GLI ZERI DELLA ZETA DI RIEMANN E I NUMERI PRIMI.

Estratto del mio precedente post: LA FUNZIONE ZETA DI RIEMANN E I NUMERI PRIMI - Introduzione (quasi) elementare

Scritto in risposta a un'ennesima domanda su Quora: "In cosa consiste la funzione z di Riemann?"

Il presente estratto soprattutto elimina la parte in cui la funzione

$$ln(\zeta(s)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - 1/p^s)$$

viene trasformata in termini della funzione $\pi(x)$ che "conta" i numeri primi inferiori a x". Il motivo di questa scelta è che le macchinose operazioni necessarie non coinvolgono gli zeri della funzione Zeta di Riemann, ma in compenso fanno ricorso a metodi matematici non del tutto elementari. I curiosi possono vedere il mio precedente, sopracitato post.

Parte Ia, relativamente breve.

1. Preistoria.

Leonardo Euler/Eulero (1707-1783), un mostro della matematica, che tra l'altro era un calcolatore prodigio, si era dilettato a studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots.$$

già conosciuta ai suoi tempi come "serie armonica", **H,** e della quale era già nota da tempo la divergenza.

Eulero considerò anche altri esponenti **s** per i denominatori. D'ora in avanti considereremo questa somma come una funzione dell'esponente **s**, dandole il nome che le diede Eulero, di funzione ζ(s), leggi "**Zeta di s**".

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots \qquad s > 1.$$

Calcolando i valori brutalmente (e magari interpolando) troviamo il seguente diagramma, che evidentemente tende a infinito per valori di s tendenti a 1 e tende rapidamente a 1 per valori grandi di s: Per esempio, in ζ(10) il primo termine della serie vale 1, e il secondo vale 1/1024, che già facciamo fatica a vedere sul diagramma.

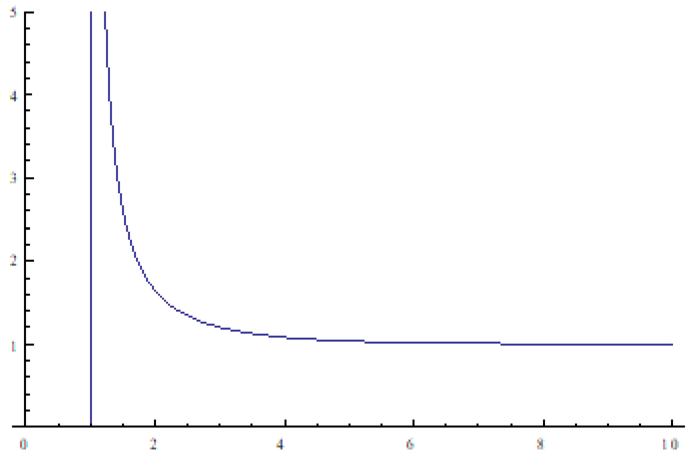

Fig.1

Dirichlet, maestro di **Riemann**, estese la funzione al campo reale, per qualsiasi **s >1.**

E' inutile spingersi più a sinistra: la funzione è infinita per valori di s inferiori o eguali a +1. Un matematico preferirebbe forse dire "la serie non ha più senso per valori di s < =1", sfumatura che lascia una porta aperta, dentro cui si precipitò Riemann.

A prima vista, la funzione Zeta sembra di una sconvolgente semplicità. Credo che questo sia un esempio calzante, per dimostrare che in matematica non bisogna mai fidarsi di ciò che a prima vista appare semplice e di scarso interesse.

Infatti le cose cambiarono presto, quando Euler ebbe un'altra pensata (1737). La serie Zeta nasconde un legame con i numeri primi e può essere scritta come prodotto che coinvolge i soli numeri primi:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{7^s}\right)\left(1 - \frac{1}{11^s}\right)\cdots}$$

Per vedere come il procedimento funziona, sia per semplicità s =1. Si ricordi la serie geometrica:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2 \ldots (x<1)$$

La dimostrazione è elementare, ma, se proprio non si sa dove cercare si veda https://it.wikipedia.org/wiki/Serie_geometrica. Le dimostrazioni ivi date sono molte. La mia preferita è quella che Wikipedia chiama "dimostrazione alternativa".

Quindi la funzione può essere scritta come un prodotto di serie geometriche (tutti i termini oltre a 1 sono inferiori a 1), e quindi , (i) prima scrivendo ogni serie geometrica che deriva da ogni fattore, (ii) poi eseguendo i prodotti

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots\right)\cdot\ldots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+$$

Cioè ne segue il risultato quasi miracoloso che, partendo da una PRODOTTO INFINITO che conteneva solo numeri PRIMI, otteniamo una serie Zeta di tutti i numeri INTERI, (con esponente **s**, se tutti i termini avessero tale esponente, che qui abbiamo posto eguale a 1). Ciò avviene perché, eseguendo il prodotto, otterremo una volta sola tutte le combinazioni di numeri primi con tutti gli esponenti possibili, e ogni combinazione corrisponde ad un unico numero intero (unica scomposizione in fattori primi di un numero intero).

Nell'esempio scelto otteniamo la serie armonica, che, sfortunatamente, diverge e (e, *en passant*, dimostra che i numeri primi sono infiniti).

