

PRIMO INCONTRO CON LE EQUAZIONI INTEGRALI DI FREDHOLM

ESPLORAZIONE EURISTICA



Eric Ivar Fredholm, 1866-1927

(Per cultori di matematica ciclisti, con conoscenze a livello quinta Liceo Scientifico)

1. Introduzione

Tutti coloro che fanno le scuole medie incontrano le *equazioni algebriche* di *primo grado*, poi i sistemi di equazioni di primo grado, per cui vengono dati alcuni metodi di soluzione. Il più elegante è il metodo di **Cramer**, che ri-incontreremo, perché, anche se non è il metodo più efficiente, permette tuttavia euristicamente delle estensioni a concetti più avanzati. Questo metodo richiede l'impiego di determinanti: in questo saggio supporrò che metodo di Cramer e determinanti siano noti.

Poi arrivano le equazioni algebriche di *secondo grado*, con una loro formula risolutiva, che è facilmente dimostrabile usando il metodo del "completamento dei quadrati" o altro affine.

La soluzione è data da:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sono numerosi coloro che bene o male la ricordano a memoria, assai più numerosi di quelli che la sanno ricavare. In quanto alle equazioni algebriche di grado superiore, è abbastanza noto che esistono formule risolutive per le equazioni di terzo e quarto grado ma credo che quelli che le ricordano o le sanno ricavare siano realmente pochini, anche tra i matematici. In quanto al fatto che non possono esistere formule basate sui radicali per risolvere equazioni di grado superiore al quarto (*Teorema di Ruffini-Abel*), penso che l'esistenza di questo teorema sia ignota ai più e incompresa dalla maggior parte di quelli che ne conoscono l'esistenza. Sia chiaro che tutte le soluzioni delle equazioni algebriche sono **numeri**, reali o immaginari.

Più avanti nel loro corso di studio, i nostri studenti, se frequenteranno il liceo scientifico, incontreranno le *equazioni differenziali "alle derivate ordinarie"*, prima quelle del primo ordine e poi quelle del secondo ordine. Qui, in generale, **l'incognita da trovare è una funzione y di una variabile x**, e l'equazione è una relazione che lega la variabile indipendente, la funzione incognita e le sue derivate di vari ordini (1).

$$(1) \quad F(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$$

L'equazione prende il nome dalla derivata di massimo ordine che vi compare. Ci sono metodi abbastanza generali per risolvere le equazioni differenziali *lineari* (in cui non compaiono potenze delle derivate) del primo ordine, cioè con derivate di ordine non superiore al primo, e metodi assai meno generali per risolvere certe classi di equazioni del secondo ordine. Infine, le equazioni di ordini superiori che possono essere risolte sono delle vere rarità: ma la natura sembra che si accontenti di sistemi che – almeno in prima approssimazione - richiedono solo equazioni lineari del secondo ordine. Il resto è terra riservata a pochi arditi esploratori. Chi vuol avere un'idea delle esplorazioni già fatte in questo vasto continente, può dare un'occhiata al classico testo di **E.L.Ince**, *Ordinary differential equations*, 1926). Qui vengono nominati, fino al 1926, meno di duecento di questi esploratori.

Alla fine del secondo corso universitario di Analisi Matematica (almeno quando studiavo io) arrivano le *equazioni alle derivate parziali*, del primo e del secondo ordine. Il concetto non è differente dal precedente, **ma la funzione incognita è una funzione di più di una variabile, per esempio x, y, u....** La (1) si trasforma così in:

$$(1b) \quad F\left(x, y, v, \dots, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial v} \dots \frac{\partial^n z}{\partial^m x \partial^l y \partial^k v \dots} \dots\right) = 0$$

(in cui $m+l+k \dots = n$)

Quando si parla di equazioni alle derivate parziali “della fisica matematica”, ci si riferisce in genere ad equazioni al più del secondo ordine, sebbene ci sia qualche sparuto problema, come la vibrazione di piastre (non membrane infinitamente sottili), che richiede la soluzione di un’equazione del quarto ordine. E poi, per la massima parte del genere umano, c’è il deserto, esplorato anch’esso solo da matematici e fisici teorici.

A questo punto i curiosi forse si diranno: esistono equazioni differenziali, e va bene. Ma esistono anche *equazioni integrali*? La risposta è, naturalmente, sì. In queste equazioni, **la funzione incognita compare sotto il segno di integrale**. Anzi, per complicare un poco le cose, esistono anche le equazioni cosiddette “*integrodifferenziali*”, in cui **compaiono le derivate della funzione incognita e in più essa compare sotto il segno di integrale**. Queste equazioni sono utilizzate ad esempio nello studio dei circuiti elettrici (e affini, per esempio in neurologia), nonché in un soggetto di attuale interesse (aprile 2020), cioè l’epidemiologia, soprattutto ove si suddivida la popolazione in classi di età.

Tornando alle equazioni integrali, ne esistono di svariati tipi che portano i diversi nomi di chi le ha introdotte, o studiate o risolte per primo. Esse presentano il vantaggio “estetico” che, mentre le equazioni differenziali ci conducono a risolvere soddisfacentemente un problema purché in aggiunta all’equazione da risolvere specifichiamo le cosiddette condizioni al contorno, queste ultime possono essere incluse direttamente nelle equazioni integrali. Lo svantaggio è che le equazioni integrali sono in media assai più difficili da risolvere delle equazioni differenziali. Peccato! Ma non tutto è perduto: se le soluzioni formali possono essere recondite, le soluzioni numeriche delle equazioni integrali sono spesso più accessibili di quelle delle equazioni differenziali.

Accertato che le equazioni integrali esistono e che presentano certi vantaggi (oltre che svantaggi) per la loro soluzione, resta la curiosità se il loro studio sia realmente utile, e non una pura “eleganza matematica”. In effetti, le equazioni integrali (in particolare quelle del tipo di **Fredholm**) sono generalmente insegnate in Italia nel terzo corso di analisi, che non molti anni fa non era obbligatorio per gli studenti che non intendevano ottenere una laurea in matematica. Non era obbligatorio neppure per gli studenti del corso di fisica.

Un vero matematico, il problema dell’utilità di quello che studia o scopre, non se lo pone affatto. Ma talvolta si tratta solo di aver pazienza. Soggetti che sembrano essere gloriosamente inutili, d’improvviso possono acquistare un’importanza capitale in problemi fisici o ingegneristici nuovi. Un caso caratteristico è dato dal **concetto di autovalore**, che in verità presentava già un certo interesse fin da metà Ottocento, ma era destinato ad assumere un ruolo primario come strumento fondamentale della meccanica quantistica. Possiamo tranquillamente dire che senza equazioni agli autovalori la meccanica quantistica moderna non esisterebbe. Di qui, la teoria degli autovalori dilagò in vari campi della fisica teorica, tanto da permetterci di affermare che “*Il concetto di*

autovalore domina la fisica moderna". Ora, le equazioni integrali sono uno dei mezzi di elezione per il calcolo degli autovalori di un sistema che ne possenga.

Tornando alle equazioni integrali, posso ora enumerare alcuni campi di interesse delle equazioni integrali:

- i) Le equazioni integrali hanno anzitutto un *valore storico*, in quanto sono all'origine della cosiddetta "analisi funzionale", ai primi dell'Ottocento.
- ii) Esse hanno in secondo luogo un *valore teorico*, affiancando le equazioni differenziali. Ad esempio, l'esistenza e unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali (date opportune condizioni al contorno), sono normalmente dimostrate utilizzando un'equazione integrale (Teorema attribuito a **Émile Picard, Ernst Lindelöf, Rudolf Lipschitz and Augustin-Louis Cauchy** – il quale, come il solito, fu essenzialmente il primo a dimostrarne l'assunto). Il teorema è normalmente dimostrato per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, e può essere esteso senza eccessiva difficoltà a un sistema di n equazioni del primo ordine. Ma, come è ben noto a chi è noto, *un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine può essere ridotto a un'unica equazione differenziale di ordine n* (e viceversa).
- iii) Esse forniscono il *mezzo naturale per trattare diversi problemi della fisica*. La formulazione integrale delle equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo è forse l'applicazione più nota, ma non mancano applicazioni ai problemi di trasferimento radiativo, acustica etc.. Ci sono inoltre problemi che non sono trattati agevolmente per mezzo di equazioni differenziali, ma sono accessibili per mezzo delle equazioni integrali, in quanto il comportamento della funzione incognita in un punto P , dipende dai valori della funzione a una distanza finita da P , e non solo a distanza infinitesima.
- (iv) Come vedremo, talune equazioni integrali sono il *modo naturale per trattare gli autovalori di determinati sistemi*, che corrispondono alle frequenze proprie di sistemi oscillanti, carichi critici di sistemi rotanti e altri problemi più complessi, ponendosi almeno idealmente, come si è detto, al centro della fisica teorica moderna.

2. Esempio di problema meccanico che genera un'equazione integrale.

Si consideri un'asta rotante, come ad esempio l'albero dell'elica di una nave. Se l'albero viene posto in rotazione partendo da velocità angolare zero, si noterà che, raggiunta una certa velocità di rotazione critica, in genere assai inferiore alla velocità massima consentita, esso sarà soggetto a pericolose vibrazioni grosso modo normali all'asse di rotazione. Aumentando la velocità di rotazione, però, queste oscillazioni si attenueranno fino a scomparire, almeno fino a che non sia raggiunta una seconda velocità critica, e così via. Oggi (che si viaggia assai meno in nave) il fenomeno è meno percepibile, tanto più che vi sono accorgimenti per ridurlo.

Per vedere come si possa giungere a determinare queste velocità critiche per mezzo del calcolo, possiamo considerare, anzitutto, un problema di statica, cioè il comportamento di una trave (l'albero dell'elica), di lunghezza 1, appoggiata o fissata agli estremi. "Intuitivamente" accetteremo il fatto che esiste una "funzione d'influenza", che indicheremo con $G(x,y)$, la quale dà lo spostamento verticale z all'ascissa x , se un carico unitario verticale, cioè lungo z , è applicato all'ascissa y - comunque la trave sia fissata o appoggiata agli estremi.

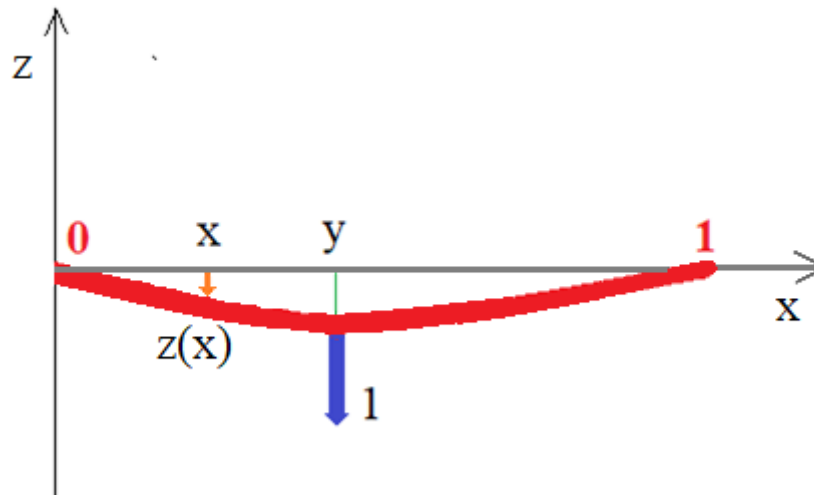


Fig.1

Ciò che interessa è che questa funzione rappresenta la risposta (statica) di una trave elastica ad una distribuzione di forze. Se per esempio avessimo un sistema costituito da una massa pesante e una molla, avremmo che in quel punto, la forza è proporzionale all'allungamento. Come chiaramente annunciò Hooke: *ceiinossttuvo*, anagramma di « Ut tensio, sic vis », ovvero $\mathbf{F} = -k \Delta \mathbf{l}$, dove k è la costante elastica della forza.

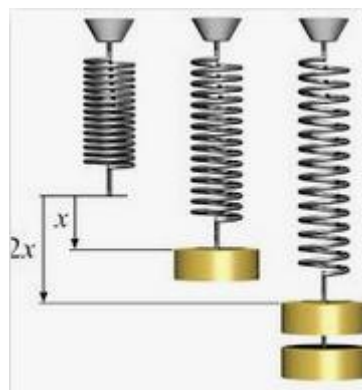


Fig.2

Dove k è la costante elastica della forza. Nel caso in cui la forza sia il peso, potremmo

$$\Delta l = \left(-\frac{1}{k}\right) F$$

In embrione, il termine $(-1/k)$ è il prototipo di una *funzione di influenza*, ridotta ai minimi termini, in quanto trave, carico e “flessione” sono ridotti ad un unico punto, cioè $x=y$. A questo punto possiamo “intuire” che, se invece abbiamo una trave elastica continua, l’effetto di una forza, o carico, che agisce in un unico punto y è sentito in modo diverso nei vari punti x della trave.

