IL TEOREMA DEI QUATTRO COLORI

Tratto da una mia risposta a una domanda posta su Quora:
Cos'è il teorema dei 4 colori?

Risposta Breve:
Dixit Wikipedia ("Teorema dei quattro colori"):

*Il **teorema dei quattro colori** è un teorema di matematica* (topologia) *che afferma che data una superficie piana divisa in regioni connesse* (vedi sotto il concetto di exclave), *come ad esempio una carta geografica politica, sono sufficienti quattro colori per colorare ogni regione facendo in modo che regioni adiacenti non abbiano lo stesso colore. Due regioni sono dette adiacenti se hanno almeno una **linea** di confine in comune* (un punto non basta, e quindi nel diagramma in figura 1 bastano due colori, perché le varie regioni sono adiacenti a due sole regioni, senza contare quella esterna. Il punto centrale non conta come "confine"):

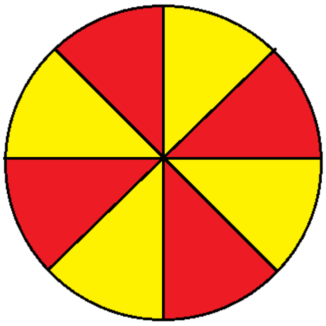

Fig.1:
Mappa con otto regioni che si toccano in un punto, per la quale bastano due colori.

*Ciascuna regione deve inoltre occupare un **territorio connesso**, cioè non deve essere formata da due o più parti sconnesse, ovvero con la presenza di exclavi* (come la Prussia Orientale post-Versailles e svariati Paesi odierni).

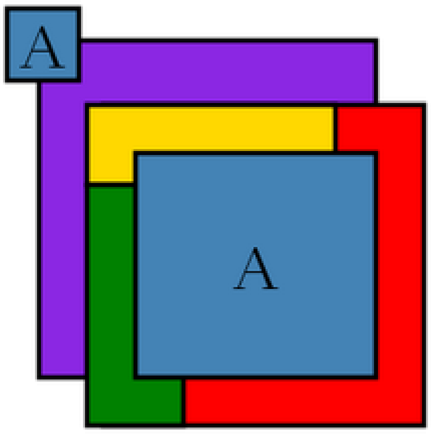

Fig.2
Se le due aree A devono mantenere lo stesso colore, occorrono cinque colori per disegnare la mappa (Wikipedia ed.inglese)

È immediato trovare mappe per le quali tre soli colori non sono sufficienti. E non è neppure eccessivamente difficile dimostrare che ne bastano al più cinque **(1)** *Tuttavia dimostrare che ne siano sufficienti quattro è particolarmente complesso, tanto che la dimostrazione di questo teorema ha richiesto, tra l'altro, un estensivo ricorso al computer, per una delle prime volte nella storia della matematica.*

Il teorema dei quattro colori presenta il vantaggio di essere facilmente enunciabile e di presentare addirittura due direttive di soluzione.
(I) Disegnare una **controprova**, cioè una carta politica che richieda cinque colori. Credo che milioni di dilettanti ci si siano provati, senza riuscirvi.
(II) **Provare il teorema** direttamente sulla base di principi matematici (così viene dimostrato il teorema dei cinque colori).

Per completezza, aggiungo che il teorema dei quattro colori strettamente vale solo per mappe planari, cioè disegnate su un piano (magari infinito). Anche per una sfera o un cilindro bastano quattro colori. **Ma per una *striscia di Moebius* occorrono sei colori e per un *toro* (ciambella) ce ne vogliono sette.**

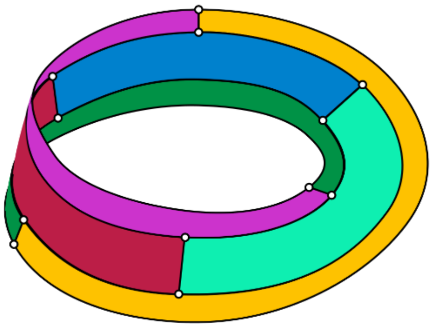

Fig.3
Sei colori possono essere necessari per una striscia di Moebius.
By David Eppstein - Own work, CC0, File:Tietze-Moebius.svg - Wikimedia Commons