Se poi si prende il logaritmo di questa funzione, dato che il logaritmo di un prodotto è dato dalla somma dei logaritmi dei singoli fattori e inoltre

$$ln\left(\frac{1}{n}\right) = -ln(n)$$

abbiamo il risultato che:

$$ln(\zeta(s)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - 1/p^s\right)$$

Dal secondo membro si può estrarre con qualche non banale artifizio analitico una funzione connessa alla **π(n)**, il nome tradizionale della funzione che conta i numeri primi fino a n. Presumo che, nonostante le difficoltà del procedimento, Riemann avesse già in mente come ottenere questo risultato prima di imbarcarsi nella sua celebre ricerca.

2. Entra in scena Riemann. Arrivano anche gli zeri della funzione Zeta.

Non è in genere possibile capire perché un matematico si proponga un problema. Comunque, prima del 1859 Riemann si dedicò alla dimostrazione del **"teorema dei numeri primi"** cioè dimostrare la congettura di **Gauss**, che

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)},$$

scopo meno ambizioso di quello che Riemann inaugurò con i suoi studi. Ciò lo si capisce dal titolo del suo articolo: **"(Nota) sul numero di numeri primi al di sotto di una determinata grandezza" (1859)**. Il numero di numeri primi fino ad x altro non è che la funzione π(x). Con questo articolo in nove pagine(!), Riemann gettò le fondamenta della *teoria analitica dei numer*i.

Conoscendo il risultato di Euler sopracitato, Riemann osservò che in qualche modo la successione disordinata dei numeri primi, opportunamente rielaborata, poteva essere eguagliata alla serie degli inversi dei numeri interi, cioè alla funzione Zeta. Se questa stessa serie, la funzione Zeta come era nota allora, avesse potuto essere dimostrata eguale a "*qualcos'altro*" che non si riferisse ai numeri primi, questo "qualcos'altro", eguagliato al secondo membro contenente la funzione π(n) avrebbe forse dimostrato il teorema dei numeri primi. *Si noti che Riemann non voleva voleva scoprire la successione dei numeri primi, cioè i numeri primi uno dopo l'altro (come "forse" fece). Voleva solo contarli.*

Ma che cosa poteva essere questo "qualcos'altro"?

A Riemann era nota una quarta pensata di Euler (1748).

Questi sapeva che un polinomio della forma per esempio

$$P(x) = x^2 + bx + c$$

con b e c razionali (per cui essi possono esser stati divisi per un eventuale coefficiente a di x^2, se diverso da zero) può essere scritto come

$$P(x) = x^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2)$$

dove r1 ed r2 sono le radici dell'equazione

O anche come,

$$P(x) = x^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2) =$$

$$= r_1 r_2 \left(\frac{x}{r_1} - 1\right)\left(\frac{x}{r_2} - 1\right) = r_1 r_2 \left(1 - \frac{x}{r_1}\right)\left(1 - \frac{x}{r_2}\right)$$

Con opportuni accorgimenti per le radici doppie e i segni, simili formule valgono anche per polinomi di grado qualsiasi maggiore di 2. Ma Euler non si fermò ai polinomi.

La sua idea fu che, se di una funzione a variabile reale noi conosciamo gli zeri, probabilmente si può creare una funzione prodotto affine a quella valida per i polinomi, magari con infiniti termini, se ci sono infiniti zeri.

Credo che la prima funzione a cui Euler applicò questo procedimento sia stata sin(x), i cui zeri erano arcinoti, e sono dati dai multipli interi, positivi e negativi, di π, come si vede anche dalla figura.

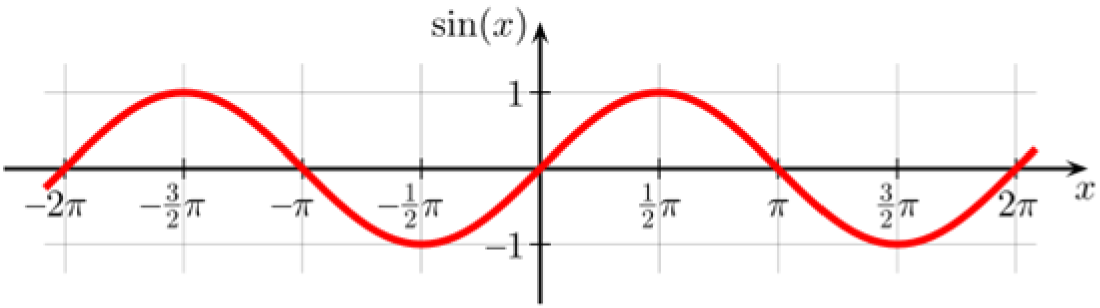

Fig.2

Euler non andava per il sottile e ai suoi tempi non si badava tanto alla “convergenza” delle serie e dei prodotti. Semplicemente si guardava se le formule ottenute un po' alla garibaldina dessero il risultato voluto o no. E quindi Euler congetturò una funzione che avesse gli stessi (infiniti) zeri della funzione seno.