Ancora più complicato è il caso in cui non agisce una sola forza in un punto, ma una distribuzione di forze. Ma qui ci soccorre un altro principio semi-intuitivo, quello della “sovrapposizione degli effetti”, che ci dice che se l’asta è sottoposta a un sistema di forze f_i in direzione z , applicate in n punti i dell’asta, lo spostamento z in x è dato dalla somma di tutti gli effetti dovuti tutte le varie forze applicate nei vari punti i della trave. Naturalmente, ciò significa che se il sistema di forze è applicato con continuità sull’asta potremo passare “euristicamente” al limite per $n \rightarrow \infty$, e magari continuo, con un accorgimento che useremo spesso più avanti:

$$(2) \quad z(x) = \sum_{i=1}^n G(x, i) f_i \Delta i \rightarrow \int_0^1 G(x, y) f(y) dy$$

in cui la sommatoria diventa un integrale, la variabile discreta i della sommatoria diventa y , e il termine Δi , che vale 1 nella sommatoria, diventa l’infinitesimo dy nell’integrale. Questo trucco, che un matematico considererebbe abietto, sarà alla base del saggio che segue. Matematico avvisato è mezzo salvato.

Per la cronaca, la funzione $G(x, y)$ andrebbe determinata semiempiricamente e semiteoricamente caso per caso. **Il teorema di reciprocità di Maxwell** (1864, poi generalizzato da Betti) comunque ci aiuta assicurandoci che $G(x, y) = G(y, x)$, cioè lo spostamento lungo z in x dovuto a un carico unitario applicato in y è eguale allo spostamento lungo z in y , dovuto a un carico unitario applicato in x .

Noi abbiamo sfruttato il concetto, abbastanza intuitivo, che una trave a riposo non può essere infinitamente rigida. Essa è dotata di elasticità. Ma un effetto interessante di questo fatto è che se la trave è allontanata dalla posizione di riposo ($z(x) = 0$ identicamente), una forza elastica di richiamo tende a riportarla alla posizione di riposo, ciò che avviene dopo oscillazioni che sono presto smorzate se non corrispondono a certe determinate frequenze critiche, che danno luogo a “oscillazioni libere”, cioè non sollecitate da forze, come, ad esempio, le vibrazioni della corda di una chitarra, che può vibrare una volta pizzicata, senza che altre forze intervengano a sostenere la vibrazione.

Se ora poniamo l'asta in rotazione con velocità angolare ω intorno all'asse x , sappiamo che esiste una forza centrifuga, nulla sull'asse di rotazione, la quale può esercitare un carico trasversale sui baricentri delle sezioni dell'asta, se essi sono per qualche motivo allontanati a una piccola distanza dall'asse, o se lo sono per difetto di costruzione. In tal caso, il carico che agisce sul tronco di asta fra le ascisse x e $x+dx$ ha l'espressione:

$$(3) \quad p(x)dx = \omega^2 z(x) \mu(x) dx$$

Se questo carico dovuto alla forza centrifuga equilibra la forza elastica di richiamo, la trave non può ritornare alla posizione di riposo, ma oscillerà con la sua frequenza propria. Avremo allora delle oscillazioni libere trasversali al moto di rotazione, se la frequenza di rotazione eguaglierà la frequenza di una delle oscillazioni libere proprie dell'asta.

E' quindi "intuitivo" che si creino situazioni di equilibrio instabile quando la rotazione intorno all'asse x provoca sul segmento dx considerato un carico esattamente eguale a quello che in condizioni statiche provoca lo stesso spostamento e mantiene le stesse oscillazioni libere trasversali, cioè quando

$$f(x)dx = \omega^2 z(x) \mu(x) dx$$

Ovvero:

$$(4) \quad f(x) = \omega^2 z(x) \mu(x)$$

Cioè quando "lo spostamento del baricentro, dovuto alla rotazione, genera una forza che in condizioni statiche è in grado di generare il medesimo spostamento". (Credo che di qui venga la parte "auto-" del termine autovalore, almeno in italiano. In tedesco e inglese l'autovalore sarebbe piuttosto un "valore proprio (eigenvalue)".)

In tal caso, l'equazione integrale omogenea:

$$(5) \quad z(x) - \omega^2 \int_0^1 G(x,y) \mu(y) z(y) dy = 0$$

può ammettere soluzioni "proprie", cioè diverse dalla soluzione banale $z(x) = 0$ (nessuna oscillazione). Tali soluzioni, essendo lungo l'asse z , sono oscillazioni trasversali all'asse di rotazione.

Il problema meccanico, di identificare le velocità di rotazione critiche, è risolto trovando il valore di ω^2 tale che l'equazione omogenea (5) abbia soluzioni proprie. Tale equazione è detta **equazione integrale lineare omogenea di Fredholm del secondo tipo**.

Ma è vero che tutto ciò è così intuitivo? Ci sono troppi concetti "intuitivi" in questa introduzione! Per me l'insieme è assai poco intuitivo. Tutte le mie equazioni integrali hanno sempre avuto un fondamentale sassolino nella scarpa: non mi era chiaro perché la

situazione dovesse portare, ad esempio, alla frattura dell'asse dell'elica, ciò che, soprattutto in navi di media dimensione, poteva portare al rapido affondamento della nave. Si parla di “entrare in risonanza”. Ma che vuol dire esattamente? L'idea di risonanza implica che in qualche modo esistano almeno due frequenze identiche. Certo, in qualche modo ci si arriva e qualcosa succede, ma cosa? E come?

Ho studiato a lungo come rendermi intuitivo il concetto, e non ho trovato di meglio dell'esempio seguente. Se lo si comprende, e si comprende come possa seguirne un processo disastroso, poi, secondo me, si può rileggere con maggiore sicurezza il testo che ho già scritto, a partire da quando parlo di mettere in rotazione la trave, qualche riga prima della (3).

Sia dunque il modello elementare di un volano di massa m montato su un asse elastico di massa trascurabile rispetto a quella del volano. Il volano, per qualche motivo, è lievemente eccentrico, con eccentricità e (distanza del baricentro G dal centro O – a riposo). Vogliamo trovare la velocità critica di rotazione dell'asse se la frequenza naturale del volano è $\omega_n = \sqrt{k/m}$, in cui k è la costante di elasticità dell'asse considerato come trave elastica. Per frequenza naturale intendiamo la frequenza del movimento oscillatorio del volano se allontaniamo il punto R dall'asse verticale. Sia R il centro di rotazione, G il baricentro del volano, O il centro geometrico del rotore. Per eccentricità si intende la distanza $e = (OG)$ (vedi figura). Il punto G è per noi nascosto nel volano; per il punto R passa l'asse elastico; O , centro geometrico del volano *a riposo*, è un punto fisso che deriva da quando il sistema fu costruito. In un'oscillazione trasversale il punto R visibilmente si allontana dalla verticale, il punto G si allontana invisibilmente, il punto O resta sulla verticale, ma non è più fisso nel volano.

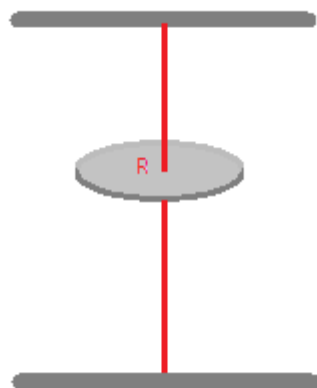


Fig. 3 a

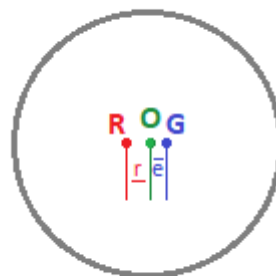


Fig. 3 b

In Fig.3 a la trave rotante è stata schematizzata in due porzioni: un volano di massa m , infinitamente sottile; e l'asse elastico intorno a cui esso ruota, con massa zero. Esso è pure infinitamente sottile.

Fig. 3 b riporta una visione zenitale del volano, con le distanze r ed e molto ingrandite.

Ad ogni istante la forza di richiamo dovuta all'elasticità dell'asse è $F = kr$, dove r è la distanza (RO). Invece, la forza centrifuga dovuta al fatto che la ruota non è equilibrata, è $m(e+r)\omega^2$. Queste due forze devono farsi equilibrio, cioè:

$$(6) \quad kr = m(e+r)\omega^2 \rightarrow \left(\frac{k}{m}\right) = \frac{(e+r)\omega^2}{r}$$

$$\omega_n^2 r - \omega^2 r = e\omega^2 \rightarrow r \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) = e \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

Da cui,

$$(7) \quad r = \omega^2 \frac{\frac{e}{\omega_n^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}$$

Ne segue che r tende a diventare infinito quando ω si avvicina a ω_n . Ciò, nel nostro esempio, significherebbe che il sistema andrebbe in pezzi. Una barra elastica omogenea non si comporterebbe diversamente: qui è stata riassunta in un volano con asse (di massa trascurabile) elastico. L'unico fattore che potrebbe evitare questo disastro è lo smorzamento dovuto a attrito o altro. In tal caso ci sarebbe un addendo in più al denominatore, che non permetterebbe a questo di annullarsi, e la velocità critica potrebbe essere oltrepassata senza danni. Qui è dunque ovvio qual è la velocità di rotazione critica: è la velocità ω eguale alla frequenza "naturale" di oscillazione del volano. In una trave la situazione non è diversa, ma è più complicata, e la frequenza di oscillazione naturale della trave è uguale all'autovalore dell'equazione integrale (5). Rileggendo in questa luce la (5) vediamo che se per un certo valore di ω la $z(x)$ va all'infinito, ciò vuol dire che la trave si è spezzata.

Ma torniamo alle nostre equazioni integrali. Più in generale, l'equazione di Fredholm del secondo tipo include il caso non omogeneo della forma:

$$(8) \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy = f(x)$$

Qui, per adeguarci alle forme comunemente usate, si è posto

$$z(x) \rightarrow \varphi(x); \quad \omega^2 \rightarrow \lambda (> 0); \quad G(x,y)\mu(y) \rightarrow K(x,y)$$

Detto per inciso, possiamo trasformare l'equazione omogenea (5) in modo redditizio moltiplicando ambo i membri per $\sqrt{\mu(x)}$ ed introducendo la funzione

$$\psi(x) = \sqrt{\mu(x)} z(x)$$

la quale, sotto integrale, diviene

$$\psi(y) = \sqrt{\mu(y)} z(y)$$

Avremo così

$$(9) \quad \psi(x) - \omega^2 \int_0^1 G(x, y) \sqrt{\mu(x)} \sqrt{\mu(y)} \psi(y) dy = 0$$

il cui nucleo $K(x, y) = G(x, y) \sqrt{\mu(x)} \sqrt{\mu(y)}$ è evidentemente simmetrico, *il che garantisce in generale infiniti autovalori*, ciò che non è sempre vero di un nucleo asimmetrico, che può anche non avere autovalori. Ma di questo non ci occuperemo, se non assai di striscio.

Per arrivare da un punto di vista matematico al concetto di equazione integrale, io seguirò ora, come annunciato fin dal titolo, un metodo euristico, che dovrebbe permettere di imparare qualcosa, in modo spero indolore, anche su altri concetti.

Per questo primo incontro, mi limiterò alla situazione più semplice, con soli numeri reali.

3. Estensione euristica del concetto di vettore.

Suppongo che sia noto al lettore che esistono almeno tre modi di trattare formalmente il concetto di vettore:

- 1) Vettore come “freccia”, dotata di lunghezza, direzione, verso.
- 2) Vettore dato in termini delle sue componenti cartesiane, che altro non sono che le proiezioni del vettore sugli assi cartesiani. Ricordo che la proiezione del vettore non è altro che il “prodotto interno” del vettore sui versori degli assi cartesiani, che sono due (**i**, **j**) nel piano e tre (**i**, **j**, **k**) nello spazio. Un vettore può quindi essere rappresentato dalla semplice tabella delle sue componenti.
- 3) Vettore come matrice colonna: qui, le componenti possono essere disposte in una matrice colonna, alla quale si applica il calcolo matriciale.
- 4) Vettore come diagramma discreto. Si fissano sull’asse delle ascisse i punti 1,2,3, e in ordinata riportiamo il valore delle componenti 1,2,3 del vettore.