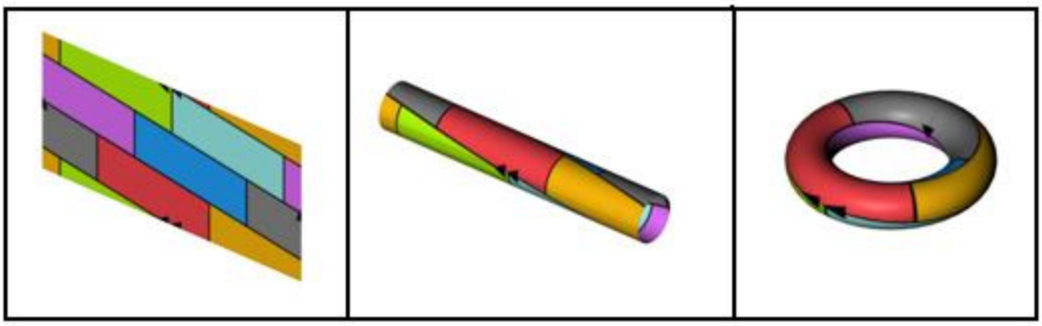

Fig.4:
Sette colori possono essere necessari per colorare una mappa su un toro.

Storicamente, la congettura fu annunciata il 23 ottobre 1852 da Francis Guthrie, Inglese nato in Sud-Africa. Nel 1879 Alfred Kempe diede una prima dimostrazione (provata poi erronea). Fu solo la prima di una serie di dimostrazioni poi provate erronee. La dimostrazione del teorema, annunciata il 21 giugno 1976, è attribuita a coloro che programmarono il computer, Kenneth Appel e Wolfgang Haken, dell'Università dello Illinois, basandosi su precedenti tentativi di Heinrich Heesch, tedesco. Mi sembrerebbe più giusto attribuire la dimostrazione al computer. A diverse obiezioni pubblicate da altri matematici fu risposto in blocco col libro *"Every Planar Map i s Four-Colorable (Appel & Haken, 1989).*

Detto questo, sembra detto tutto.

Ma se vogliamo andare per il sottile, il fatto che il teorema sia stato eventualmente provato facendo ricorso a uno o più computer, è come fare un buco in una diga.

Commento.

In un modo o nell'altro, mi sembra che ci sia una certa concordia sul concetto che la matematica, per esempio interpretando Gödel o Turing, sia ***inesauribile***. *Se questo è vero, allora abbiamo una semplice risposta alla domanda "che cosa resta da scoprire in matematica?", e la risposta è: "**praticamente tutto**".* Per quanti teoremi la specie umana abbia già dimostrato, tanti da riempire un centinaio di volumi negli scaffali delle nostre biblioteche, abbiamo appena incominciato: non si scherza con l'infinito. Il bello deve ancora venire. Feynman diceva che noi conosciamo solo le prime pagine del centinaio di volumi, e forse il vero divertimento incomincia con numeri di trilioni di cifre.

Esisterebbe dunque un compito immane davanti alla specie umana, compito che non sarà mai concluso e che assicura infinito diletto per quelli che vorranno dedicarsi alla matematica.

Ma ci sono due principali difficoltà. La prima è che il cammino di avvicinamento alle trincee della matematica si allunga ogni giorno che passa. E ogni neonato deve sempre partire da zero.
Possiamo continuare con il nostro esempio dei volumi sullo scaffale della matematica: non c'è modo di far partire il neonato di cui si parlava dal secondo volume invece che dal primo, mentre le trincee della matematica sono negli ultimi volumi, e ogni giorno si aggiungono nuovi fascicoli che allontanano le trincee. Certo, si potrebbe pensare di modificare geneticamente i cervelli dei neonati destinati alla matematica: ma se questi poi non potranno trasmettere il metodo e il senso delle loro scoperte, non avremo fatto altro che creare nuovi tipi di computer.
Anche se i matematici cercano di consolidare il terreno trovando scorciatoie che ci conducono a uno dei "PNR" (Problemi Non Risolti), possiamo immaginare che magari fra cento anni, il *cammino di avvicinamento* verso uno qualunque dei PNR non possa essere percorso nel breve periodo di una vita umana. È inutile dire che ciò non esclude che si possano sempre proporre problemi, come la cosiddetta ipotesi di (Euler)-Goldbach (che ogni numero pari può esser scritto come somma di due numeri primi), che un dilettante come Goldbach poté concepire verso il 1742, ed i più illustri matematici non hanno ancora completamente provato, ma è lecito sospettare che la maggioranza dei PNR finirà a poco a poco in una regione ormai troppo lontana dai rudimenti della matematica.

C'è (almeno) una seconda difficoltà. La dimostrazione dei PNR ogni tanto è basata su una felice intuizione e la dimostrazione può stare tutta comoda in una pagina. Ma questo caso è sempre più raro. La dimostrazione completa del famoso "**ultimo teorema di Fermat**" (Wiles, 1993-1994) occupa un libro di trecento pagine ed è il frutto di una vita di studi.

