A(x) + y(b) \cdot B(x) + y(c) \cdot C(x)$$

dove A, B, C sono polinomi del secondo grado.

- *Ti voglio vedere a trovarli.*
- *Ma non è così difficile: A(x) deve valere 1 quando x=a, e deve valere 0 quando x=b o x=c. Quindi vedo bene un prodotto (x-b)(x-c) moltiplicato una costante che rende A=1 quando x=a. Quindi scusami tanto, sai, ma*

$$A(x) = k(x-b)(x-c).$$

- *Ma quanto vale k?*
- *Ma lo si vede subito!*
Dobbiamo avere A(x)=1 quando x=a, cioè:

$$A(a) = k(a-b)(a-c) = 1$$

E quindi:

$$k = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$$

Vale a dire:

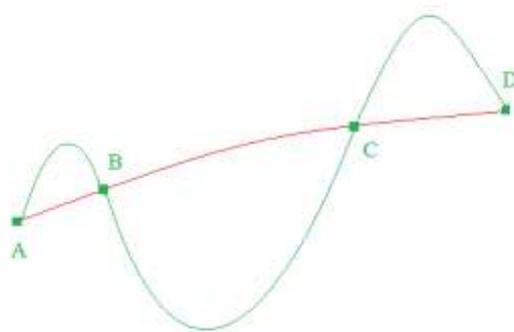
$$A(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}$$

E allo stesso modo troviamo gli altri. Per cui il polinomio interpolatore, per a, b, c a qualunque distanza l'uno dall'altro, è:

$$y(x) = y(a) \left(\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} \right) + y(b) \left(\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} \right) + y(c) \left(\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \right)$$

- *Va bene, tutto ciò è molto bello. Ma secondo me serve poco. Chi è così cretino da fare una tavola $y(x)$ per valori di x che non sono ordinatamente spaziatati? Per esempio le tavole dei coseni le ho sempre viste per angoli come 1° , 2° , 3° .*
- *Invece succede più sovente di quanto tu non creda. Ma la cosa più interessante è quando tu, per valori a eguale distanza di x hai trovato dei valori di $y(x)$ che se ne vanno per conto loro. Adesso, se tu hai un valore $y(X)$, come fai a trovare dove sta X ? Per esempio se vuoi moltiplicare 2.5×3 , tu cerchi il logaritmo di 2.5 e quello di 3 su tavole che ti danno i logaritmi di $1,2,3,4$ etc. Magari usi una interpolazione lineare come quella di Newton. Ma quando trovi il logaritmo del prodotto, come fai a trovare a che numero corrisponde? Non lo trovi sulle tue tavole, e non saprai mai che il prodotto fa 7.5 .*
- *Allora interp...per Giove, hai ragione. I logaritmi non sono più a eguale distanza. Adesso vedo dove serve il tuo metodo. Ma scusa. Perché non usiamo quattro punti?*
- *Ti dirò, credo che tre punti siano una buona scelta, altrimenti rischiamo di costruire curve che passano sì per quattro, cinque e sei punti, ma che vediamo subito ad occhio che non possono essere una buona rappresentazione della curva che vogliamo interpolare.*

Questo disegno te lo può spiegare: tutti possono vedere che la curva da interpolare che passa per A, B, C, D è molto probabilmente quella rossa, ma una mia formula analoga a quella data per tre punti, può invece darti quella verde, che anche lei passa per i quattro punti A, B, C, D. Con tre punti e una curva del secondo grado, mi pare meno probabile che succeda.



- *Vedo.*
- *Ciao, adesso devo andare?*

- *Ma dove?*
- *A interpolare logaritmi.* E Giuseppe Luigi scomparve di fretta in direzione di Via Po.