Il suo risultato, diciamo “euristico”, è il prodotto:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Come lo si può indovinare "euristicamente"? Gli zeri di sin(x) sono x =0, ±π, ±2π, ±3π, per cui ci si aspetta una eguaglianza del tipo di

sin(x) = (x- 0)(x+ π) (x- π) (x+ 2π) (x-2π) (x+ 3π) (x-3π)…

…

$$\frac{\sin(x)}{x} = C\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

(si vedano le manipolazioni per l'equazione di secondo grado, e si provi a sostituire x con πz se si vuole ottenere la formula di Eulero) e quindi i due membri dovevano essere la stessa funzione, PERCHÉ AVEVANO GLI STESSI ZERI, a somiglianza di quanto avveniva con i polinomi, che erano identici (a meno di una costante) se avevano gli stessi zeri. Che gli zeri del prodotto a secondo membro siano rimasti gli stessi con le manipolazioni fatte, è evidente. Ma è altrettanto evidente che ciò non basta. Passare dalla formula euristica ad una formula rigorosa, non è banale. Ad ogni modo si noti quanto meno che la costante C, che abbiamo dovuto porre all'inizio del prodotto, vale 1, perché tale è il limite per x tendente a zero della funzione sin(x)/x (che gli increduli applichino la regola di De l'Hopital!) e per x =0 tutti i termini del prodotto valgono 1.

Per questo saggio introduttivo basta sapere quello che bastò a Euler nel 1735 per dimostrare per la prima volta il "problema di Basilea", e, naturalmente, basta sapere che la formula da lui proposta è corretta ed è considerata una delle più "belle" formule della matematica. Non solo, ma oggi sappiamo che esiste un teorema che assicura che "ogni funzione intera" (cioè analitica, ovvero infinitamente differenziabile nell'intero piano complesso) può essere fattorizzata in simile modo **(Teorema di fattorizzazione di Weierstrass, 1876).**

Si tratta, a pensarci bene, di un risultato stupefacente: basta conoscere TUTTI gli zeri di una funzione nel campo complesso (cioè tutti i punti in cui si annullano tanto la parte reale quanto la parte immaginaria della funzione), e l'intera funzione, per complicata che sia (anche se soggetta a certe restrizioni), viene TOTALMENTE ricostruita.

3. Perché addentrarsi nel campo dei numeri complessi?

Visto lo stretto legame fra la funzione zeta e i numeri primi, espresso dalla

$$ln(\zeta(s)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - 1/p^s\right)$$

e considerata la formula che dava la funzione sin(z) in funzione dei suoi zeri, Riemann deve essersi chiesto se "l'altro modo" di ricavare la funzione Zeta fosse l'espressione della funzione in termini dei suoi zeri, come insegnato da Eulero, e paragonando le due formule si potesse trovare, chissà, qualche preziosa relazione tra gli zeri della funzione Zeta e i numeri primi, che permettesse di dimostrare il teorema dei numeri primi. In effetti, il membro di destra, come già annunciato, non senza qualche acrobazia matematica, può essere trasformato così da includere la π(n). Non è sorprendente: dopo tutto esso contiene tutti e solo i numeri primi.

Il compito di Riemann sarebbe stato facile se, in analogia col risultato di Euler per sin(πz), avesse potuto trovare una relazione della forma:

$$\zeta(s) = \zeta(0) \prod (1 - s/\varrho_i)$$

dove ϱ(i) è lo i-esimo zero della funzione Zeta e il prodotto coinvolge tutti gli zeri.

Il primo termine è una costante, a cui diamo il nome di ζ(0), perché se mettiamo 0 al posto di s, otteniamo il valore 1 per tutti i fattori del prodotto.

Prendendo il logaritmo dell'equazione così ottenuta, non ci sarebbe stato altro da fare che scrivere:

$$ln(\zeta(0)) + \sum \ln\left(1 - \frac{s}{\varrho_i}\right) = -\sum \ln\left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)$$

dove la prima somma è su tutti gli zeri della funzione Zeta, e la seconda sulle potenze s di tutti i numeri primi. Ecco che finalmente gli zeri sono arrivati nel quadro. Occorre che gli zeri siano semplici eccetera eccetera. Ma intanto avremmo una formula che lega gli zeri della funzione Zeta ai numeri primi e spiega l'interesse degli zeri della funzione Zeta per coloro che studiano i numeri primi.

Se la cosa avesse funzionato, Riemann avrebbe potuto trasformare opportunamente il membro di destra in modo da coinvolgere la π(n) e magari anche il membro di sinistra in modo da renderlo più maneggevole. Però la trasformazione del II membro non è elementare e bisognerà che il lettore mi creda che il II membro, che dopotutto coinvolge tutti e solo i numeri primi, può essere trasformato in termini di π(n). Non me ne occuperò, se non dando il risultato finale, anche perché *nella manipolazione del II membro non entrano gli zeri della funzione Zeta, ma altri concetti matematici non elementari.*

Più rilevante alla nostra questione è il primo membro. Qui Riemann si rese subito conto del fatto che la formula ideale sopra indicata non serviva a nulla. Il problema era: "**Dove sono gli zeri della Zeta?**" Infatti, se guardiamo il diagramma in Fig.1, di zeri non ce ne sono. Come se non bastasse, la serie di Eulero con **s=0** produceva la serie armonica, con il bel risultato che

ln (ζ (0)) = Infinito,

che rovinava tutto.

Fortunatamente Riemann aveva un asso nella manica, perché lui era uno dei due principali fondatori della teoria delle funzioni di variabile complessa (l'altro essendo **Augustin Cauchy**, uno dei più sottovalutati matematici della storia). La variabile **s** poteva benissimo essere una variabile complessa (lui pose **s= σ + it**, notazione che ci è rimasta in eredità) e gli zeri della funzione ζ(s) potevano essere benissimo sparpagliati sull'intero piano complesso. Per questo occorreva che la Zeta fosse definita sull'intero piano complesso, il che complicava le cose, ma non era cosa da spaventare Riemann. Naturalmente non era garantito che questi zeri esistessero: ci sono funzioni che non hanno zeri in tutto il piano complesso (e una di esse la incontreremo fra breve).