Ma ancora peggiore, per certi versi, è il caso del **teorema dei quattro colori.** Come si è detto, il teorema che quattro colori sono sufficienti "a colorare una mappa politica sotto certe ragionevoli condizioni" è stato dimostrato per la prima volta solo nel 1976 da Appel e Haken. Ma per dimostrarlo essi dovettero servirsi di tre computer che lavorarono per un totale di circa 1200 ore. Oggi i computers sono più veloci e soprattutto sono stati fatti progressi sull'impostazione del problema, ma la dimostrazione a mano richiederebbe ancora un tempo al di là di una vita umana. In effetti, pur non avendo trovato valutazioni dei tempi di lavoro per un uomo per risolvere il problema, ho letto che i computer dovettero fare "miliardi di calcoli" per dimostrare il teorema. Ora, una vita di cento anni contiene circa 3 miliardi di secondi, il che sarebbe sì e no sufficiente a contare le operazioni, senza parlare del doverle effettuare, o di svolgere altre funzioni vitali, quali il mangiare e il dormire. Dunque possiamo immaginare che molti teoremi del futuro richiederanno in media un numero crescente di ore di lavoro per un computer superveloce, fino a sfuggire alle possibilità dei computer esistenti, essendosi già lasciati da tempo alle spalle le possibilità di un uomo che ci lavori tutta la vita.

Ora, il fatto che bastino quattro colori per colorare qualsiasi mappa su un piano non ha, si dice, alcuna utilità pratica. I cartografi hanno disegnato per secoli mappe con tre, quattro o cinque o anche sei colori senza mai chiedersi se fosse possibile fare meglio. La ricerca della dimostrazione con mezzi umani, ha però dato impulso a interi nuovi campi della matematica, quali la teoria dei grafi e derivati. Ma il fatto che il teorema possa solo essere dimostrato per mezzo di computers ha creato una discussione infinita. Che cosa chiediamo da una prova? A che serve sapere che un certo risultato *che non ha applicazioni pratiche nell'immediato* è corretto se non abbiamo, anzi, *se non possiamo avere*, idea di come ci si sia arrivati? Su questo si discute da un pezzo, ma quello che abbiamo detto sopra sembra affermare che avremo sempre nuovi teoremi di matematica tra un miliardo d'anni, ma non li sapremo dimostrare se non usando potentissimi computers, *senza sapere come faranno*. Potremo allora dire che la matematica è destinata a morire come le altre scienze "esauribili" o no? **Resta ancora un passo da fare,** ma prima è bene discutere un altro aspetto della matematica moderna.

Della probabile infinità di problemi non risolti che ci fronteggia è interessante speculare su quali siano i primi che vanno risolti. Sembra difficile e certo presuntuoso fare un elenco di questi problemi; è ancora più difficile convincere i colleghi matematici che quelli e non altri sono i problemi prioritari, tanto per l'interesse intrinseco (ad esempio quando si tratta di congetture che sono alla base di sviluppi già acquisiti) quanto per il fatto che i tempi sembrano maturi per la dimostrazione.

Il primo che si cimentò con questo esercizio con successo credo sia stato David Hilbert, che proprio nell'anno 1900 presentò i problemi che secondo lui si doveva sperare che fossero risolti nel secolo ventesimo.

Si trattava di **ventitré** problemi dei tipi più diversi: si accetta unanimemente che otto siano stati risolti (SÍ) e due (l'ottavo e il dodicesimo) siano ancora non risolti (NON ANCORA).
Almeno quattro dei rimanenti sono definiti come "enunciati in modo troppo vago" (BOH?). Sette o sono parzialmente risolti, o per essi è stata proposta una soluzione, che però non è universalmente accettata (NI). Infine, di uno solo è stato dimostrato che è insolubile (CERTO NO). Curiosamente, né l'ultimo teorema di Fermat, né il teorema dei quattro colori, le cui dimostrazioni, come abbiamo visto, sono state due glorie della matematica del XX secolo, erano inclusi nell'elenco di Hilbert.