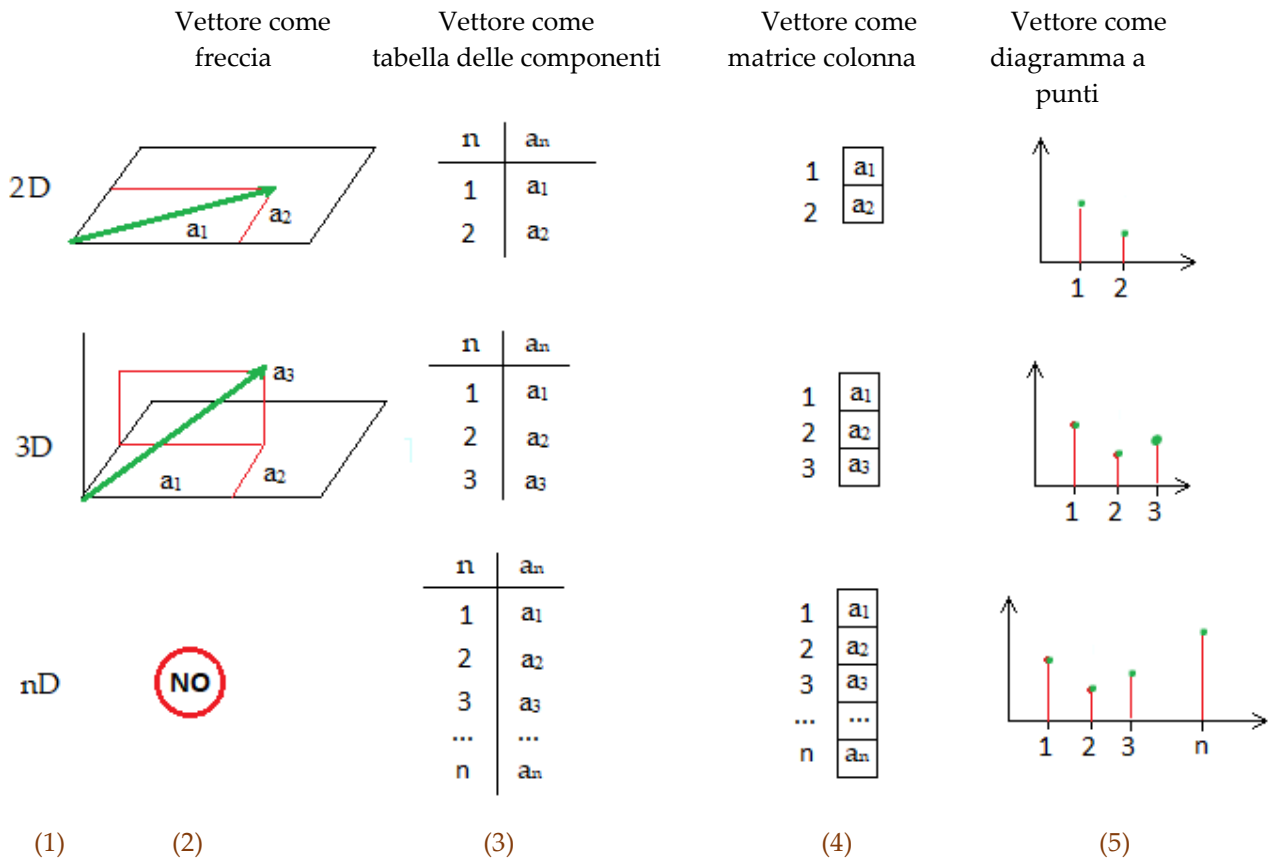


Fig.4

Qui dobbiamo introdurre un trucco, se non vogliamo addentrarci nel temuto campo degli spazi duali: un prodotto interno di due vettori rappresentati in forma matriciale (4) è dato dal prodotto di *un vettore riga* (un vettore “trasposto”), per un vettore colonna, seguendo le stesse regole del calcolo matriciale. Ne risulta un *numero*. Se si resta nel campo reale, il prodotto non dipende dall’ordine dei due vettori moltiplicati: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$. In effetti, nel campo complesso, le componenti del vettore “duale” dovrebbero essere le complesse coniugate del vettore originale.

Poiché, come è noto dal calcolo vettoriale, il prodotto interno o scalare di due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è dato da:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \vartheta$$

dove ϑ è l’angolo compreso fra i due vettori, $|\mathbf{u}|$ e $|\mathbf{v}|$ sono rispettivamente i moduli di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Se il prodotto interno di due “vettori” non nulli è nullo, ciò significa che $\cos \vartheta = 0$, cioè $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Diremo allora che i due vettori sono “ortogonali”.

La rappresentazione del vettore in termini di due versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, nel piano (bidimensionale) euclideo può essere estesa senza sforzo allo spazio tridimensionale euclideo, usando naturalmente tre versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (colonna 2). Ma qui si fermano le possibilità di estensione.

La forma tabulare (colonna 3), invece, è ancora valida, anche se il vettore ha n componenti. Lo stesso vale per la forma matriciale (4). Infine, colonna (5), il vettore può essere rappresentato graficamente mettendo in fila le n componenti. Nelle forme (3), (4), (5) rappresentiamo, in altre parole, una funzione $a(n)$ che ha valori solo per i valori interi di n , *Incidentalmente, non cambia nulla se invece di a_n scriviamo $a(n)$.*

Fissiamoci un momento sulla rappresentazione (5). Come abbiamo visto, il vettore è definito solo per determinati valori nei punti n dell'asse x , mentre in ordinate ogni componente può avere qualsiasi valore. Quando incominciamo a chiederci quale sia il valore dell'ordinata corrispondente a un numero non più intero, per esempio $m = 1.3$ (dove un'ordinata non è definita), ciò vuol dire che incominciamo a sentirci attratti dall'idea di "passare al continuo".



Fig. 5

Procedendo sempre euristicamente, possiamo dire allora che **una funzione è interpretabile come un vettore, con un'infinità continua di componenti**. Le ascisse fisse 1,2,3 saranno sostituite da un continuo di ascisse che chiameremo x , una variabile reale che potrà assumere per la nostra esplorazione euristica tutti i valori reali, *tra i quali* gli interi 1,2,3 da cui siamo partiti.

E devo dire che, nei miei primi passi nella teoria delle funzioni, siccome nessuno mi aveva mostrato i semplici diagrammi di Fig.1 e Fig.2, non riuscivo a immaginarmi che cosa significasse la frase: **una funzione è interpretabile come un vettore che possiede un'infinità continua di componenti**. Invece si tratta di un'intuizione banale, che non riuscivo formarmi perché ero sul binario sbagliato:

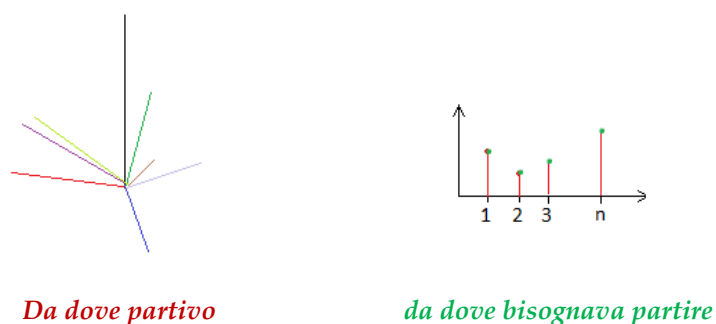
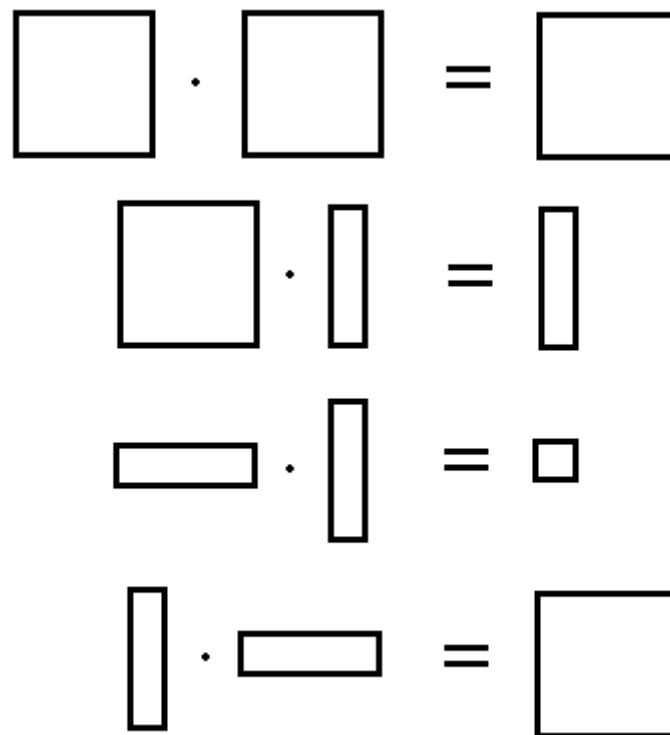


Fig.6

Si noterà che il prodotto interno necessario per calcolare la “norma” o modulo di un vettore moltiplica fra loro le componenti corrispondenti di due vettori che non sono identici. Nel caso di vettori nello spazio si tratterebbe di componenti complesse coniugate, che, nel caso di vettori reali, sono la stessa cosa. Ma in realtà stiamo parlando di oggetti abbastanza diversi. Questo lo si vede introducendo il prodotto di matrici.

Do per scontato che si sappia come si eseguono i *prodotti di matrici* nella forma “righe per colonne”. A noi non occorrà nulla più del prodotto di una matrice quadrata per un vettore colonna, che produce un vettore colonna (secondo diagramma in Fig.4) e del prodotto di un vettore riga per un vettore colonna, che produce un numero (terzo diagramma in Fig.4). Troppo facile? “Just wait”.

Enrico Fermi presentava nelle sue lezioni un riassunto grafico dei prodotti che coinvolgevano matrici quadrate e vettori:



(Il diagramma più importante in questo contesto è il secondo, il meno immediato da ricostruire è l'ultimo, ma non lo utilizzeremo)

Fig.7

In n dimensioni, esistono varie *matrici quadrate*, con n^2 elementi (n righe per n colonne), che si distinguono in due categorie: **Operatori**, cioè matrici che rappresentano essenzialmente trasformazioni di vettori (quali rotazioni, allungamenti etc.) e **Tensori**, che rappresentano grandezze fisiche con n^2 componenti, e quindi non rappresentabili con vettori. In certo senso anche queste possono agire su vettori trasformandoli, per cui la distinzione fra i due generi

può diventare evanescente. Noi, tuttavia ci accontenteremo di parlare di matrici che trasformano vettori. Un operatore che non sia l'Identità, agendo su un vettore lo trasforma in un altro vettore. Tuttavia, dato un operatore K su uno spazio V , *possono esistere* certi vettori non nulli tali che K , operando su di essi, non ne cambi la "direzione" ma solo la "lunghezza", ovvero, *moltiplichi* il vettore per uno scalare.

$$(10) \quad K \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

Un tale vettore è detto "autovettore" (in inglese "eigenvector") e λ è il suo "autovalore" (in inglese "eigenvalue"). Il simbolo λ , come vedremo, è sfortunato. In effetti, il mio Professore, F.G. Tricomi, nel suo corso di analisi, avrebbe scritto l'equazione (10) come

$$(10b) \quad K \mathbf{v} = q \mathbf{v}$$

e avrebbe chiamato q col nome di "*moltiplicatore*", riservando il nome di "*autovalore*" al simbolo $\lambda = 1/q$, che incontreremo. Il nome di moltiplicatore proviene evidentemente dal fatto che l'operatore K agendo sul vettore $\mathbf{v}$ lo moltiplicar per un fattore q (cioè lo allunga o accorcia) senza cambiarne la direzione.

Se vale il prodotto righe per colonne, la lunghezza del vettore è data dalla cosiddetta "norma" (o modulo) del vettore, considerato come matrice con una sola colonna. Si ottiene la norma facendo il prodotto delle componenti di un **vettore riga** opportuno (il vettore "trasposto" del vettore originario) per le corrispondenti componenti del nostro **vettore colonna** originale (terzo diagramma in Fig. 4) *ed estrendo la radice quadrata del risultato*. Perché la norma, *che è un numero* (terzo diagramma in Fig. 4), abbia un valore reale positivo, occorre che le componenti corrispondenti del vettore riga siano le complesse coniugate di quelle del vettore colonna originale. Solo nel caso dei vettori che si incontrano nei primi due anni di Fisica, che hanno invariabilmente **componenti reali**, le componenti dei due vettori (originali e duali) sono eguali. Ma quando si procede nello studio, passando al campo complesso, la distinzione è necessaria. Questi vettori, riga e non colonna, con componenti complesse (come sarebbero le componenti dei vettori colonna con cui noi trattiamo usualmente), costituiscono lo "**spazio duale**", che nel nostro caso esiste sempre.

In questa prima esplorazione, ci accontenteremo di numeri reali.

Vediamo ora l'estensione (euristica) formale dei prodotti, restando nel campo dei numeri reali.