Dunque la ricerca degli zeri della funzione Zeta per poter applicare la formula di Euler è la ragione per cui Riemann dovette estendere la funzione al piano complesso, considerando che la funzione Zeta non ha zeri sull'asse reale.

Inoltre incominciamo a vedersi profilare l'opportunità di una congettura su **come gli zeri della funzione Zeta siano disposti sul piano complesso**. Se gli zeri fossero disordinatamente sparpagliati (come è disordinata la successione dei numeri primi), avremmo decisamente un problema in più. Invece, come vedremo, un certo ordine c'è, o almeno si spera che ci sia, ciò che è la sostanza della **"congettura di Riemann".** Ma sia chiaro che Riemann sprecò poche parole (esattamente sei righe a p.139 dell'*Opera Omnia*) su questo soggetto.

Con questo potrei concludere il mio saggio. Ma non vorrei dare l'impressione che il compito che Riemann si era proposto fosse così semplice.

Quindi, che gli spiriti forti continuino a leggere. Estranei astenersi.

Parte II

In effetti, estendere la funzione Zeta al piano complesso e applicare la formula di Euler per sfruttarne gli zeri, non era possibile "tout court", perché occorreva anzitutto liberarsi del problema

$$ln\ (\zeta\ (0)) = Infinito,$$

Ad ogni modo, Riemann procedette con mano sicura dando due procedimenti per estendere la funzione al piano complesso. La seconda via era evidentemente la sua preferita, perché ne ottenne in un colpo solo l'estensione della funzione ζ(s), e introdusse una nuova funzione che magicamente contribuì alla soluzione del problema. Il risultato della prima parte dei suoi laboriosi calcoli su questa seconda via è **l'equazione I**:

$$\left(\frac{s}{2}-1\right)!\ \pi^{-\frac{s}{s}}\zeta(s) = F(s,\ 1\text{-}s) - \frac{1}{s(1-s)}$$

Ciò che più ci importa al nostro livello non è la forma esplicita della funzione *F(s, 1-s)* a secondo membro, ma il fatto che tanto la *F(s,1-s)* (di cui Riemann ricavò un'espressione in forma integrale) quanto il termine *-1/(s(1-s)*) restano invariati per lo *scambio di s con (1-s)*. Quindi anche il termine a primo membro deve godere della stessa proprietà di invarianza.

Moltiplicando i due membri per (s/2)(s-1), espressione anch'essa invariante per lo scambio s, 1-s, e notando che (s/2)(s/2–1)! = (s/2)!, Riemann ottenne la funzione che lui battezzò ξ(s), prodotto di termini tutti invarianti per scambio di s con 1-s

$$\xi(s) = \frac{s}{2}(s-1)\left(\boldsymbol{\frac{s}{2} - 1}\right)!\ \boldsymbol{\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)}$$

$$\xi(s) = \left(\frac{s}{2}\right)!\ (s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

In cui il termine in grassetto della prima equazione è il primo membro dell'**equazione I**, invariante per lo scambio di s con 1-s. Ma anche il prodotto (s/2)(s-1) gode della stessa proprietà (si provi a calcolarlo, tanto per esercizio), per cui

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

La prima osservazione è che questa proprietà della funzione ξ(s) permette di **estendere la funzione Zeta a valori di s sull'asse reale negativo.**

Basta per questo scrivere

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

nella forma

$$\left(\frac{s}{2}\right)!\,(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \left(\frac{1-s}{2}\right)!\,(-s)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s)$$

Il secondo membro, si noterà, altro non è che il I membro (formula per ξ(s)) in cui in luogo di s si è posto 1-s.

Si può così ricavare la bella formula

$$\zeta(s) = \left(\frac{\left(\frac{1-s}{2}\right)!\,(-s)\pi^{-\frac{1-s}{2}}}{\left(\frac{s}{2}\right)!\,(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}}\right)\zeta(1-s)$$

E tanto potrebbe bastare, per uno che disponga di mezzi di calcolo adeguati.

Se vogliamo conoscere ζ(-11), valore sinora proibito, ci basta conoscere ζ (12), valore permesso. Tutti i termini del fattore che moltiplica ζ(1-s) hanno significato e quindi il valore è calcolabile, e si ottiene ζ(-11)= 0.02109.

Su questa base, mediante un programma del tipo di Mathematica, possiamo estendere il nostro diagramma di Fig.3 a sinistra di s=0, ottenendo:

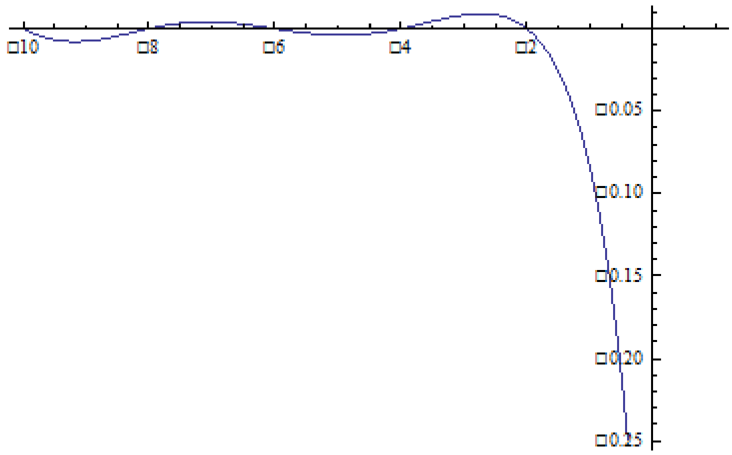

Fig.3

in cui spiccano gli "zeri" nei punti -2, -4, -6 etc, cioè per s=-2n, *che provengono dal fatto che la funzione Gamma/fattoriale ha dei poli (cioè assume valore infinito) nei numeri interi negativi.* Mentre al numeratore la funzione ((1-s)/2)! è positiva e maggiore di 1 per s negativo, la funzione (s/2) ! a denominatore ha i suoi poli per i valori s/2 = -n, ovvero **s =-2n**. Questi valori infiniti al denominatore si traducono in zeri della funzione, i cosiddetti "**zeri banali**" della funzione Zeta (Riemann doveva avere un certo germanico *sense of humour*, per chiamarli zeri "banali").

Noto a questo punto un celebre paradosso, che si spiega rapidamente osservando che **non si può estendere impunemente il valore di una serie oltre il dominio in cui essa converge**. Infatti, guardando il diagramma o consultando opportune tavole, si trova che Zeta(-1) = -1/12. Ma Zeta(-1) = 1 + 2 + 3 +4…, d'onde il paradosso (che, come abbiamo visto, è facilmente confutabile.

Gli Zeri nei punti s = - 2n continuano all'infinito, ma non si creda che la funzione Zeta per grandi valori negativi di Re(s) sia una funzione di tutto riposo. Si veda lo spettacoloso diagramma in 3D della parte reale della Zeta, con un labirinto di valli e picchi, di cui forse una parte è dovuta alla larghezza delle maglie della rete, che tra l'altro non permettono di vedere gli zeri della funzione. Si noti che i picchi della parte Nord-Ovest della funzione non sono piatti in cima, ma la piattezza risulta dal fatto che essi sono troncati all'altezza 10^(8). Naturalmente, questo incredibile labirinto è tutto ricavabile dalla sola conoscenza degli zeri della funzione, e lascia immaginare quale interesse possa provare il matematico purosangue ad esplorarlo.

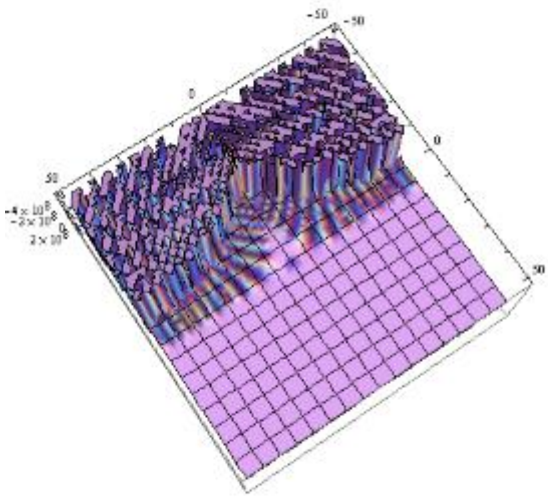

Fig.4

Questo comportamento e la posizione dgli zeri sono dimostrati dal diagramma della funzione sull'asse reale continuandolo fino a valori di s = -30

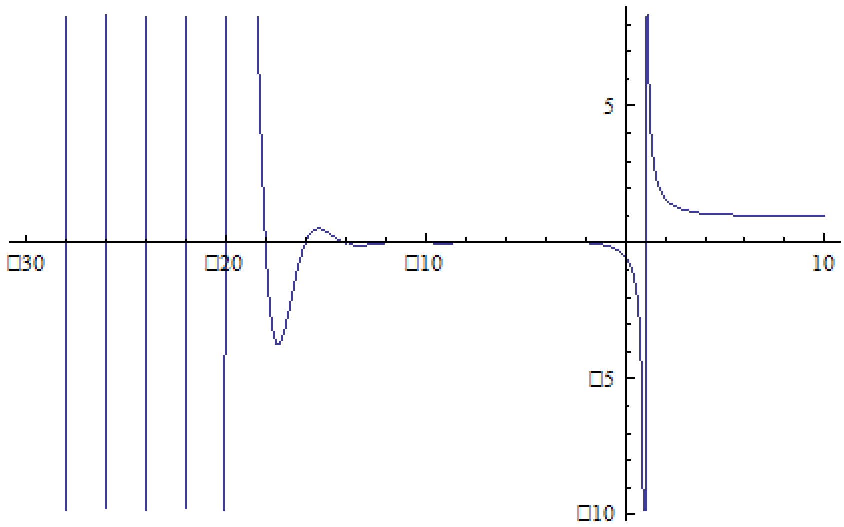

Fig.5

(in cui gli zeri per s > -10 non sono visibili, per la scala scelta, mentre sono visibili in Fig.4).

Una prima considerazione è che il passaggio al campo complesso ci permette di completare la Zeta sull'asse reale (negativo), il che dimostra l'importanza di questa estensione.

