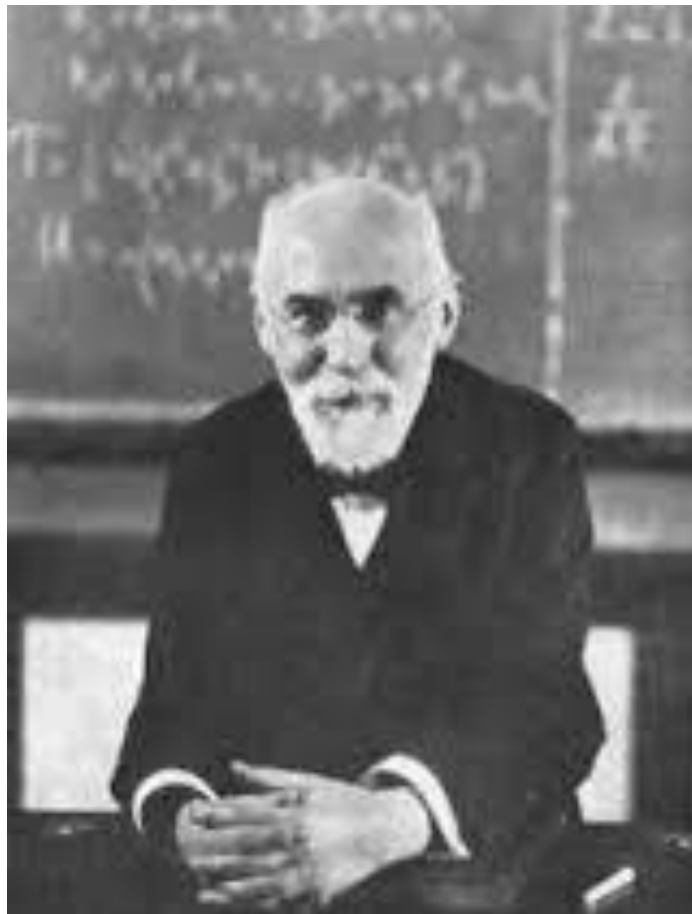


# TRASFORMAZIONI DI LORENTZ “INDIMENTICABILI”

## Parte I

**In cui si ottengono in modo diretto le formule delle trasformazioni di Lorentz.**



[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/33/Hendrik\\_Antoon\\_Lorentz.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/33/Hendrik_Antoon_Lorentz.jpg)

The website of the Museum Boerhaave states "vrij beschikbaar voor publicatie" (freely available for publication). [Public domain], via Wikimedia Commons

Da diversi decenni i libri di testo di relatività ristretta (special relativity) cercano di eliminare la formulazione del piano di Minkowsky come piano pseudo-euclideo, in cui la metrica rimane quella del piano euclideo, ma una delle coordinate (in questo caso inevitabilmente il tempo) è immaginaria. Questo rende la metrica piuttosto anomala, perché in genere si vuole che la metrica dello spazio (la distanza fra due punti definita dal sistema) sia “defnita positiva”, cioè sempre positiva, o, al massimo nulla. Naturalmente, il fatto che nel piano di Minkowsky la metrica sia una finta metrica definita positiva, porterà a interessanti conseguenze, che vedremo semmai in altra occasione.

Il fatto è che la formulazione di Minkowsky è assai comoda per introdurre alcuni concetti abbastanza peregrini della relatività ristretta e, tra l’altro, ottenere senza perdersi in calcoli algebrici, semplici ma noiosi, la formula delle Trasformazioni di Lorentz, che è quanto vedremo ora.

Taluni pensano che questa formulazione confonda le idee e renda più complicata l’introduzione del calcolo tensoriale. Non ci credo. I casi sono due, o lo studente non progetta di servirsi mai del calcolo tensoriale, nel qual caso questa seconda obiezione è dannosa, perché il calcolo tensoriale richiede anche lui una certa preparazione ed un certo sforzo extra, e fornisce un arsenale eccessivo per il “semplice” studio della relatività ristretta; oppure lo studente prevede di procedere alla relatività generale o ad altre discipline che richiedano l’uso del calcolo tensoriale. Ma se è così, non vedo che difficoltà possano sussistere: lo studente è certamente dotato in matematica al di sopra della media e quindi non avrà alcuna difficoltà a passare da una coordinata tempo immaginaria a un calcolo in cui la coordinata resta reale, ma si introducono le coordinate covarianti e controvarianti e tutto il resto, fecondo di altre applicazioni e risultati.