1) Prodotto interno.

$$(11) \quad a \cdot b = \sum_{i=1}^n a(i)b(i)$$

Ma, considerando che per passare da $a(i) b(i)$ a $a(i+1)b(i+1)$ si può pensare di aver fatto un passo di lunghezza $\Delta i = 1$, possiamo senza molto sforzo immaginare di scrivere che

$$(11b) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a(i)b(i) \Delta i \rightarrow \int_a^b a(x)b(x)dx$$

2) Prodotto di matrice per vettore colonna (il cui risultato, come si vede dal diagramma di Fermi, Fig.7) è un vettore colonna di n componenti (in quanto la matrice è quadrata). In questo contesto è immediato passare (intuitivamente) da un sistema di equazioni algebriche di primo grado a un'equazione integrale.

$$(12) \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \sum_{j=1}^n K(i,j)v(j) \Delta j \rightarrow \int_a^b K(x,y)v(y)dy$$

In effetti, un sistema di equazioni (per esempio di tre equazioni e tre incognite) può essere scritto come segue:

$$(13) \quad \begin{cases} K(1,1) v(1) + K(1,2) v(2) + K(1,3) v(3) = u(1) \\ K(2,1) v(1) + K(2,2) v(2) + K(2,3) v(3) = u(2) \\ K(3,1) v(1) + K(3,2) v(2) + K(3,3) v(3) = u(3) \end{cases} \rightarrow \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}$$

E quindi, passando al continuo, possiamo dare un significato all'espressione:

$$(13 b) \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \sum_{j=1}^n K(i,j)v(j) \Delta j \rightarrow \int_a^b \mathbf{K}(x,y)\mathbf{v}(y)dy = \mathbf{u}(x)$$

Per *uniformarci alla tradizione* abbiamo dovuto mutare la notazione: la matrice $K(i,j)$ è diventata una funzione in due variabili, $K(x,y)$, dove x e y ora sostituiscono gli indici i e j , il nome K proviene dal nome "nucleo", Kernel (tedesco o inglese) o kärna (svedese, la lingua di Fredholm, che per primo trattò le equazioni integrali sistematicamente); la sommatoria su j diventa un integrale su y , il vettore $v(j)$ è una funzione $v(y)$, della variabile y ; il vettore $u(i)$ è una funzione $u(x)$, della variabile x .

Ma l'equazione (13 b) può essere interpretata in due modi differenti.

(i) Se il vettore $\mathbf{v}$ è il vettore incognito, e $\mathbf{u}$ è noto, allora abbiamo un **sistema di equazioni** che diventa **un'equazione integrale**, in cui la funzione incognita è la $\mathbf{v}$. Provenendo (per analogia) da un sistema di equazioni lineari, si tratta di un'equazione integrale lineare, il cui nucleo K , funzione di x e y , moltiplica la funzione incognita $v(y)$, la quale si trova sotto il segno di integrale, come si vede nella (13). **Un'equazione integrale non lineare (classe di funzioni che di qui innanzi ignoreremo)** viene scritta ad esempio come:

$$(14) \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b F(x, \xi, \varphi(\xi))d\xi$$

in cui la funzione $F(x, \xi, \varphi(\xi))$ può assumere la forma più arbitraria possibile.

(ii) Se il vettore $\mathbf{v}$ è noto, allora la (13) indica una trasformazione di un vettore $\mathbf{v}$ in un nuovo vettore $\mathbf{u}$. K potrebbe essere la matrice di rotazione, che, applicata a un vettore, ci dà le componenti del vettore ruotato. Passando all'integrale, abbiamo un'equazione formalmente identica alla (13), che però non viene più chiamata "equazione integrale", ma "**trasformata integrale**" di una funzione. Le due operazioni non sono lo stesso oggetto matematico, ma sono parenti stretti. Va detto che il campo delle trasformate integrali, tra le quali le più note sono quelle di **Fourier e di Laplace**, è un vasto campo della matematica, ricco di applicazioni pratiche, per esempio in elettrotecnica, del quale però non ci occuperemo.

Per un'equazione integrale, ha senso chiedersi a quale "classe funzionale" debbano appartenere il nucleo $K(x,y)$ e il "termine noto" $f(x)$ delle equazioni che studieremo. La risposta che utilizzeremo, valida per le equazioni "classiche" di Fredholm, è che $K(x,y)$ sia una funzione "**al quadrato sommabile**", cioè appartenga allo spazio L^2 , o spazio di Hilbert. Per lo spazio di Hilbert si veda eventualmente

<http://dainoequinoziale.it/scienze/matematica/2020/02/03/hilbertspace.html>

COMPLEMENTO A:

Sommario dei criteri perché $K(x,y)$ appartenga allo spazio di Hilbert.

Diremo in breve che la funzione $K(x,y)$ appartiene allo spazio di Hilbert se:

- 1) la funzione $K^2(x,y)$, considerata come funzione della sola x risulta **sommabile** (per noi sinonimo di **integrabile**, cioè tale che l'integrale esista e non sia infinito) per "quasi tutti" i valori di y . "Quasi tutti" significa che si possono accettare valori infiniti in punti che costituiscono un insieme "di misura nulla", come ad esempio un insieme numerabile, cioè tale che i suoi punti possano essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali.
- 2) Lo stesso avviene scambiando le veci di x e y .
- 3) Le due funzioni positive (che per l'ipotesi (1) sono "quasi dappertutto esistenti")

$$(A1) \quad A(x) = \sqrt{\int_a^b K^2(x,y)dy} \quad \text{e} \quad B(y) = \sqrt{\int_a^b K^2(x,y)dx}$$

appartengono alla classe L^2 , cioè la norma sia "indotta dal prodotto interno", definito come:

$$(A2) \quad f \cdot g = \int f^*(x)g(x)dx$$

Anche $f(x)$, termine noto, deve appartenere alla classe L^2 , o spazio di Hilbert.

Ammetteremo infine che valga il **teorema di inversione dell'ordine delle integrazioni**, che può essere così formulato:

Se esiste uno almeno dei due integrali ripetuti

$$(A3) \quad \int_c^d dy \int_a^b dx F(x, y) \quad \text{e} \quad \int_a^b dx \int_c^d dy F(x, y)$$

allora esiste anche l'altro, ed è eguale al primo.

COMPLEMENTO B:

Perché vogliamo che $K(x,y)$ e $f(x)$ appartengano allo spazio di Hilbert, L^2 ?

La categoria dei cosiddetti spazi L^p (chiamati anche spazi di **Lebesgue**, forse a torto) è un'importante classe di spazi di **Banach** (per cui si veda il mio saggio sullo spazio di Hilbert sopracitato). Uno spazio di Banach, in poche parole, ha la caratteristica di essere uno spazio *topologico, vettoriale (o lineare), metrico, normato, completo*.

E, precisa it.wikipedia:

Si definisce **norma p-esima** o **norma L^p** di f il numero

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Lo spazio delle funzioni misurabili con norma L^p finita è detto $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$, o anche $L^p(X)$, $L^p(\mu)$ o solo L^p . Le funzioni in L^p si dicono *a p-esima potenza sommabile*.

Ma perché, tra tutti gli spazi L^p , vogliamo che K e f appartengano allo spazio in cui $p=2$, cioè allo spazio L^2 ? Perché **lo spazio L^2 è, tra gli spazi L^p , l'unico che gode della proprietà di derivare la sua norma dal prodotto interno nella forma (A2) qui sopra, e quindi è l'unico spazio di Hilbert**. Il vantaggio della struttura del prodotto interno nello spazio di Hilbert è che esso permette la più semplice estensione dei concetti dello spazio euclideo agli spazi di funzioni, e quindi l'uso di vettori/funzioni ortogonali, e tutto ciò che ne segue, con applicazioni che vanno dalle serie di Fourier alla meccanica quantistica. Faremo abbondante uso di queste estensioni intuitive nella parte finale (parte 4 e Complemento C) di questo lavoro.

Ho volutamente omesso di dire nelle precedenti condizioni di appartenenza alla classe L^2 che i vari integrali sono oggi generalmente intesi **"nel senso di Lebesgue"**. Ora, Lebesgue introdusse il suo concetto di integrale nel 1902, mentre Fredholm pubblicava la soluzione

delle sue equazioni nel 1903. Dal suo testo pare che Fredholm non cercasse la generalità offerta dall'integrazione secondo Lebesgue (che non è mai menzionato nei suoi articoli fondamentali), e si servisse dell'integrazione comunemente nota ai suoi tempi, nel senso di Riemann, che egli usa senza neppure menzionare l'autore. Poiché noi vogliamo soltanto dare un'idea non rigorosa della soluzione data da Fredholm, e d'altra parte questi non fece ricorso all'integrale di Lebesgue, neanche noi parleremo di integrali nel senso di Lebesgue, che potrebbero solo complicare una presentazione elementare.

4. La ricerca degli autovalori di una matrice. Analogie.

Diventa immediato scrivere un'equazione agli autovalori, che, come ricordiamo, è:

$$(15) \quad K \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

Semplicemente, in luogo di $u(x)$ nell'equazione (6) si riscrive $v(x)$ preceduto dall'autovalore λ . **Ma Fredholm diede il nome di λ all'inverso del λ dell'equazione (15).** In altre parole, la sua equazione di partenza fu

$$(15b) \quad \mathbf{v} = \lambda K \mathbf{v}$$

Si vede così che, per chiarezza, aveva un senso chiamare *moltiplicatore* il valore λ nell'equazione (12), e assegnargli un simbolo diverso, cioè $q = 1/\lambda$. Ci sono testi, anche autorevoli, che si infischiano allegramente di questa ambiguità.

Ora, io non so se Fredholm abbia seguito, anche solo come primo abbozzo, il ragionamento che consiste nel partire da un sistema di equazioni algebriche, per giungere alla soluzione dell'Everest delle equazioni integrali lineari, cioè alla sua equazione generale (**Equazione di Fredholm di seconda specie**), con nucleo qualsiasi, soggetto a molto liberali condizioni (descritte nel Complemento A):

$$(8b) \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

Ove $\varphi(x)$ è la funzione cercata e $f(x)$ è una funzione nota. In forma vettore-operatore, essa corrisponderebbe più precisamente al vettore $\mathbf{v}$ nell'equazione:

$$(15c) \quad \mathbf{v} = \mathbf{u} + \lambda K \mathbf{v}$$

Ovvero

$$(15d) \quad (1 - \lambda K) \mathbf{v} = \mathbf{u}$$

In termini di vettori e matrici, l'equazione (7b), per vettori a tre componenti, diventa la

$$(13c) \quad \begin{cases} (1 - \lambda K(1,1))\varphi(1) - \lambda K(1,2)\varphi(2) - \lambda K(1,3)\varphi(3) = f(1) \\ -\lambda K(2,1)\varphi(1) + (1 - \lambda K(2,2))\varphi(2) - \lambda K(2,3)\varphi(3) = f(2) \\ -\lambda K(3,1)\varphi(1) - \lambda K(3,2)\varphi(2) + (1 - \lambda K(3,3))\varphi(3) = f(3) \end{cases}$$

Qui il vettore v ha componenti $(\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3))$, e il vettore u ha componenti $(f(1), f(2), f(3))$.

Questa (innocua) scelta di nomi, come vedremo, corrisponde all'approccio di Fredholm, che probabilmente pensò (tacitamente) di passare dalla (8b) alla (13c) e poi di estendere il sistema che compare nella (13c) ad un sistema di infinite componenti discrete, e infine di passare al continuo.

Secondo la regola di Cramer, la soluzione di (13c) è data da:

$$(16) \quad \varphi(1) = \frac{\begin{matrix} f(1) & -\lambda K_{12} & -\lambda K_{13} \\ f(2) & 1-\lambda K_{22} & -\lambda K_{23} \\ f(3) & -\lambda K_{32} & 1-\lambda K_{33} \end{matrix}}{\begin{matrix} 1-\lambda K_{11} & -\lambda K_{12} & -\lambda K_{13} \\ -\lambda K_{21} & 1-\lambda K_{22} & -\lambda K_{23} \\ -\lambda K_{31} & -\lambda K_{32} & 1-\lambda K_{33} \end{matrix}}; \quad \varphi(2) = \frac{\begin{matrix} 1-\lambda K_{11} & f(1) & -\lambda K_{13} \\ -\lambda K_{21} & f(2) & -\lambda K_{23} \\ -\lambda K_{31} & f(3) & 1-\lambda K_{33} \end{matrix}}{\begin{matrix} 1-\lambda K_{11} & -\lambda K_{12} & -\lambda K_{13} \\ -\lambda K_{21} & 1-\lambda K_{22} & -\lambda K_{23} \\ -\lambda K_{31} & -\lambda K_{32} & 1-\lambda K_{33} \end{matrix}}; \quad \varphi(3) = \frac{\begin{matrix} 1-\lambda K_{11} & -\lambda K_{12} & f(1) \\ -\lambda K_{21} & 1-\lambda K_{22} & f(2) \\ -\lambda K_{31} & -\lambda K_{32} & f(3) \end{matrix}}{\begin{matrix} 1-\lambda K_{11} & -\lambda K_{12} & -\lambda K_{13} \\ -\lambda K_{21} & 1-\lambda K_{22} & -\lambda K_{23} \\ -\lambda K_{31} & -\lambda K_{32} & 1-\lambda K_{33} \end{matrix}}$$

che si può riassumere come:

$$(17) \quad \varphi(i) = \frac{\sum_j f(j) D(i,j; \lambda)}{D(\lambda)} \rightarrow \varphi(x) = \int_a^b \frac{D(x, \xi; \lambda)}{D(\lambda)} f(\xi) d\xi$$

in cui $D(\lambda)$ è il determinante dei coefficienti e $D(i,j)$ è il "cofattore" di $f(j)$.