Ma gli zeri che abbiamo trovato ci servono. Se ci fossero solo loro, il prodotto che cerchiamo avrebbe la forma:

$$\zeta(s) = \zeta(0?)(s+2)(s+4)(s+6)\ \ldots$$

che chiaramente diverge per s maggiore di 1, dove invece abbiamo visto che la funzione vale circa 1. Dunque questi zeri, che si trovano “banalmente”, non solo sono “banali”, ma sono addirittura nocivi agli scopi di Riemann.

Diverso è il caso della funzione ξ(s). Dalla sua forma

$$\xi(s) = \left(\frac{s}{2}\right)!\,(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

e sapendo (da altre fonti) che la funzione Gamma di Eulero o la sua affine fattoriale (estesa ai numeri complessi) **non hanno zeri in tutto il piano complesso**, *la ξ sembra averne uno solo in s=1, oltre agli zeri della funzione Zeta, ovunque essi siano*. Ma non tutti: la funzione (s/2)! ha dei picchi di valore infinito nei punti in cui la variabile s/2 assume valori interi negativi, e quindi proprio dove **s** assume valori pari negativi, cioè dove la Zeta vale zero.

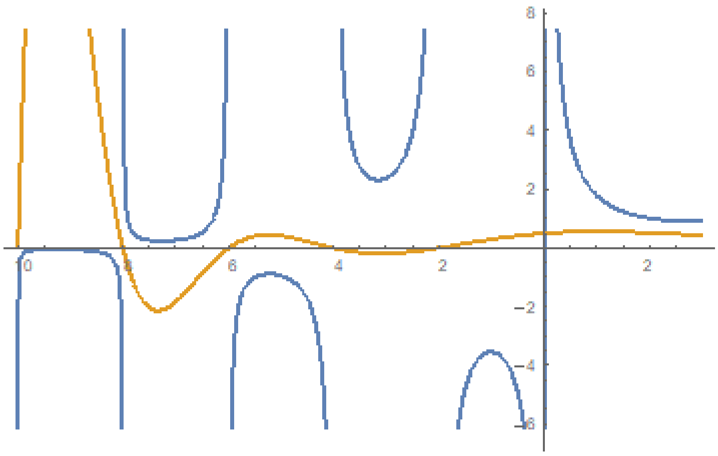

Fig.6

In questa figura 15 ho separato i due fattori che compaiono nella ξ(s), cioè (s/2)! (in blu) e tutto il resto (ocra): si vede che gli infiniti della (s/2)! sono situati nelle posizioni degli zeri banali e magicamente li cancellano, di modo che alla funzione ξ(s) restano solo gli “zeri non banali”, che, ovviamente, non compaiono in questa figura, che ci dà la funzione sul solo asse reale. Lo stesso avviene per lo zero in s = 1 che risulta dal fattore (s-1), separatamente cancellato dal polo della Zeta(1) = infinito. Ho scritto magicamente, perché non sempre gli zeri cancellano i poli: occorre che siano soddisfatte determinate condizioni.

Prendendo i logaritmi naturali dei due membri ed eseguendo una sottrazione troviamo:

$$ln\zeta(s) = \ln\xi(s) - ln\left(\frac{s}{2}\right)! - ln(s-1) - \frac{s}{2}\ln(\pi)$$

Ma dove possiamo trovare il valore della funzione ξ(s) ? Nella formula precedente, la ξ(s) è definita in base alla Zeta(s).

Questa relazione è inutilizzabile, perché sarebbe un po' come un cane che si morde la coda. Qui però Riemann tornò al suo proposito iniziale ed affermò nel suo lavoro (ma una dimostrazione corretta arrivò soltanto dopo più di trent'anni) che la funzione ξ(s) , diversamente dalla Zeta(s), può essere sviluppata come desiderato:

$$\xi(s) = \xi(0) \prod \left(1 - \frac{s}{\rho_i}\right)$$

O anche:

$$\ln \xi(s) = ln\xi(0) + \sum ln\left(1 - \frac{s}{\rho_i}\right)$$

dove ρ_i sono gli zeri della funzione $\xi(s)$, che corrispondono agli zeri "non banali" della funzione $\zeta(s)$, gli altri zeri essendo inutilizzabili. Si utilizzi l'equazione per $\xi(s)$ con s=0. Dal diagramma della Zeta vediamo che $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$. Inoltre (0)! vale 1, π^0 vale 1, e quindi $\xi(0) = \frac{1}{2}$.

Siamo così arrivati a realizzare l'obiettivo di avere due espressioni diverse per il lnζ(s), che inevitabilmente devono risultare eguali.

Esse sono, lo ricordiamo:

(1) $$ln\zeta(s) = ln\xi(0) + \sum ln\left(1 - \frac{s}{\rho_i}\right) - ln\left(\frac{s}{2}\right)! - ln(s-1) - \frac{s}{2}\ln(\pi)$$

(2) $$ln\zeta(s) = -\sum \ln\left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)$$

Munito di due espressioni fondamentalmente differenti per la funzione Zeta, una basata sugli zeri non banali della Zeta e l'altra basata su tutti e solo i numeri primi, ed eguagliandole, non senza diverse acrobazie matematiche, su cui non mi soffermerò per non appesantire ulteriormente il bagaglio di questo saggio, Riemann potè finalmente produrre la sua formula:

$$\pi(x) = Li(x) + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\mu(n)}{n}\right) Li(x^{\frac{1}{n}}) + \sum_{n=1}^{N} \sum_{\rho} Li\left(x^{\frac{\rho}{n}}\right)$$

Dove Li(x) è il logaritmo integrale di x, definito come

$$\mathrm{Li}(x) = \mathrm{li}(x) - \mathrm{li}(2) = \int_2^x \frac{1}{\ln(y)}\, dy$$

La relazione π(x) ~ Li(x) , era un perfezionamento della congettura di Gauss, ideato da Dirichlet (1838), che a Gauss l'aveva comunicato.