Con un bagaglio di problemi di Hilbert non risolti o di incerta soluzione, entriamo ora nel XXI secolo e terzo millennio, in preparazione del quale vari matematici pensarono di proporre una nuova serie di problemi per il prossimo secolo, o addirittura millennio. Tra queste varie proposte, la più nota è probabilmente quella fatta dal ***Clay Mathematical Institute***, fondato nel 1998, giusto in tempo per formulare i problemi, chiamati con enfasi americana "I problemi del millennio". Immagino volessero intendere "I problemi proposti all'inizio del terzo millennio", e non "i problemi che richiederanno mille anni per la loro soluzione", o, peggio ancora, "i problemi più importanti da risolvere nei prossimi mille anni". L'elenco è di soli sette problemi, e un premio di un milione di dollari è proposto per la soluzione di ciascuno di essi, tanto per invogliare i matematici. Ma evidentemente il businessman Landon T. Clay, dilettante in matematica e fondatore dell'istituto, non conosceva bene i suoi polli, come si vide subito. Così, verso il 2003 fu subito risolto uno dei sette problemi "del millennio". Dopo lunghe discussioni, si decise comunque di assegnare il premio al matematico russo Grigorij Perel'man, il quale lo rifiutò, come aveva rifiutato la Fields Medal (il "Nobel per la matematica") dicendo essenzialmente che ci sono cose che non si pagano coi soldi e che troppi soldi generano solo violenza.

Ecco i problemi:

1. relazione tra P e NP
2. Congettura di Hodge
3. Congettura di Poincaré (risolto)
4. Ipotesi di Riemann
5. Teoria quantistica ed equazioni di Yang-Mills
6. Equazioni di Navier-Stokes
7. Congettura di Birch e Swinnerton-Dyer

In questo elenco, i problemi sono stati enunciati in modo estremamente sommario, e probabilmente dicono poco. In realtà, se qualcuno dei miei improbabili lettori già possiede anche solo una vaga idea di cosa significhi l'enunciato di anche uno solo di questi problemi, probabilmente quanto ho scritto su questo soggetto è per lui noioso come la pioggia. E non parliamo di quello che sto per scrivere! Ma è consolante pensare che se invece di questi titoli abbreviati avessi scritto per esteso l'enunciato vero del problema, la comprensione di buona parte di loro non si sarebbe affatto semplificata.

Si tratta di provare in ogni caso se una ipotesi o congettura sia vera o falsa, oppure se determinate equazioni non abbiano o abbiano una soluzione, nel qual caso si chiede la soluzione.

I problemi sono stati scelti in base alla loro "utilità" in matematica. Ma, naturalmente, l'utilità matematica di questi problemi non è lo stesso che l'utilità pratica. Circa sei miliardi di esseri umani vivono felici senza affatto sapere che questi sette problemi esistono, e della loro eventuale dimostrazione non sapranno mai probabilmente nulla, se non molto alla lunga e alla lontana.

Capire in che cosa consistono questi problemi richiede già una certa attenzione ed un certo interesse. Qualcuno, venendo a sapere dell'esistenza dei problemi, potrebbe addirittura tentare di risolverne qualcuno. Si ricordi solo che, presentando i problemi, il Direttore dell'Istituto Clay disse: "*Risolvere uno di questi problemi resta comunque il modo più difficile di farsi un milione di dollari*".

Buona fortuna.

Dunque, per capire anche solo l'enunciato di tutti i teoremi del millennio, l'infante che sta imparando a contare sulle dita, deve studiare almeno quindici - diciassette anni. E qui ci viene un brivido freddo per la schiena, se notiamo che per formulare questi problemi sono bastati pochi secoli di ricerche matematiche da parte degli intelletti più fini dell'umanità. Se la matematica procede, se può procedere indefinitamente, come – ripeto, secondo certe interpretazioni - promette Gödel, è immediato ipotizzare che entro il prossimo millennio non solo avremo risolto i problemi pomposamente battezzati "problemi del millennio", ma ci troveremo a fronteggiare altri teoremi ben più complessi, per capire l'*enunciato* dei quali non basterà una vita umana. Ohimè! E chi li enuncerà? Evidentemente non degli esseri umani, ma dei computer. E chi li dimostrerà? Già l'ho detto, saranno dimostrati, se mai lo saranno, non già da esseri umani, ma da computer. E chi programmerà tali computer? Non c'è speranza, saranno altri computer. La matematica, cioè, diventerà un gioco riservato ai computer, ed avremo dei centri di ricerca, da cui ogni tanto un computer lancerà nel suo linguaggio un "EUREKA!!", avendo dimostrato in modo per noi inconoscibile, un teorema per noi incomprensibile. Presto, cioè, raggiungeremo il confine al di là del quale sta il vero infinito, l'infinito dei Problemi Non Risolti, anzi, dei Problemi Non Enunciabili in modo da noi comprensibile.

Ma poi, un brutto giorno, il sole diventerà una gigante rossa e il super-computer dei super-computer svanirà, con l'angoscia in cuore (ma hanno un cuore i computer?) che in matematica *tutto* resta ancora da fare.

NOTE:

(1) Una dimostrazione – fino a un certo punto - elementare si trova nel libro "Che cosa è la matematica", di Courant e Robbins, pp.394-398.

Wikipedia (edizione italiana), non dà dimostrazioni.