Si noti che in uno sviluppo in serie di λ , i soli termini in cui il parametro λ non appare in $D(i,j)$ sono rispettivamente: (i) per $\varphi(1), f(1)$; (ii) per $\varphi(2), f(2)$; e (iii) per $\varphi(3), f(3)$ - in una parola, per $\varphi(i), f(i)$. Si tratta dei soli elementi che sono moltiplicati per i due addendi 1, in rosso nella (15) e possono essere estratti dall'integrale, in quanto non si integra su x . E al denominatore come primo termine avremo il termine 1, come si vedrà più avanti.

È facile scrivere per analogia la (17), ma il problema è trovare l'espressione del rapporto $\frac{D(x, \xi; \lambda)}{D(\lambda)}$. La soluzione trovata *rigorosamente* da Fredholm (sudando matematico sangue) fu effettivamente

$$(18) \quad \varphi(x) = f(x) + \int_a^b \frac{D(x, \xi; \lambda)}{D(\lambda)} f(\xi) d\xi$$

in cui il rapporto $\frac{D(x, \xi; \lambda)}{D(\lambda)}$ è detto "nucleo risolvante", e le due funzioni $D(x, \xi; \lambda)$ e $D(\lambda)$ sono due estensioni del concetto di determinante ad una matrice *infinita e continua* (!), che vedremo più avanti. Si noti che $D(\lambda)$ può essere portato fuori dall'integrale, in quanto non dipende dalle variabili x e ξ . Io ho preferito lasciarlo nell'integrale per sottolineare la somiglianza formale colla soluzione di Cramer (16) dei sistemi di equazioni algebriche lineari. Avrei preferito anche lasciare $f(x)$ nell'integrale, per la ragione detta sopra, ma ho preferito seguire la tradizione. **Critica per la soluzione è la condizione che $D(\lambda)$ non sia nullo.** I valori di λ per cui ciò avviene sono, come ci si può aspettare, gli autovalori del problema, in certo senso la parte più interessante dell'equazione. Una prima indicazione di questo fatto la si scopre nella (13 c). La soluzione del sistema ottenuto eguagliando il primo membro a zero (il che ci dà gli autovalori del sistema) ci porterebbe a concludere di

primo acchito che il vettore $f(i)$ deve essere nullo. Ma sarebbe troppo facile. Vedremo che non è così.

Tuttavia, mentre io ho preferito seguire **il cammino dalle matrici finite alle equazioni integrali**, Fredholm pubblicò il cammino inverso, **dalle equazioni integrali alle matrici**, spezzettando le funzioni $\varphi(x)$ ed $f(x)$ nell'intervallo (a,b) in un numero n (finito) di segmenti eguali (x_i, x_{i+1}) , e il nucleo $K(x,y)$ in una matrice $n \times n$. Egli trasformò quindi l'equazione integrale in un sistema di equazioni algebriche, da risolversi con un sistema non molto diverso concettualmente dalla regola di Cramer, per poi passare al limite del continuo. Ma occorre dire che il mio insegnante di Istituzioni di Analisi Superiore, il Prof. F.G. Tricomi, che non si spaventava certo davanti ai calcoli, e scrisse un testo specialistico proprio sulle Equazioni Integrali, tuttavia nel suo corso "Istituzioni di Analisi Superiore" (Gheroni, 1962), arrivò a scrivere: *"Fredholm ha dato degli espliciti formalmente molto eleganti sviluppi in serie di una possibile coppia di queste funzioni $D(x, \xi; \lambda)$ e $D(\lambda)$, che però, in pratica, si sono rivelati di scarsa utilità a causa della loro troppo grande complicazione sostanziale"*. Dopodiché, nel testo di "Istituzioni", F.G. Tricomi procede col trattare casi particolari e semplificati del nucleo $K(x,y)$, quali i casi studiati da **Volterra, da Pincherle e Goursat** etc., che esulano da questa nostra prima esplorazione.

Va detto che le equazioni integrali di Fredholm di seconda specie tendono a non essere più facili da risolvere "in forma chiusa" delle equazioni differenziali, ma permettono una soluzione numerica approssimata, proprio spezzettando la funzione in segmenti e trasformando l'equazione integrale in un sistema di equazioni algebriche. Talvolta occorre accontentarsi del risultato numerico approssimato, talaltra passando al limite si ottiene una funzione continua nota (ma ciò avviene di rado e solitamente solo sui libri di esercizi). Ci sono anche casi, ad esempio le equazioni dette di **Volterra**, in cui il limite superiore dell'integrale è x , ovvero il nucleo è nullo per $y > x$, che sono relativamente semplici da risolvere.

Il compito che mi propongo ora, è quello di proporre un procedimento intuitivo per arrivare ai "formalmente molto eleganti sviluppi in serie" citati dal Tricomi, e quindi a un'idea della (quasi inutilizzabile) soluzione generale di Fredholm per la più generale equazione. E così, finalmente potrò togliermi dalla scarpa il sassolino costituito dalla frase del Tricomi in corsivo, citata più sopra, che forse, tra tutti gli allievi del corso di allora, diede fastidio solo a me.

5. I determinanti di Fredholm.

Capire come ci arrivò Fredholm, non è banale, e qui io sto certamente facendo della fantamatematica. Ma non saprei che altro fare.

Anzitutto, penso per motivi estetici e di tradizione, Fredholm voleva assai probabilmente riprodurre fin da principio la **regola di Cramer**, che produce la soluzione in forma di rapporto di due determinanti. Penso che questa sia una parte non pubblicata della sua ricerca.

Il suo problema era quindi quello di sviluppare **due determinanti infiniti**.

Sfortunatamente, un determinante di una matrice infinita e continua, che io sappia, non può essere calcolato con i metodi comunemente utilizzati per calcolare determinanti finiti, anzi, il suo calcolo non può neppure incominciare dai metodi solitamente usati.

Incominciamo con il determinante più semplice dei due, $D(\lambda)$.

La prima idea era quella di svilupparlo in serie delle potenze di un parametro, che si offriva spontaneamente, ed era (il suo) λ . Si vede subito, che se λ non fosse stato portato a fattore della matrice, tenere conto dei vari termini sarebbe stato più complicato. Non era naturalmente garantito che questo parametro sarebbe stato piccolo, né che la serie sarebbe stata una serie convergente.

I passi che si offrivano a Fredholm erano quindi probabilmente:

- 1) sviluppare come esperimento un determinante FINITO in termini delle potenze del parametro λ . Trovò che il determinante finito poteva essere scritto come un polinomio in potenze di λ , i cui coefficienti erano a loro volta dei determinanti estratti dal determinante completo dei coefficienti.
- 2) Si trattava ora di vedere se i singoli determinanti finiti che apparivano come coefficienti delle varie potenze di λ presentassero regolarità formali che permettessero di estenderli ad un determinante infinito;
- 3) Passare al limite del continuo. Qui Fredholm non aveva molta scelta, se voleva una semplice soluzione. In un modo o nell'altro, *doveva ottenere delle semplici sommatorie, magari a più indici*, che avrebbero potuto facilmente trasformarsi in integrali a più variabili di integrazione, come abbiamo euristicamente mostrato più sopra. È infatti semplice estendere le sommatorie ad integrali, se ci si può servire dell'analogia:

$$(19) \quad \sum_{i,j,k,\dots=0}^n F(i,j,k,\dots) \Delta i \Delta j \Delta k \dots \rightarrow \iiint_{0 \text{ o } 1}^n F(x,y,z,\dots) dz dy dz \dots$$

Tuttavia, $D(x, \xi; \lambda)$ è più complicato da scriversi nella forma del membro di sinistra, in quanto bisogna introdurre la funzione $f(x)$ nella colonna giusta del determinante.

I. $D(\lambda)$: Determinante finito.

Come primo esempio, scegliamo un determinante 3×3 , con l'autovalore (di Fredholm) che moltiplica la matrice. La matrice sarà denominata K , e gli elementi di matrice K_{11} , K_{12} , K_{13} etc. Qui, come è ovvio, K_{11} sta per $K(1,1)$ o anche K_{11} e via dicendo.

Vogliamo sviluppare il determinante: (20)

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda K_{11} & -\lambda K_{12} & -\lambda K_{13} \\ -\lambda K_{21} & 1 - \lambda K_{22} & -\lambda K_{23} \\ -\lambda K_{31} & -\lambda K_{32} & 1 - \lambda K_{33} \end{vmatrix}$$

Sviluppando il determinante come si preferisce e ordinando secondo le potenze di λ si ottiene:

$$(21) \quad 1 - \lambda (K_{11} + K_{22} + K_{33}) + \lambda^2 (-K_{12} K_{21} + K_{11} K_{22} - K_{13} K_{31} - K_{23} K_{32} + K_{11} K_{33} + K_{22} K_{33}) - \lambda^3 (-K_{13} K_{22} K_{31} + K_{12} K_{23} K_{31} + K_{13} K_{21} K_{32} - K_{11} K_{23} K_{32} - K_{12} K_{21} K_{33} + K_{11} K_{22} K_{33})$$

Il primo termine, 1, coefficiente di λ^0 , è quello che è, e proviene dal prodotto dei termini 1 della diagonale. Si può facilmente comprendere che, se anche la matrice diventasse infinita, il termine non cambierebbe.

Il secondo termine, il coefficiente di λ^1 , proviene dalla somma dei secondi termini degli elementi diagonali, tutti negativi, ciascuno moltiplicato per tutti i primi termini (tutti eguali a 1); altri termini non possono entrare nel prodotto, in quanto introdurrebbero un fattore λ , e quindi andrebbero di diritto a far parte di un termine di ordine superiore a λ^1 .

Questo secondo termine, che potrebbe essere scritto come $-\lambda \sum_1^3 K(i,i) \Delta i$, può facilmente passare al continuo, diventando $-\lambda \int_0^1 K(x,x) dx$.

Più interessante è il terzo termine in λ^2 , che, grazie al prodotto di due fattori $-\lambda$, è positivo. Il termine era destinato a contenere tutti i determinanti 2×2 . Fredholm potrebbe aver pensato: "Noi già abbiamo calcolato direttamente il valore del coefficiente di λ^2 . Calcoliamo un sommatorio di tutti i determinanti 2×2 possibili nel nostro determinante 3×3 e vediamo se ci sono delle regolarità interessanti."