## PARTE I

### La rotazione nel piano.

Le formule di rotazione, che ci danno le coordinate di un punto quando il segmento che congiunge l'origine al punto è ruotato di angolo  $\vartheta$  ( o il piano è ruotato di un angolo  $-\vartheta$ ) sono ben note:

$$x' = x \cos\vartheta - y \sin\vartheta$$

$$y' = x \sin\vartheta + y \cos\vartheta$$

Si possono derivare in vari modi.

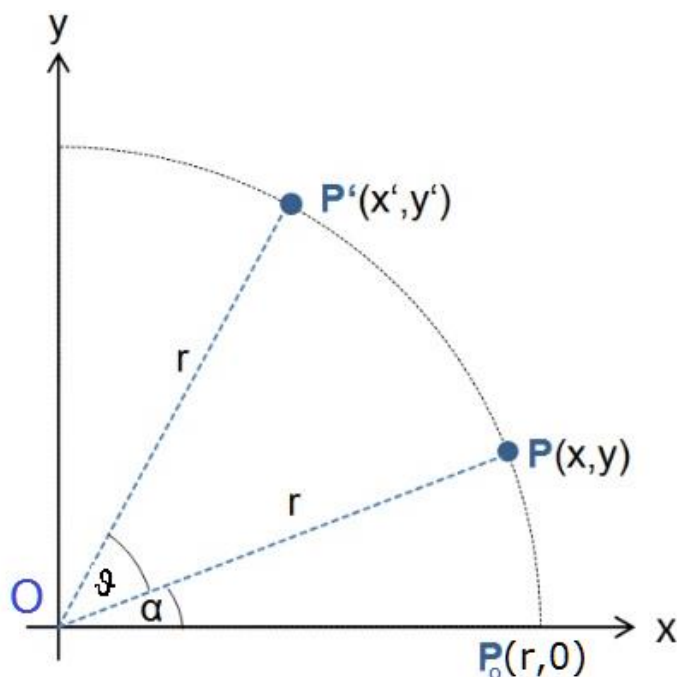
Intanto notiamo che per economia si può usare il concetto di matrice e, scambiando i membri, scrivere:

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Ne parleremo più avanti.

Se si vuol seguire un procedimento geometrico, il più semplice che ho trovato in rete è quello di considerare dapprima il vettore  $\mathbf{v}$ , un estremo del quale è l'origine, e l'altro il punto  $P_0$ , di coordinate  $(r, 0)$ . Ruotandolo di un angolo  $\alpha$ , troviamo il punto  $P$ , che ha coordinate

$(r \cos\alpha, r \sin\alpha)$ . Questo sarà il nostro punto di partenza di coordinate  $(x, y)$ .



Ora lo ruotiamo di un ulteriore angolo  $\vartheta$  e ovviamente arriviamo nel punto di coordinate  $(r \cos(\alpha + \vartheta), r \sin(\alpha + \vartheta))$ .

Usiamo ora le formule di addizione, e troviamo

$$(r \cos \alpha \cos \vartheta - r \sin \alpha \sin \vartheta, r \cos \alpha \sin \vartheta + r \sin \alpha \cos \vartheta).$$

Ora scriviamo che  $r \cos \alpha = x, r \sin \alpha = y$ , ed abbiamo magicamente le nostre formule di rotazione.

Questa dimostrazione mette in luce un fatto essenziale: **gli angoli si sommano**. Ed è questa la loro bella proprietà: chi ha inventato gli angoli doveva essere un genio. Ma se non avessimo uno strumento per misurare gli angoli con precisione? In effetti, se ci si pensa, misurare un angolo in radianti con una certa precisione, non è facile. Se qualcuno vi dice di calcolare l'angolo formato dall'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti 3 e 9.5 con uno dei due cateti, per esempio il più lungo, che cosa ottenete? A meno che abbiate un goniometro di altissima precisione, se ottenete  $17^{\circ} 30'$  vi va già bene. In realtà è quasi giusto, ma per talune applicazioni non lo è abbastanza.

