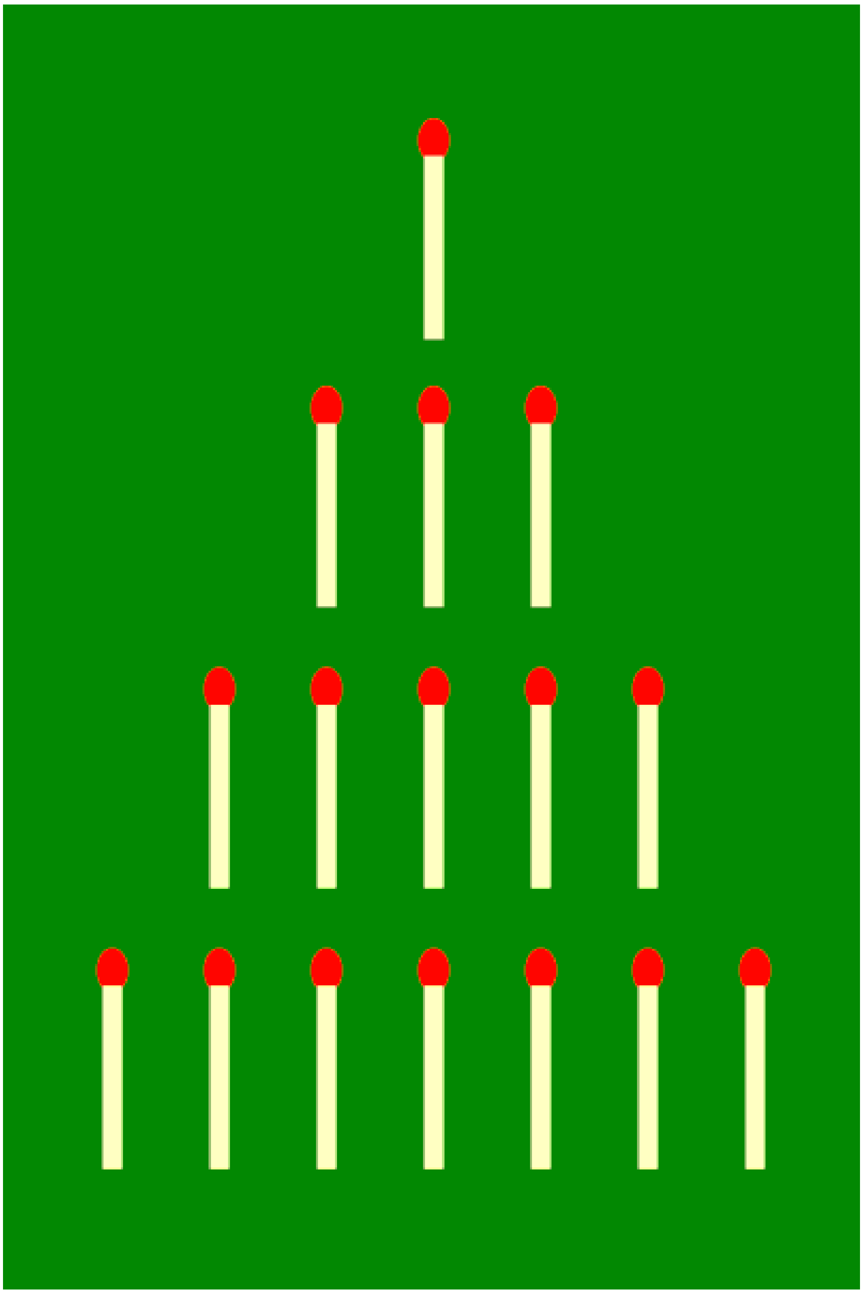
NIM



Attribuzione: Uncopy, CC BY-SA 3.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>, tramite Wikimedia Commons

Un'introduzione elementare per matematici pedoni

DE

Inverno 2022, terzo anno dell'era Covid

INTRODUZIONE

Il presente saggio è la versione (leggermente) ampliata di una risposta alla domanda: **Come ci si rende conto che XOR è necessario per risolvere il gioco di Nim?,** apparso su Quora, versione inglese, anni fa. L'interesse per Nim non sembra essere molto alto, ma il mio approccio è che le domande su Quora sono solo pretesti per studiare alcuni problemi di cui ho sentito parlare anni fa, senza mai avere il tempo di esaminarli in profondità. La mia storia con Nim, ad esempio, risale agli anni Settanta.