Il sommatorio è dato da sei termini, che sembra si possano ridurre a coppie, una positiva e una negativa, come termini di tre determinanti.

$$(22) \quad (-K_{12} K_{21} + K_{11} K_{22} - K_{13} K_{31} + K_{11} K_{33} - K_{23} K_{32} + K_{22} K_{33})$$

Notiamo che se si tratta dei risultati di tre determinanti, essi hanno i termini K_{11} , K_{22} , K_{33} nella diagonale principale. Mettendo insieme le coppie di termini che hanno gli stessi due indici (1 e 2; 1 e 3; 2 e 3), vediamo che essi possono risultare dalla sommatoria:

$$\sum_{i,j=1}^3 \begin{vmatrix} K(i,i) & K(i,j) \\ K(j,i) & K(j,j) \end{vmatrix}$$

La sommatoria produce i seguenti NOVE determinanti:

$$\begin{aligned} (1) & \begin{vmatrix} K_{11} & K_{11} \\ K_{11} & K_{11} \end{vmatrix}; (2) \begin{vmatrix} K_{22} & K_{22} \\ K_{22} & K_{22} \end{vmatrix}; (3) \begin{vmatrix} K_{33} & K_{33} \\ K_{33} & K_{33} \end{vmatrix}; \\ (4) & \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix}; (5) \begin{vmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33} \end{vmatrix}; (6) \begin{vmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{vmatrix}; \\ (7) & \begin{vmatrix} K_{22} & K_{21} \\ K_{12} & K_{11} \end{vmatrix}; (8) \begin{vmatrix} K_{33} & K_{31} \\ K_{13} & K_{11} \end{vmatrix}; (9) \begin{vmatrix} K_{33} & K_{32} \\ K_{23} & K_{22} \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

Ma guardiamo meglio: i determinanti (1),(2),(3) sono tutti nulli, perché hanno tutti gli elementi eguali; mentre le coppie di determinanti (4) e (7), (5) e (8), (6) e (9) sono eguali a due a due, avendo righe e colonne scambiate. In altre parole, il risultato della sommatoria è

$$\sum_{i,j=1}^3 \begin{vmatrix} K(i,i) & K(i,j) \\ K(j,i) & K(j,j) \end{vmatrix} = 2 (+K_{11} K_{22} - K_{12} K_{21} + K_{11} K_{33} - K_{13} K_{31} + K_{22} K_{33} - K_{23} K_{32})$$

Il secondo termine, che noi avevamo calcolato direttamente, è quindi la metà della sommatoria dei determinanti. Possiamo euristicamente passare dal determinante 3x3 al determinante n x n, e poi al determinante per $n \rightarrow \infty$, e quindi al continuo, introducendo i soliti segmenti $\Delta i = \Delta j = 1$. Identificando 1 con x e 2 con y otteniamo i nostri primi tre termini:

$$(23) \quad D(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^1 K(x, x) dx + \frac{1}{2} \lambda^2 \iint_0^1 \begin{vmatrix} K(x, x) & K(x, y) \\ K(y, x) & K(y, y) \end{vmatrix} dx dy - \dots$$

Vorrei ora calcolare almeno il quarto termine, che moltiplica $(-\lambda)^3$, negativo, il cui valore è già stato direttamente calcolato ed è:

$$(24) \quad D = (+K_{11} K_{22} K_{33} + K_{12} K_{23} K_{31} + K_{13} K_{21} K_{32} - K_{11} K_{23} K_{32} - K_{12} K_{21} K_{33} - K_{13} K_{22} K_{31})$$

Una tripla sommatoria da 1 a 3 ci darebbe 27 determinanti 3 x 3, e ciascuno di essi sei termini.

Ecco, nella forma prediletta da MATHEMATICA, i primi nove di queste ventisette determinanti.

$$\begin{aligned} (1) & \begin{vmatrix} K[1,1] & K[1,1] & K[1,1] \\ K[1,1] & K[1,1] & K[1,1] \\ K[1,1] & K[1,1] & K[1,1] \end{vmatrix}; (2) \begin{vmatrix} K[1,1] & K[1,1] & K[1,2] \\ K[1,1] & K[1,1] & K[1,2] \\ K[2,1] & K[2,1] & K[2,2] \end{vmatrix}; (3) \begin{vmatrix} K[1,1] & K[1,1] & K[1,3] \\ K[1,1] & K[1,1] & K[1,3] \\ K[3,1] & K[3,1] & K[3,3] \end{vmatrix} \\ (4) & \begin{vmatrix} K[1,1] & K[1,2] & K[1,1] \\ K[2,1] & K[2,2] & K[2,1] \\ K[1,1] & K[1,2] & K[1,1] \end{vmatrix}; (5) \begin{vmatrix} K[1,1] & K[1,2] & K[1,2] \\ K[2,1] & K[2,2] & K[2,2] \\ K[2,1] & K[2,2] & K[2,2] \end{vmatrix}; (6) \begin{vmatrix} K[1,1] & K[1,2] & K[1,3] \\ K[2,1] & K[2,2] & K[2,3] \\ K[3,1] & K[3,2] & K[3,3] \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$(7) \begin{vmatrix} K[1,1] & K[1,3] & K[1,1] \\ K[3,1] & K[3,3] & K[3,1] \\ K[1,1] & K[1,3] & K[1,1] \end{vmatrix}; (8) \begin{vmatrix} K[1,1] & K[1,3] & K[1,2] \\ K[3,1] & K[3,3] & K[3,2] \\ K[2,1] & K[2,3] & K[2,2] \end{vmatrix}; (9) \begin{vmatrix} K[1,1] & K[1,3] & K[1,3] \\ K[3,1] & K[3,3] & K[3,3] \\ K[3,1] & K[3,3] & K[3,3] \end{vmatrix}$$

Vediamo subito che solo qualcuno di questi determinanti si salva:

- (1) Ha tutte le righe e le colonne eguali, e quindi è nullo;
- (2), (3) hanno la prima e la seconda colonna eguali, e quindi sono nulli;
- (4) (7) hanno la prima e la terza colonna eguali, e quindi sono nulli;
- (5) ha la seconda e la terza colonna eguali e quindi è nullo;
- (9) ha due righe e due colonne eguali e quindi è nullo;

(6) e (8) non sono a priori nulli, ma si riducono allo stesso determinante scambiando la seconda e la terza riga;

$$D' = K_{11} K_{22} K_{33} + K_{12} K_{23} K_{31} + K_{13} K_{21} K_{32} - K_{11} K_{23} K_{32} - K_{12} K_{21} K_{33} - K_{13} K_{22} K_{31}$$

Da paragonarsi con:

$$D = K_{11} K_{22} K_{33} + K_{12} K_{23} K_{31} + K_{13} K_{21} K_{32} - K_{11} K_{23} K_{32} - K_{12} K_{21} K_{33} - K_{13} K_{22} K_{31},$$

che è il determinante che abbiamo ricavato direttamente.

Quindi il risultato della sommatoria di questi primi nove determinanti è 2D.

E' ora il turno dei secondi nove determinanti:

$$(10) \begin{vmatrix} K[2,2] & K[2,1] & K[2,1] \\ K[1,2] & K[1,1] & K[1,1] \\ K[1,2] & K[1,1] & K[1,1] \end{vmatrix}; (11) \begin{vmatrix} K[2,2] & K[2,1] & K[2,2] \\ K[1,2] & K[1,1] & K[1,2] \\ K[2,1] & K[2,2] & K[2,2] \end{vmatrix}; (12) \begin{vmatrix} K[2,2] & K[2,1] & K[2,3] \\ K[1,2] & K[1,1] & K[1,3] \\ K[3,2] & K[3,1] & K[3,3] \end{vmatrix}$$

$$(13) \begin{vmatrix} K[2,2] & K[2,2] & K[2,1] \\ K[2,2] & K[2,2] & K[2,1] \\ K[1,2] & K[1,2] & K[1,1] \end{vmatrix}; (14) \begin{vmatrix} K[2,2] & K[2,2] & K[2,2] \\ K[2,2] & K[2,2] & K[2,2] \\ K[2,2] & K[2,2] & K[2,2] \end{vmatrix}; (15) \begin{vmatrix} K[2,2] & K[2,2] & K[2,3] \\ K[2,2] & K[2,2] & K[2,3] \\ K[3,2] & K[3,2] & K[3,3] \end{vmatrix}$$

$$(16) \begin{vmatrix} K[2,2] & K[2,3] & K[2,1] \\ K[3,2] & K[3,3] & K[3,1] \\ K[1,2] & K[1,3] & K[1,1] \end{vmatrix}; (17) \begin{vmatrix} K[2,2] & K[2,3] & K[2,2] \\ K[3,2] & K[3,3] & K[3,2] \\ K[2,2] & K[2,3] & K[2,2] \end{vmatrix}; (18) \begin{vmatrix} K[2,2] & K[2,3] & K[2,3] \\ K[3,2] & K[3,3] & K[3,3] \\ K[3,2] & K[3,3] & K[3,3] \end{vmatrix}$$

In questo gruppo di nove, abbiamo che

I seguenti determinanti sono nulli:

- Tutti gli elementi eguali in (14)
- Due colonne righe e due colonne eguali in (10), (13), (15), (17), (18)
- Due colonne eguali in (11)

Invece, due determinanti sono eguali in (12) e (16), con valore

$$-K_{13} K_{22} K_{31} + K_{12} K_{23} K_{31} + K_{13} K_{21} K_{32} - K_{11} K_{23} K_{32} - K_{12} K_{21} K_{33} + K_{11} K_{22} K_{33}$$

E di nuovo il risultato della sommatoria di questi nove determinanti è 2D.

E infine il terzo gruppo di nove determinanti

$$(19) \begin{vmatrix} K[3,3] & K[3,1] & K[3,1] \\ K[1,3] & K[1,1] & K[1,1] \\ K[1,3] & K[1,1] & k[1,1] \end{vmatrix}; (20) \begin{vmatrix} K[3,3] & K[3,1] & K[3,2] \\ K[1,3] & K[1,1] & K[1,2] \\ K[2,3] & k[2,1] & k[2,2] \end{vmatrix}; (21) \begin{vmatrix} K[3,3] & K[3,1] & K[3,3] \\ K[1,3] & K[1,1] & K[1,3] \\ k[3,3] & k[3,1] & k[3,3] \end{vmatrix}$$

$$(22) \begin{vmatrix} K[3,3] & k[3,2] & k[3,1] \\ k[2,3] & k[2,2] & k[2,1] \\ k[1,3] & k[1,2] & k[1,1] \end{vmatrix}; (23) \begin{vmatrix} k[3,3] & k[3,2] & k[3,2] \\ k[2,3] & k[2,2] & k[2,2] \\ k[2,3] & k[2,2] & k[2,2] \end{vmatrix}; (24) \begin{vmatrix} k[3,3] & k[3,2] & k[3,3] \\ k[2,3] & k[2,2] & k[2,3] \\ k[3,3] & k[3,2] & k[3,3] \end{vmatrix}$$

$$(25) \begin{vmatrix} k[3,3] & k[3,3] & k[3,1] \\ k[3,3] & k[3,3] & k[3,1] \\ k[1,3] & k[1,3] & k[1,1] \end{vmatrix}; (26) \begin{vmatrix} k[3,3] & k[3,3] & k[3,2] \\ k[3,3] & k[3,3] & k[3,2] \\ k[2,3] & k[2,3] & k[2,2] \end{vmatrix}; (27) \begin{vmatrix} k[3,3] & k[3,3] & k[3,3] \\ k[3,3] & k[3,3] & k[3,3] \\ k[3,3] & k[3,3] & k[3,3] \end{vmatrix}$$

In questo gruppo di nove, abbiamo che

I seguenti determinanti sono nulli:

Tutti gli elementi eguali in (27)

Due colonne righe e due colonne eguali in (19), (21), (23), (24), (25), (26)

Invece due determinanti sono eguali: rispettivamente il (20) e il (22)

$$D = K_{33} K_{11} K_{22} + K_{31} K_{12} K_{23} + K_{32} K_{13} K_{21} - K_{33} K_{12} K_{21} - K_{31} K_{13} K_{22} - K_{32} K_{11} K_{23}$$

E ancora una volta il risultato della sommatoria di questi nove determinanti è 2D.

Facendo la sommatoria abbiamo dunque **sei volte** il valore desiderato del determinante D, per cui, interpretando come 3! il valore 6, possiamo dire che il quarto elemento dello sviluppo del determinante è la sommatoria su tre indici (destinata a diventare un integrale triplo) divisa per 3!. Inoltre, il segno del termine è dato dal prodotto dei fattori $(-\lambda)$ che vi compaiono, cioè da $(-\lambda)^3$

A questo punto, identificando 1 con x, 2 con y e 3 con z, possiamo finalmente scrivere (25):

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^1 k(x, x) dx + \frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} k(x, x) & k(x, y) \\ k(y, x) & k(y, y) \end{vmatrix} dx dy - \frac{\lambda^3}{3!} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} k(x, x) & k(x, y) & k(x, z) \\ k(y, x) & k(y, y) & k(y, z) \\ k(z, x) & k(z, y) & k(z, z) \end{vmatrix} dx dy dz \dots$$

E immaginare il resto.

Con questo abbiamo il denominatore $D(\lambda)$ della (17). Qui, molti testi abbandonano chi si arrampica per comprendere la soluzione di Fredholm, e in particolare la formazione del determinante $D(x, \xi; \lambda)$, e molti gli comunicano che la creazione è ovvia. A me non pare. Ho cercato il metodo più semplice possibile per arrivarci, e sono arrivato ad una soluzione, che può forse indicare come la matematica non sia fatta solo di numeri e formule algebriche, ma permetta di inventarsi dei formalismi nuovi, purché servano allo

scopo (Il modello è preso dal bel testo *Mathematical Methods of Physics*, di J. Mathews e R.L. Walker; Addison-Wesley, 1969).