In quanto alla funzione μ(n) essa è la **funzione di Moebius**, della teoria "elementare" dei numeri, che risulta dalla trasformazione del secondo membro in un'espressione che contiene la funzione π(n). Per il lettore curioso, essa è definita come:

· μ(1) =1,

· μ(n) = 0 se n contiene nella sua scomposizione in fattori primi un quadrato (o qualsiasi potenza di un numero primo);

· μ(n) = 1 se n contiene un numero pari di fattori primi nella scomposizione in fattori primi

· μ(n) = -1 se n contiene un numero dispari di fattori primi.

Riemann suggerì che prendendo unicamente i termini Li(x^1/n), si trovava già una buona approssimazione: fino a dieci milioni, l’errore di Riemann nell’approssimazione al conteggio di numeri primi risultava dell'ordine delle decine, mentre quello di Li(x) è da quattro a dieci volte maggiore. Poi aggiunse anche il termine sugli zeri della Zeta.

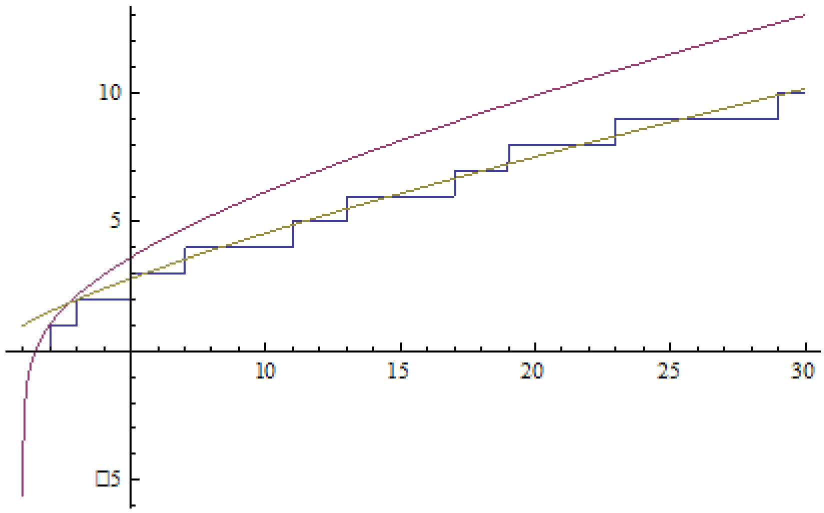

Fig.7

La π(x) è la funzione gradini originale che vogliamo approssimare al meglio. Il logaritmo integrale (primo termine di destra) è la funzione (rossa) più alta, i primi due termini insieme danno la linea ocra, che, come si vede, interpola assai bene i gradini.

Ma quale sarà l’effetto degli zeri? Ecco qua:

Con le prime dieci coppie di zeri (gli zeri vengono a coppie, ϱ e 1-ϱ):

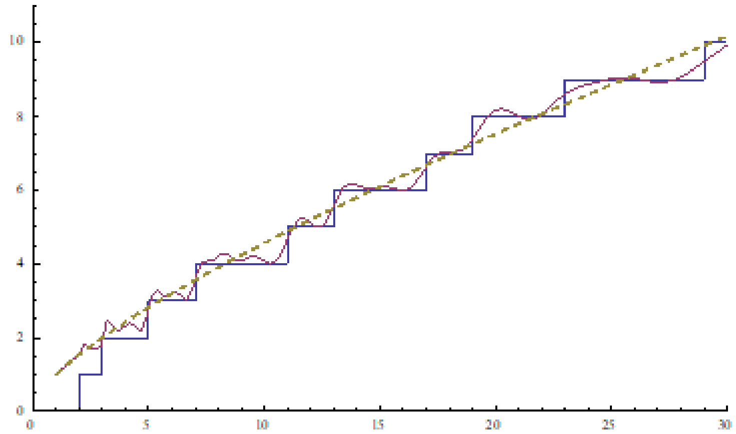

Fig. 8

Con le prime cento coppie di zeri troviamo:

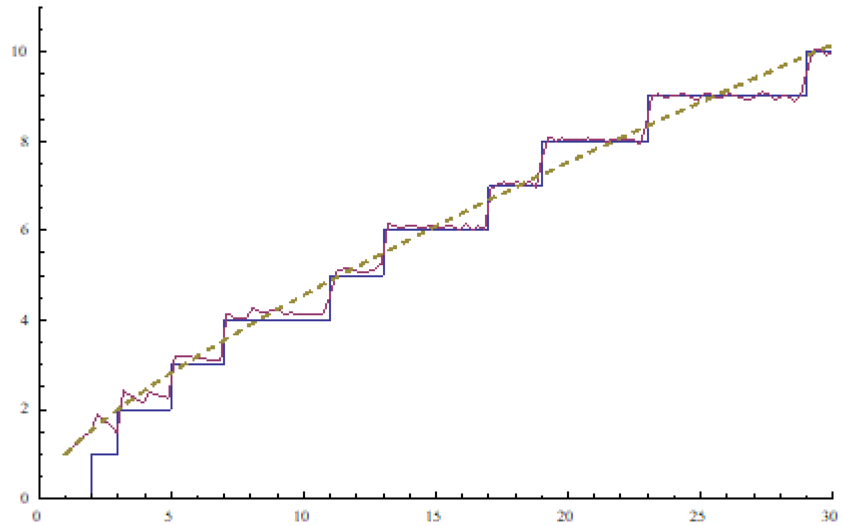

Fig.9

Si conosce oggi la posizione dei primi 10^13 zeri (2016), tutti rigorosamente allineati in fila indiana sulla retta σ= ½, ma il risultato che abbiamo davanti ai nostri occhi è, secondo me, uno dei risultati più notevoli della matematica ottocentesca. Si tratta di un diagramma che ai tempi di Riemann era praticamente impossibile vedere "dal vivo", ma, chissà, forse lui aveva "visto" anche questo.

Ma, a questo punto, ci accorgiamo che abbiamo parzialmente assistito, sia pure dalla terza o quarta fila, a un tour de force matematico non piccolo, abbiamo trovato un modo di trasformare una funzione liscia in una funzione a gradini, ma non abbiamo minimamente parlato della congettura o ipotesi di Riemann. Perché gli zeri dovrebbero giacere tutti sulla retta σ = ½?? A Riemann, la cosa evidentemente non interessava. Nel suo articolo, la sua ipotesi viene menzionata solo *en passant*, aggiungendo che la sua validità o meno non gli serve per "l'immediato obiettivo delle sue investigazioni", sempre mirando alla dimostrazione del teorema dei numeri primi.

Riemann non era soddisfatto del suo risultato (che lui non vide, ma che è ai nostri occhi quasi incredibile) perché, a suo parere, non dimostrava che il termine correttivo, che ci dà la stupefacente funzione a gradini, durasse per così dire all'infinito, permettendo di dimostrare il teorema dei numeri primi, e dando addirittura una previsione esatta di tutti i numeri primi. Dal suo punto di vista, Riemann aveva fatto fiasco, non avendo dato una convincente dimostrazione del teorema dei numeri primi.

Naturalmente, dall'espressione di ζ(s) come prodotto ricaviamo che la funzione può assumere valore zero (con Re(s) >1) solo se uno dei fattori

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_i^s}\right)}=\frac{p_i^s}{p_i^s-1}$$

vale zero, ciò che per Re(s) > 1 non avviene mai. Dunque niente poli a destra della retta parallela all'asse Immaginario Re(s)=1. D'altra parte uno zero a sinistra dell'asse immaginario, mettiamo in σ =- 0.1, per la proprietà

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

si rifletterebbe in σ = 1- (- 0.1)=1.1, a destra della Re(s)= σ =1. Quindi, niente zeri al di fuori della striscia compresa fra le rette σ =0 e σ =1.

Sappiamo quindi che gli zeri non banali della ζ(s), comuni agli zeri della ξ(s), sono tutti nella striscia compresa fra le rette σ =0 e σ =1, e che la ξ(s) è invariante per riflessione s <-> 1-s. E' dunque ragionevole pensare che gli zeri possano essere tutti sull'asse di questa riflessione, cioè sulla linea σ =1/2 La "retta critica") , che si ottiene risolvendo l'equazione s = 1-s. Questa è la **congettura di Riemann,** uno dei "**Millennium Problems**" del *Clay Institute*, a cui è destinato un premio di un milione di dollari. Come si è detto, Riemann aggiunse che comunque il resto del suo lavoro, dedicato a dimostrare (senza successo) il teorema dei numeri primi, che lo condusse ad esprimere la π(n) in termini degli zeri della Zeta di Riemann, non richiedeva che la congettura fosse corretta. E' tuttavia evidente che se sapessimo che tutti gli zeri della Zeta sono allineati sulla retta σ =1/2, la loro ricerca sarebbe immensamente facilitata, e così la costruzione di figure come Fig.9, il cui protrarsi all'infinito sarebbe non una possibilità ma una certezza.

Parte III.

Tutto ciò è bello e istruttivo, ma spiega soltanto come Riemann estese la funzione Zeta di Euler al campo complesso, dandole il suo nome, come trovò alcune relazioni importanti, come giunse a formulare in sei righe la sua famosa congettura.

Penso tuttavia che chi ha qualche curiosità circa la funzione Zeta resterebbe sorpreso a leggere il capitolo "La funzione Zeta di Riemann", tratto dal testo iperclassico di E.T Whittaker & G. N Watson, *A course in modern analysis* (1963), capitolo XIII. Su sedici pagine fitte di formule, 13 **righe** sono dedicate all'ipotesi di Riemann, dicendo tra l'altro che, se provata, l'ipotesi avrebbe conseguenze di vasta portata sulla teoria dei numeri primi. Evidentemente, per un cultore dell'analisi matematica, che la funzione abbia tutti i suoi zeri complessi sull'asse $\sigma = 1$, non è l'aspetto più interessante, o non lo era nel 1963.

Infatti la funzione Zeta di Riemann non è tutta qui. Chi vuol vedere che cosa si nasconde dietro l'apparentemente semplice serie di Euler (s = intero), di Dirichlet (s = reale), di Riemann (s = complesso), seconda equazione di questo mio saggio, dia un'occhiata alla pagina Riemann zeta function - Wikipedia.

Vale, improbabile lettore coraggioso che sei giunto sin qui.