La semplice risposta è che XOR come operatore logico non è necessario per risolvere il gioco di Nim. Infatti il Prof. Bouton, l'inventore di Nim (1) non ha mai utilizzato l'operatore logico XOR nel suo unico lavoro, che ha posto le basi della teoria matematica del gioco, ma ha ridotto il problema all'uso della **somma modulo 2,** una concetto che deriva piuttosto dall'aritmetica modulare (Gauss) o dalla teoria dei campi finiti (Galois) di ordine 2.

$\mathbb{F}_2$:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Tav.1

Somma e moltiplicazione nel Galois Field F2 – la moltiplicazione non viene utilizzata nella dimostrazione della strategia vincente per Nim.

Il problema con molte delle spiegazioni del gioco fornite su testi popolari (compresa la maggior parte di Wikipedia), è che si ha l'impressione che i concetti **XOR (OR esclusivo)** e **Mex (minimo escluso)** diano in qualche modo magicamente una soluzione, e non c'è alcuna spiegazione su come questo approccio piuttosto astruso sia stato raggiunto. Inoltre, dà l'impressione che, senza possedere almeno una nozione introduttiva di algebra booleana, sia impossibile vincere al gioco del Nim.

Bouton, che nel 1901 fu il primo a spiegare la strategia vincente di Nim, non usò tali concetti.
Ora cercherò di capire come Bouton sia giunto alle sue conclusioni, che stanno alla base del gioco. Purtroppo il Prof. CL Bouton non ha potuto parlarmi, e quello che segue è una sorta di esercizio di "Fantascienza matematica", ma, ovviamente, il lettore è libero di accettare o rifiutare la mia ricostruzione.

Definizione del gioco (da https://en.wikipedia.org/wiki/Nim)

***Nim** è un gioco matematico di strategia in cui due giocatori a turno rimuovono oggetti da mucchi o pile distinti. Ad ogni turno, un giocatore deve rimuovere almeno un oggetto e può rimuovere un numero qualsiasi di oggetti a condizione che provengano tutti dallo stesso mucchio o pila. A seconda della versione giocata, l'obiettivo del gioco è quello di evitare di prendere l'ultimo oggetto o di prendere l'ultimo oggetto.*

La prima opzione "**Vince chi prende l'ultimo oggetto**" è chiamata "il **normale** gioco nim"; la seconda opzione "**Chi prende l'ultimo oggetto perde**", è chiamata internazionalmente la variante " **misère** " del gioco nim. Mi concentrerò sullo spiegare la genesi della strategia vincente per il "gioco normale". Una volta compresi i principi che portano a una strategia vincente di gioco "normale", esiste un metodo semplice per convertirla in una strategia vincente per la variante "misère".

Chiamerò ogni atto di rimozione degli oggetti " **rimozione** ", piuttosto che mossa o "presa", perché il giocatore non si tiene le monete.

1. Una pila.
Supponiamo di avere la forma più semplice di Nim: una pila di oggetti (mi piace pensare alle **monete**).

Per giocare al gioco "con una pila" dobbiamo cambiare la regola data sopra da Wikipedia, altrimenti il primo giocatore può prendere l'intera pila, e invariabilmente vince. Invece, **i giocatori possono rimuovere solo 1 o 2 o 3 monete.**

Per mettere un po' d'ordine nella nostra mente, allineiamo le monete in fila. Il primo giocatore (A) rimuove le prime 1, o 2 o 3 monete. Poi il secondo giocatore (B) fa lo stesso, e i due giocatori si alternano, fino a raggiungere la fine della linea: vince il giocatore che nell'ultima rimozione prende l'ultima moneta.