II. La serie di Liouville-Neumann

Per prima cosa, però, mostriamo un modo alternativo di giungere alla soluzione della nostra equazione integrale (di Fredholm di seconda specie), cambiando il nome della variabile “muta” da ξ in y , il che è irrilevante, perché in integrazione scompare:

$$(26) \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy$$

L’idea più diretta per risolvere l’equazione è di procedere per iterazioni: si incomincia col supporre l’incognita $\varphi(x) = f(x)$, e la si sostituisce *nell’integrale* in luogo di $\varphi(x)$, cioè porremo, come zeresima iterazione,

$$(27 a) \quad \varphi_0(x) = f(x)$$

La prima iterazione sarà quindi:

$$(27 b) \quad \varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) \varphi_0(x) dy = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) f(y) dy$$

La seconda iterazione sarà

$$(27 c) \quad \varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) \varphi_1(y) dy \text{ (e, sostituendo)}$$

$$(27 d) \quad \begin{aligned} \varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) [f(y) dy + \lambda \int_a^b k(y, y') f(y') dy'] dy = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) f(y) dy + \lambda^2 \int_a^b dy \int_a^b dy' k(x, y) k(y, y') f(y') dy' \dots \end{aligned}$$

La continuazione è semplice: basti notare che ogni nuova interazione da n a $n+1$ introdurrà:

- Un nuovo fattore λ , per cui si passerà da λ^n a λ^{n+1}
- Il fattore λ^{n+1} moltiplicherà un nuovo integrale contenente un numero $n+1$ di nuclei
- Di questi nuclei, i primi n resteranno invariati; quello aggiunto avrà per prima variabile l’ultima della serie esistente, e introdurrà una nuova variabile di integrazione.
- Se si preferisce, l’ultimo nucleo avrà per seconda variabile quella che era la seconda variabile nell’equazione originale (qui sarà y). Ciò non ha grande importanza, perché, dato che in seguito si integrerà anche su questa variabile, il nome non fa differenza.

Si noterà che l'unica variabile su cui non si integrerà sarà la x di partenza, come deve essere.

Il Nucleo $K_m(x,y)$ risulta essere $\dots \int_a^b k(x, \xi_1) k(\xi_1, \xi_2) \dots k(\xi_{m-1}, y) f(y) d\xi_1 d\xi_2 \dots dy$

E sinteticamente, si potrà scrivere:

$$(28) \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, \xi) f(\xi) d\xi + \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^m \iiint \dots \int_a^b k(x, \xi_1) k(\xi_1, \xi_2) \dots k(\xi_{m-1}, \xi_m) f(\xi_m) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m$$

Il metodo è dovuto a **Liouville (1837) e Neumann (1870)**, e potremo scrivere la soluzione come:

$$(29) \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b H(x, y; \lambda) f(y) dy$$

Qui, il nucleo "risolvente" in cui si può condensare l'intera serie da λ a λ^m , sarà posto uguale a $H(x, y; \lambda)$. La serie non converge sempre: occorre che λ sia sufficientemente piccolo, e il nucleo K limitato (cioè non possa assumere valori infiniti nel dominio di integrazione). *Ma qui non ci addentreremo in questioni di convergenza.* Pur presentando, come ogni problema matematico, un interesse intrinseco, i teoremi che dimostrano la convergenza delle serie erano particolarmente importanti quando un matematico, che disponeva di mezzi di calcolo limitati, doveva addentrarsi nel calcolo di una serie, senza sapere se questa si sarebbe dimostrata convergente o no: esistono ora mezzi di calcolo che permettono di verificare direttamente e rapidamente se la serie converge o minaccia di divergere, o diverge. Allora, invece, era più utile servirsi di *criteri di convergenza* applicabili in quatttro e quattr'otto.

III: Un nuovo formalismo e i determinanti di Fredholm.

Ora si può introdurre la prima parte del formalismo a cui accennavo per trovare il numeratore del nucleo risolvente di Fredholm. Si considerino i seguenti diagrammi:

$k(x,y) =$		(due estremi liberi indicano due variabili su cui non si integra). Lo indicheremo con Z , iniziale di "zero", perché è moltiplicato per λ^0 .
$\int dz k(x,z)k(z,y) =$		si vede che anche qui ci sono due estremi liberi e un'integrazione. Lo indicheremo con $A\lambda$.
$\int dz k(z,z) =$		Un solo integrale senza estremi liberi. lo indicheremo con $a\lambda$.
$\int dz k(x,y)k(x,z) =$		Si consideri che $k(x,y)$ può essere portato fuori dal segno di integrale. Questo diviene quindi $Z + a\lambda$.

Da tutto ciò, per incominciare, si deduce che la *serie di Liouville-Neumann per il **nucleo risolvente*** (non per la *soluzione*) può essere scritta nel seguente modo (30), che lascia sempre due estremi liberi, che corrispondono alle variabili x e y. La *soluzione* (29) sarà ottenuta eseguendo l'integrazione su uno di essi (cioè l'estremo y, se sarà stato lasciato per ultimo), previo prodotto per f(y):

$$H(x, y; \lambda) = \left| \begin{array}{cccc} & + & \times & + & \times & + & \times & + \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array} \right|$$

Con ovvia notazione possiamo scrivere: $H(x, y; \lambda) = Z + (A \lambda) + (B \lambda^2) + (C \lambda^3) \dots$ (dove Z è l'iniziale del numero zero di crocette (e di fattori λ)).

Il denominatore $D(\lambda)$

Applichiamo ora la notazione al denominatore (25)

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^1 k(x, x) dx + \frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} k(x, x) & k(x, y) \\ k(y, x) & k(y, y) \end{vmatrix} dx dy - \frac{1}{3!} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} k(x, x) & k(x, y) & k(x, z) \\ k(y, x) & k(y, y) & k(y, z) \\ k(z, x) & k(z, y) & k(z, z) \end{vmatrix} dx dy dz \dots$$

i cui primi tre termini, svolgendo il determinante di secondo ordine, divengono

$$(25 \text{ b}) \quad D(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^1 k(x, x) dx + \frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^1 \int_0^1 (k(x, x)k(y, y) - k(x, y)k(y, x)) dx dy - \dots$$

ricordando che un'integrazione è indicata da una croce, che si porta dietro un λ , possiamo scrivere (o disegnare?), in termini del numero di crocette, che sono le potenze di λ , la seguente serie:

$$D(\lambda) = 1 - \bigcirc \times + \frac{1}{2} \left(\bigcirc \times \bigcirc \times - \times \bigcirc \times \right) - \frac{1}{6} \left(\bigcirc \times \bigcirc \times \bigcirc \times + 2 \times \bigcirc \times \times - 3 \bigcirc \times \times \times \right)$$

che, con ovvia notazione, può essere scritto

$$(25c) \quad D(\lambda) = 1 - a \lambda + \left(\frac{1}{2} \right) (a \lambda)(a \lambda) - b \lambda^2 - \left(\frac{1}{6} \right) (a \lambda)(a \lambda)(a \lambda) + 2 c \lambda^3 - 3 (a \lambda) b \lambda^2) \dots$$

Può valer la pena osservare che il termine $a \lambda$, viene ottenuto "annodando" gli estremi di Z con una crocetta, che introduce un fattore $-\lambda$. In effetti si ha

$$k(x, y) \rightarrow -\lambda \int k(x, x) dx$$

Questa semplice operazione riassume tre azioni: l'identificazione degli estremi della Z, e l'integrazione, con aggiunta di un fattore $-\lambda$. Invece, dal termine $A\lambda$, annodando gli estremi, cioè dando lo stesso nome alle due variabili e integrando, il che aggiunge un fattore λ , si ottiene $b\lambda^2$, e via dicendo.

$$\iint k(x, z)k(z, x)dx dz = \iint k(z, x)k(x, z)dx dz$$

Non c'è motivo di pensare che la formula ci debba tradire per termini di ordine più alto, e lo si può verificare svolgendo i determinanti, affascinante compito che lasciamo a coloro che sono portati per questo genere di cose. Gli altri, possono credermi. I conti li ho fatti. Il terzo termine, ad esempio, sappiamo che è un sesto di un dato determinante che ha sei termini. Usando i nostri diagrammi e tenendo conto della possibilità di variare i nomi degli indici e l'ordine nei prodotti, esso equivale a:

$$-\frac{\lambda^3}{6} \iiint dx dy dz [k(x, x)k(y, y)k(z, z) + 2 k(x, y)k(y, z)k(z, x) - 3 k(x, x) k(y, z)k(z, y)]$$

Il numeratore $D(x, \xi; \lambda)$.

Passiamo ora al calcolo di $D(x, \xi; \lambda)$. Dato che deve essere

$$(30) \quad H(x, y; \lambda) = \frac{D(x, \xi; \lambda)}{D(\lambda)}$$

Deve anche essere:

$$(31) \quad D(x, \xi; \lambda) = H(x, y; \lambda)D(\lambda)$$

In cui il membro di destra è noto.

A scopo di esempio, accontentiamoci del prodotto fino alle potenze di λ di ordine 2.

Il prodotto, con la nostra notazione, è

$$(32) \quad (Z + A\lambda + B\lambda^2)(1 - a\lambda + (1/2)a\lambda a\lambda - b\lambda^2) \dots = \mathbf{Z - a\lambda Z + A\lambda - aA\lambda^2 + B\lambda^2 + \frac{1}{2}a^2\lambda^2 Z - b\lambda^2 Z} + \frac{1}{2}a^2A\lambda^3 - Ab\lambda^3 - aB\lambda^3 + \frac{1}{2}a^2B\lambda^4 - bB\lambda^4 \dots$$

In tutto abbiamo 7 termini di grado inferiore al terzo, i quali possono essere scritti, secondo le nostre regole, in ordine delle potenze di λ :

$$(33) \quad D(x, \xi; \lambda)_2 = k(x, \xi) - \lambda \int dz (k(x, \xi)k(z, z) - k(x, z)k(z, \xi)) + \frac{\lambda^2}{2} \iint dz dz' [k(x, \xi)k(z, z)k(z', z') + 2 k(x, z)k(z, z')k(z', \xi) - k(x, \xi)k(z, z')k(z', z) - 2 k(x, z)k(z, \xi)k(z', z')] \dots$$

Sempre tenendo conto della possibilità di variare i nomi degli indici e l'ordine nei prodotti. Inoltre, si noti che $K(x, \xi)$ esce sempre dall'integrale per $D(x, \xi; \lambda)$. L'integrale su ξ verrà poi eseguito una volta che il nucleo risolvete sarà stato moltiplicato per $f(\xi)$.

L'ispezione dei diagrammi e delle regole di formazione dei medesimi, ci suggerisce la regola che ogni termine del denominatore, eccetto la cifra 1, è ottenuto "annodando" con una X ogni elemento del precedente termine del numeratore, dividendo per il numero di nuclei K (le crocette) presenti in ogni addendo, e cambiando segno. Quanto all'esponente di $(-\lambda)$, esso sarà eguale al numero delle crocette.

$$H(x,y;\lambda) = \frac{\left| - \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) + \dots \right|}{1 - \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \end{array} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) + \dots}$$

La creazione del termine di terzo ordine del denominatore è suggerita come esercizio. Il risultato è in Nota 1.

Si osservi che il denominatore è costituito unicamente da circoli chiusi: ciò significa che esso dipende solo da λ .

4. Per completezza.

Il mio scopo era quello di indicare in modo euristico come Fredholm trovò la soluzione della sua equazione. Tuttavia, forse i più importanti risultati che Fredholm ottenne furono tre teoremi, che non enuncerò troppo rigorosamente e dei quali non darò la dimostrazione (che di rado è data nei testi di matematica per i fisici) ma che appariranno ragionevoli a chi abbia qualche conoscenza un po' più che elementare degli autovalori e autofunzioni dei sistemi di equazioni algebriche lineari. Non è questo il luogo per trattare in maniera approfondita il problema per il caso delle equazioni algebriche. I concetti principali sono illustrati da esempi "minimali" nel seguente complemento.

COMPLEMENTO C.

NOZIONI ELEMENTARI SU MATRICI, DETERMINANTI, AUTOVALORI, AUTOVETTORI/AUOTFUNZIONI.

(Per rendere la presentazione minimale resteremo nel campo reale e tratteremo solo matrici quadrate e vettori, cioè matrici a una colonna/riga.)

Matrici, moltiplicatori/autovalori, autovettori

Si prenda come esempio una matrice quadrata del tipo più semplice possibile.

Sia la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Che risulterebbe, per esempio, dal sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x + 4y = a \\ x + y = b \end{cases}$$

O anche:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Che si può scrivere in modo abbreviato:

$$M \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

Noi sappiamo – o dovremmo sapere, per esempio dalla regola di Cramer - che:

C-I. Condizione necessaria e sufficiente perché una soluzione unica esista è che il determinante della matrice dei coefficienti sia diverso da zero.

Nel nostro caso il determinante vale $D = -3$, e quindi l'unica soluzione esiste.

Questa regola può essere estesa a n dimensioni. Se D proviene da un sistema di n equazioni, con n finito, l'equazione $D = 0$ certamente avrà i suoi n zeri, reali o complessi, singoli o multipli, che corrispondono agli autovalori del sistema. Tuttavia è bene notare che se $n = \infty$ (come nei casi che stiamo studiando), D può essere una funzione analitica priva di zeri nel campo reale, come $\exp(\lambda)$, nel qual caso ci dovremmo rassegnare a dire che il problema non possiede autovalori.