E qui suggerisco un trucco una volta per tutte: si calcolino in qualche modo le funzioni trigonometriche dell'angolo, per esempio la tangente dell'angolo, che è eguale all'altezza diviso la base del triangolo rettangolo, in questo caso  $3/9.5$ , e si cerchi l'arcotangente su tavole o computer, che in genere lo danno in radianti, *con tutta la precisione che vogliamo*. In questo caso il risultato è  $17^{\circ} 31' 32.16''$ .

Usiamo dunque questo metodo balordo ma funzionante: se abbiamo un segmento inclinato di un angolo  $\vartheta$ , sappiamo che  $y/x = \operatorname{tg} \vartheta$ , tangente che in genere viene notata come  $m$ .

E le nostre formule? Niente paura, la trigonometria ci dice che

$$1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta = \frac{\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \frac{1}{\cos^2 \vartheta}$$

In altre parole,  $\cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ , e  $\sin^2 \vartheta = 1 - \frac{1}{1+m^2}$ , da cui  $\sin \vartheta = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ .

Le equazioni di trasformazione, sostituendo le opportune espressioni per  $\cos \vartheta$  e  $\sin \vartheta$  diventano:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(x - m y)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(y + m x)$$

Io penso che chi conosce la relatività ristretta incominci a questo punto a sentire puzza di trasformazione di Lorentz.

La  $m$  ha un sacco di problemi. Intanto non è additiva, nel senso che  $\operatorname{tg}(\alpha + \vartheta)$  non è eguale a  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \vartheta$ . Infatti, se vogliamo calcolare  $\operatorname{tg}(\alpha + \vartheta)$ , dobbiamo ricorrere alla formula

$$\operatorname{tg}(\alpha + \vartheta) = \frac{\sin(\alpha + \vartheta)}{\cos(\alpha + \vartheta)} = \frac{\sin\alpha \cos\vartheta + \cos\alpha \sin\vartheta}{\cos\alpha \cos\vartheta - \sin\alpha \sin\vartheta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\vartheta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\vartheta} = \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}$$

Si noti che il segno meno al denominatore permette alla tangente somma di raggiungere un valore infinito. Infatti,  $\operatorname{tg}(45^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg}(90^\circ) = \infty$ .

Ma, anche se l'angolo  $\vartheta$  ci è stato utile per applicare le formule di trigonometria (ciò che non era strettamente necessario, ma era decisamente un metodo rapido), vediamo che esso è scomparso dalle forme finali di trasformazione. Questo fatto, applicato almeno in un primo tempo alle formule di trasformazione di Lorentz, è un vantaggio.

Le trasformazioni di R in r' per rotazione sono trasformazioni ortogonali, ed hanno diverse proprietà. La proprietà cruciale che ci interessa a questo punto, e che si può subito verificare, è:

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

che ci dice che se ruotiamo una sbarra nel piano, questa non cambia lunghezza, anche se le coordinate che identificano i suoi estremi cambiano.

Sarebbe impossibile imparare la geometria euclidea se questo non fosse vero: L'insegnante ruoterebbe un triangolo equilatero, ed esso non sarebbe più equilatero, perché i lati cambierebbero lunghezza, in generale in modo diverso. Un bel pasticcio per gli allievi.

## II.2 La relatività ristretta.

Adesso passiamo alla relatività ristretta. Qui il punto è che la velocità della luce è costante.

Non c'è niente di troppo strano in tutto questo. Il fatto è che noi tradizionalmente sbagliamo le unità di misura di tempo. Ora, la coordinata tempo si comporta decisamente in modo diverso dalla coordinata spazio, ma noi abbiamo complicato ulteriormente le cose non misurandola in centimetri o metri. Vedremo che le nostre formule diventeranno più simmetriche usando non la coordinata tempo misurata in secondi, ma la coordinata  $ct$  misurata in secondi luce. Chiaramente, se  $c$  non è altro che un fattore di conversione, deve essere costante, altrimenti saremmo nei guai. Ma, naturalmente, bisogna convincersi di questo, *che in realtà viene presentato come un postulato della relatività ristretta*, che equivale a dire che  *$c$  ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali*.