Posizioni sicure e non sicure.
Basta una breve riflessione per concludere che ci sono posizioni "vincenti" o "sicure" e posizioni "perdenti" o "non sicure". Cosa significano i termini "sicuro" e "non sicuro"? La proprietà delle posizioni sicure è che, partendo da una posizione sicura e prendendo 3, 2, 1 monete, non si può raggiungere la successiva posizione sicura, **altrimenti potrebbe farlo l'avversario.** La proprietà delle posizioni non sicure è che esiste sempre (almeno) un modo per raggiungere una posizione sicura partendo da una di esse.

L'ultima posizione vincente prima della vittoria è il *quarto posto dalla fine*. Se un giocatore (A) consegna il gioco a B con solo quattro monete rimaste, allora B ha perso, perché è obbligato a prendere almeno una moneta, il che consente al giocatore A di prendere le ultime tre monete, **inclusa l'ultima moneta** . B invece non può prendere 4 monete. Quindi possiamo dire che una posizione è sicura per il giocatore che la raggiunge con la sua mossa. Una posizione sicura, d'altra parte, è una posizione di sventura per il giocatore che deve (ri)muovere da una posizione sicura. Ma vediamo che per raggiungere quella posizione sicura, il giocatore A doveva partire dalla posizione sicura *all'ottavo posto dalla fine.* In conclusione, una posizione sicura è a un multiplo di quattro posti dall'ultima.

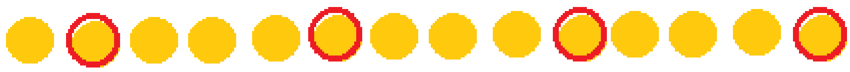


Fig.2

Il gioco Nim con una singola pila di 13 monete (e due giocatori). Partendo da sinistra e rimuovendo alternativamente 1 o 2 o 3 monete, vince il giocatore che riesce a prendere l'ultima moneta a destra.

Questo non è proprio un gioco come gli scacchi o la dama, e non appena i due giocatori scoprono il trucco, il gioco diventa un po' noioso. La conclusione è che, se il numero iniziale di monete viene deciso casualmente, in un caso su quattro, in media, il primo giocatore, A, deve fare i conti con una posizione sicura. In tal caso, se B conosce il gioco, A ha perso e non c'è modo di correggere la situazione. Nei tre casi su quattro, invece, in cui non parte da una posizione sicura, vince il primo giocatore, perché può togliere abbastanza monete per raggiungere una posizione sicura, e il suo avversario non può farci nulla. Quindi il consiglio è: **si cerchi di essere il primo giocatore.** I giocatori probabilmente si annoieranno presto, ma almeno imparano due concetti, quello di **posizione sicura**, che necessita di due rimozioni per raggiungere un'altra posizione sicura, e quello di **posizione non sicura** , che ne necessita solo una.

Di conseguenza, lo schema di un gioco corretto è il seguente:

0. Il giocatore A stabilisce una posizione sicura

Mossa 1, turno di B: B per definizione non può portarsi in una posizione sicura. Egli effettua qualsiasi rimozione possibile, il numero totale di monete diminuisce.

Mossa 2, turno di A: A stabilisce una posizione sicura in una rimozione da dove B si è fermato, il numero totale di monete diminuisce.

Mossa 3, turno di B: B per definizione non può portarsi in una posizione sicura. Egli effettua qualsiasi rimozione possibile, il numero totale di monete diminuisce.

Mossa 2,turno di A: A stabilisce una posizione sicura in una rimozione da dove B si è fermato, il numero totale di monete diminuisce.

....

Mossa 2n: A raggiunge la posizione vincente e prende l'ultima moneta. Il numero totale di monete è ora 0.

Tale schema è la base della strategia vincente di tutti i giochi simili a Nim.

2. Due pile

Vediamo ora cosa succede quando abbiamo due pile di monete. Qui torniamo alla regola data da Wikipedia: un giocatore può prendere ***da una* delle pile** *tutte le monete che vuole, anche l'intera pila*. Prendere una pila intera non è una buona idea, perché l'avversario vince rimovendo l'intera altra pila.

La posizione finale vincente è quando abbiamo **1 moneta rimasta in entrambe le pile**. Supponiamo che A abbia raggiunto o costruito quella posizione. Allora B ha perso, perché deve prendere una moneta, cioè deve azzerare una pila, e quindi A può vincere azzerando l'altra pila, che è l'ultima moneta.