I moltiplicatori sono calcolati dalla (10b) ponendo:

$$(C1) \quad \begin{cases} x + 4y = \rho x \\ x + y = \rho y \end{cases}$$

Cioè ricerchiamo un vettore che sia il vettore originale $\mathbf{v} = (x, y)$ moltiplicato per un fattore ρ (che chiameremo moltiplicatore, per non confonderlo con l'autovalore $\lambda = 1/\rho$)

$$(C2) \quad \begin{cases} (1 - \rho)x + 4y = 0 \\ x + (1 - \rho)y = 0 \end{cases}$$

Per la (I), un tale sistema avrebbe l'ovvia soluzione $\mathbf{v} = (x, y) = 0$, unica se il determinante dei coefficienti fosse diverso da zero. Quindi, per avere anche soluzioni non banali, deve essere:

$$(C3) \quad \begin{vmatrix} 1 - \rho & 4 \\ 1 & 1 - \rho \end{vmatrix} = 0$$

Questa equazione è di secondo grado ed ha due soluzioni:

$$\begin{cases} \rho_1 = 3 \\ \rho_2 = -1 \end{cases}$$

Sostituendo nella matrice vediamo che essa diventa:

Per $q=3$:

$$(C4) \quad \begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Ove la seconda equazione è la prima moltiplicata per $-1/2$. Si può allora ricavare l'autovettore corrispondente al moltiplicatore $q=3$ scegliendo una qualunque delle due equazioni (C4), che ci dà un **autovettore** proporzionale a $\mathbf{v}^{(1)} = (2, 1)$. La costante di proporzionalità N può essere scelta tale $N^2(-2, 1)(-2, 1) = 1$, cioè $N = 1/\sqrt{5}$. Ma non ci serviremo di questa possibilità. Qui basta notare che qualsiasi vettore proporzionale all'autovettore trovato è ancora un autovettore.

Ponendo invece $q=-1$, otteniamo:

$$(C5) \quad \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Ove di nuovo le due equazioni si sono ridotte a una, da cui otteniamo l'autovettore $\mathbf{v}^{(2)} = (-2, 1)$, corrispondente al moltiplicatore $q=-1$. La costante di proporzionalità sarà anch'essa $M=N = 1/\sqrt{5}$.

A scopo pedagogico, facciamo il prodotto interno dei due vettori $\mathbf{v}^{(1)} = (2, 1)$ e $\mathbf{v}^{(2)} = (-2, 1)$, che vale $(-2)2 + 1*1 = -3$. Se il risultato fosse nullo, ricordando che in prodotto interno può essere scritto $\mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(2)} = |\mathbf{v}^{(1)}| |\mathbf{v}^{(2)}| \cos(\theta)$, ciò significherebbe che, interpretando i nostri vettori come appartenenti a un piano, $\mathbf{v}^{(1)}$ e $\mathbf{v}^{(2)}$ sarebbero ortogonali. Ma evidentemente, qui non lo sono.

Supponiamo ora di scegliere uno qualunque dei sistemi (C4) o (C5), ma con un termine noto (quasi) qualsiasi, per esempio (1, 3):

Ad esempio, dalla (C5), che corrisponde al moltiplicatore -1 , abbiamo:

$$(C6) \quad \begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema, come si può verificare, non esiste. Per esempio, la regola di Cramer dà un denominatore, il determinante dei coefficienti, nullo. Se preferiamo,

ricavando x dalle due equazioni ed eguagliando, si ottiene $3 - 2y = \left(\frac{1}{2}\right) - 2y$, da cui l'impossibile $3 = \frac{1}{2}$.

Matrici trasposte e matrici simmetriche

La **matrice trasposta** T di M la si ottiene scambiando le righe colle colonne in modo ordinato, cioè la prima riga va nella prima colonna, la seconda riga nella seconda colonna eccetera, di modo che, chiamando $M(i,j)$ gli elementi di M , dove il primo indice corrisponde alle righe, e il secondo alle colonne, avremo che $T(i,j) = M(j,i)$, e, inevitabilmente, $T(i,i) = M(i,i)$. Nel nostro caso:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di T è -3 , eguale al determinante di M . Non è un caso, il determinante di una matrice trasposta è eguale al determinante della matrice originaria.

Questo deriva dalla definizione stessa di determinante. Come afferma il Tricomi (Lezioni di Analisi Matematica, Parte I): "Noi chiameremo determinante il numero che risulta facendo la somma di tutti i prodotti che possono ottenersi moltiplicando fra loro ciascuna volta n quantità della tabella, *scelte in righe e colonne diverse l'una dall'altra*, essendo ciascun prodotto preso col proprio segno o col segno cambiato, secondo che le due permutazioni formate dai primi indici e dai secondi indici degli n fattori sono della stessa classe o di classi diverse".

Senza andare nel dettaglio dei significati dei vari termini che compaiono nella definizione, vediamo bene che in essa non si fa distinzione fra righe e colonne. I due termini potrebbero essere scambiati nell'unico luogo in cui appaiono, e nulla muterebbe della definizione. I primi indici sarebbero scambiati con i secondi indici, ma l'appartenenza alla stessa classe o a classi diverse resterebbe intatta. Credo che sia una delle dimostrazioni più brevi della matematica. L'unico punto necessario è che righe e colonne siano scambiate in modo ordinato, in modo che gli indici di ogni elemento non siano mutati, pur scambiandosi di posto.

C-II. Ne segue che anche l'equazione caratteristica della matrice trasposta (che deriva da un determinante in cui i moltiplicatori compaiono solo sulla diagonale principale), è la stessa, e quindi i moltiplicatori sono gli stessi.

Però, da questo non segue però che siano eguali anche gli autovettori. In effetti per la matrice T abbiamo:

(i) per il moltiplicatore $q = 3$, l'autovettore $(1, 2)$

(ii) per il moltiplicatore $q = -1$, l'autovettore $(-1, 2)$

Una **matrice simmetrica**, nella quale sono eguali gli elementi simmetrici (con indici scambiati) rispetto alla diagonale principale, è eguale alla sua matrice trasposta. La matrice simmetrica nel campo reale è il caso più elementare di una matrice autoaggiunta o hermitiana, nella quale gli elementi simmetrici (con indici scambiati) rispetto alla diagonale principale sono complessi coniugati l'uno dell'altro, e quelli della diagonale principale sono quindi reali.

Una proprietà delle **matrici simmetriche**, come abbiamo accennato, è che gli autovettori sono ortogonali, cioè il loro prodotto interno è nullo. La dimostrazione non è difficile: Sia la matrice simmetrica

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

Con due autovettori $a_1 = (u, v)$ e $a_2 = (w, z)$, corrispondenti a due diversi moltiplicatori/autovalori q_1 e q_2 rispettivamente, cioè tali che $M a_i = q_i a_i$. Calcoliamo i due prodotti

$$(C8) \quad (u, v) \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = (u, v) \begin{pmatrix} a w + c z \\ c w + b z \end{pmatrix} = uaw + ucw + vcw + vbz = \rho_1(uw + vz)$$

$$(C9) \quad (w, z) \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (w, z) \begin{pmatrix} a u + c v \\ c u + b v \end{pmatrix} = wau + vcw + zcu + zvb = \rho_2(uw + vz)$$

La differenza dà $(\rho_1 - \rho_2)(uw + vz) = (\rho_1 - \rho_2)(a_1 \cdot a_2) = 0$.

Poiché i due moltiplicatori sono diversi per ipotesi, ne segue che il prodotto interno dei due autovettori è nullo, cioè i due autovettori sono ortogonali. Questo risultato si estende naturalmente alle matrici $n \times n$, e anche alle matrici con n infinito e continuo (beninteso, se vi sono autovalori e quindi autovettori/autofunzioni).

Scegliamo ora una matrice simmetrica elementare, ad esempio la

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si possono calcolare i due moltiplicatori, che risultano essere 2 e 0, e i relativi autovettori, (1,1) e (-1,1) rispettivamente, che, questa volta, a prima vista, sono ortogonali.

Ma la matrice trasposta porge un altro risultato interessante: torniamo a un'equazione del tipo (C6), in cui abbiamo inserito il moltiplicatore -1, che ha **autovettore (-2, 1)**. **La matrice trasposta, per lo stesso autovalore, porge l'autovettore (-1,2)**. Qui però vogliamo determinare un termine noto, un vettore (r,s) che renda una soluzione possibile:

$$(C7) \quad \begin{cases} 2x + 4y = r \\ x + 2y = s \end{cases}$$

Una soluzione sarà possibile solo se r ed s saranno tali per cui, a meno di un fattore di proporzionalità, le due equazioni divengono la stessa. Poiché la seconda equazione, a parte il termine noto, è eguale alla prima divisa per 2, occorre che anche $r = 2s$, cioè, in generale, $r = 2k$, $s = k$. Ma il vettore $(2k, k)$ è ortogonale all'autovettore $(-1, 2)$ della matrice trasposta, per lo stesso autovalore: infatti $(-1)(2k) + k(2) = 0$. Abbiamo dunque mostrato che

C-III. Se il determinante dei coefficienti è nullo, una soluzione è possibile purché il termine noto sia un vettore ortogonale all'autovettore della matrice trasposta corrispondente allo stesso moltiplicatore. Da cui deriva che se la matrice è simmetrica, basta che il termine noto sia proporzionale all'altro autovettore (in una matrice 2×2), in quanto l'altro autovettore è ortogonale all'autovettore della matrice diretta, che è eguale alla matrice trasposta.

Teoremi di Fredholm

Fredholm ricavò, non senza sforzo, tre teoremi che, detti di schianto all'inesperto, sembrano assai astrusi. Tuttavia, una volta letto il complemento precedente, essi possono anche apparire abbastanza prevedibili.

1. Alternativa: **O l'equazione inhomogenea**

$$(14) \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

ha un'unica soluzione per qualsiasi funzione $f(x)$ (il che avviene se λ non è un autovalore), oppure **l'equazione omogenea:**

$$(14c) \quad \varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

ha almeno una soluzione non banale ($\varphi(x) \neq 0$). Allora λ è un autovalore, e la soluzione è un'autofunzione.

Sappiamo che (C-I) la condizione perché un sistema di equazioni algebriche lineari di primo grado abbia una soluzione unica è che il determinante dei coefficienti sia diverso da zero, ciò che avviene nell'equazione (12c) se λ non è un autovalore della matrice dei coefficienti.

2. Se λ non è un autovalore (primo caso), allora λ non è neppure un autovalore dell'equazione trasposta:

$$(14) \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(\xi, x) \varphi(\xi) d\xi$$

Mentre, se λ è un autovalore (secondo caso), λ è anche un autovalore dell'equazione omogenea trasposta, cioè l'equazione

$$(14c) \quad \varphi(x) = \lambda \int_a^b K(\xi, x) \varphi(\xi) d\xi$$

ha almeno una soluzione non banale.

Sappiamo che (C- II) gli autovalori della matrice (quadrata) dei coefficienti sono gli stessi della matrice trasposta, cioè della matrice in cui sono state scambiate le righe colle colonne, ciò che qui corrisponde allo scambio delle due variabili. *Gli autovalori sono gli stessi, ma anche qui le autofunzioni non lo sono in genere.*

3. Se λ è un autovalore, allora l'equazione inhomogenea

$$(14) \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

ha una soluzione se e solo se

$$\int_a^b f(\xi) \psi(\xi) d\xi = 0$$

per ogni funzione $\psi(\xi)$ che soddisfa l'equazione omogenea trasposta.

$$(14c) \quad \varphi(x) = \lambda \int_a^b K(\xi, x) \varphi(\xi) d\xi$$

E noi sappiamo che (C-III) Se il determinante dei coefficienti è nullo, una soluzione del sistema non omogeneo è possibile purché il termine noto sia un vettore ortogonale all'autovettore della matrice trasposta corrispondente allo stesso moltiplicatore.

Vediamo quindi che i tre teoremi di Fredholm possono essere considerati come estensioni al continuo dei teoremi del calcolo matriciale elementare.

5. Commiato.

E con questo ho terminato il mio lavoro divulgativo sulle equazioni di Fredholm. Spero che sia stato utile a qualcuno.

NOTE:

1) Fattore di $(-\lambda^3)$ – Esercizio a pag.30

Al numeratore:

Al denominatore:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} \right| \bigcirc * + \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} \right| \bigcirc * \bigcirc * - \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} \right| * * * - \frac{1}{6} \left| \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} \right| \bigcirc * \bigcirc * \bigcirc * - \frac{1}{3} \bigcirc * * + \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} \right| \bigcirc * * * \end{aligned}$$

Lo si può ottenere sia col metodo simbolico, sia coll'algoritmo (32), continuati fino a includere tutti i grafici con tre crocette, o tutte le potenze $(-\lambda^3)$.