Naturalmente il nostro spazio ha ora quattro dimensioni, e ci sono sei piani coordinati :

- $(x, y)$ , su cui possiamo continuare a lavorare per le nostre rotazioni spaziali,
- $(x, x)$  e  $(y, z)$  sempre validi per le nostre rotazioni spaziali.

Ma poi abbiamo tre piani  $(x, t)$ ,  $(y, t)$ ,  $(z, t)$ . La costanza della velocità della luce in "rotazioni nello spazio tempo", che non sono altro che spostamenti del sistema  $(x', y')$  rispetto a quello  $(x, y)$  a velocità  $v$ , richiede che:

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2$$

A questo punto arriva Minkowski e ci dice: Niente paura. Se noi introduciamo la coordinata  $T = ict$ , allora recuperiamo la relazione

$$x'^2 + T'^2 = x^2 + T^2$$

dello spazio euclideo. Ma abbiamo barato. La coordinata che abbiamo introdotta è immaginaria, gli “angoli” (che per adesso non abbiamo ancora introdotto) sono immaginari eccetera. Se non ci stiamo attenti tutto ci crolla addosso.

Qui, poi, ci troviamo in una situazione opposta a quella delle rotazioni spaziali: là avevamo gli angoli, e *se volevamo* potevamo far saltar fuori le tangenti trigonometriche, prive di un significato intuitivo. Qui, invece, gli angoli proprio non sappiamo cosa siano, ma abbiamo qualche speranza di utilizzare fin da principio le “tangenti trigonometriche”, o almeno qualcosa di simile, perché si tratta di tangenti trigonometriche di angoli immaginari.

Per le rotazioni nel piano noi avevamo  $y/x = \operatorname{tg} \vartheta = m$ . Ora, a che cosa equivale  $T/x$  o  $x/T$  che in linea di principio è lo stesso, in quanto non è altro che una scelta dell'equazione che mettiamo per prima?

Vediamo che ci conviene la seconda quantità,  $x/T$ , che è eguale a  $x/(ict) = -i(x/ct)$ . In relatività ristretta  $x/(ct)$  viene usualmente chiamato  $\beta$  ed è dato da  $v/c$ , poiché  $v$ , la velocità relativa dei due sistemi di riferimento, è data da  $x/t$ . Come sempre.

Dunque abbiamo un nuovo  $m$ , cioè  $m = -i\beta$

Per pura forza bruta possiamo prendere le formule che avevamo trovato per le rotazioni nel piano:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(x - m y)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(y + m x)$$

E sostituire  $m = -i\beta$ , ovvero  $m^2 = -\beta^2$ . Al posto di  $y$  dobbiamo mettere  $ict$ .

Avremmo allora:

$$(I) \quad x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x - (-i\beta)(ict)) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x - vt)$$

(ricordando che  $\beta c = v$ )

La seconda equazione richiede qualche cura in più:

$$ict' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(ict - i\beta x)$$

Dividiamo ora per  $ic$ :

(II)

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

(ricordando che  $\beta/c = v/c^2$ )

**E come pura formalità abbiamo trovato le formule di trasformazione di Lorentz I e II.**

Vi assicuro che se provate a trovare le stesse formule usando solo l'algebra elementare, faticate di più.

Ma intanto, che cosa è successo al nostro piano Euclideo? E questa  $m = -i\beta$ , è ancora una tangente? Possiamo metterla paro paro nella formula della somma di tangenti, da cui risulterebbe una interessante forma di addizione delle  $\beta$ , cioè delle velocità?

Infatti avremmo

$$-i\beta = \frac{-i(\beta_1 + \beta_2)}{1 + \beta_1\beta_2} \quad \text{vale a dire} \quad \beta = \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{1 + \beta_1\beta_2}$$

Dove la variazione importante è il segno positivo al denominatore.  $\beta$  (somma di velocità, da definire meglio) non può mai essere infinito, anzi, non può mai essere superiore a 1.

E' quello che vedremo in seguito. Per molte applicazioni della relatività ristretta, questa ricerca non è strettamente necessaria, ma se vogliamo sapere, per esempio, qualcosa sul viaggio interstellare, allora l'esplorazione del nostro piano "pseudo-euclideo" diventa interessante. Perché? Perché ancora una volta potremo sostituire un parametro additivo ad uno non additivo.