Quali sono le posizioni sicure che entrambi i giocatori devono cercare di raggiungere? Ovviamente quelli in cui entrambe le pile hanno lo stesso numero di monete. Il punto è che, se il giocatore A ha lasciato una di queste configurazioni sul tavolo, il giocatore B può prendere monete solo da una pila, e così facendo perturba l'uguaglianza delle monete nelle due pile. Il giocatore A può quindi ripristinare l'uguaglianza (e quindi raggiungere una *posizione sicura*) rimuovendo lo *stesso numero di monete* dall'altra pila.

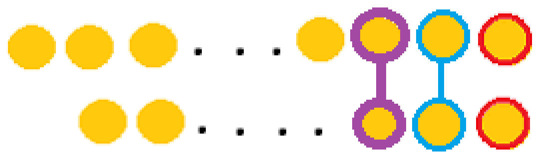


Fig.3

Gioco Nim a due pile. Le posizioni "sicure" o "vincenti" sono quelle in cui un giocatore riesce ad ottenere due pile con lo stesso numero di monete.

3. Tre pile.

Consideriamo infine il caso più interessante di tre pile, che possono essere facilmente estese a **n** pile. Supponiamo di non mettere più di 10 monete in ogni pila.

3.1 Posizioni sicure

a) Posizione sicura finale: (0,1,1) *(in tutti gli esempi le pile possono essere permutate senza cambiare la posizione. Quindi, (0,1,1)=(0,1,0) = (1,1,0).)*

Si parte dalla fine della partita. Il giocatore che raggiunge la posizione **(0,1,1)** è "sicuro" di vincere, perché il suo avversario deve prendere una moneta, lasciando quella finale al giocatore iniziale, che così vince - *nel gioco "normale".*

b) Seconda posizione sicura (dalla fine): **(1,2,3)**

Ora cerchiamo la precedente posizione sicura, che deve essere a due rimozioni dalla (0,1,1) o da qualsiasi altra posizione sicura.

Non può essere (1,1,1), perché con una sola rimozione l'avversario può raggiungere la posizione sicura finale (0,1,1); come regola generale, una posizione non è sicura se contiene due monete uguali in una pila. Infatti, se il giocatore A ottiene la posizione **(n,n,m)** , il giocatore B, in una rimozione, si porta nella posizione sicura **(n,n, 0)** che abbiamo già incontrato nella Sezione 2, rimuovendo interamente il terzo mucchio . Il gioco continua come il "gioco a due pile" che abbiamo considerato sopra, e rimane tale, perché non è possibile ricostruire la terza pila (i giocatori possono solo rimuovere le monete, non possono aggiungerle) - e A è nei guai. Pertanto, l'unica possibilità di una posizione sicura per il giocatore A è **(1,2,3).**

Vediamo che il giocatore (B), se confrontato con la posizione (1,2,3), può prendere l'1 dalla prima pila. Quindi il giocatore A prende 1 dalla terza pila: la posizione è ora (0,2,2) una posizione sicura del gioco a due pile, che, nel peggiore dei casi, diventerà (0,1,1) nel turno successivo. Se B, invece, rimuove monete lasciando una posizione (1,1,n) o equivalente, A prende l'intera pila n, e torna a (0,1,1), o equivalente. Eccetera.

L'esempio dato suggerisce un collegamento generale tra giochi nim con diversi numeri di pile: una posizione nel gioco a **4 pile** non è sicura se include tre pile con numeri di monete corrispondenti a una posizione sicura del gioco **a 3 pile** . Il giocatore, di turno, può rimuovere l'ultima pila e atterra in una posizione sicura del gioco a 3 pile. Quindi, nel gioco a quattro pile non ci aspettiamo di vedere, ad esempio, alcuna posizione sicura del tipo "1, 2, 3, n", perché il giocatore che deve giocare potrebbe rimuovere la quarta pila in una sola mossa e giocare il gioco a 4 pile come se fosse un gioco a 3 pile, partendo da una posizione sicura.

Più in generale possiamo dire: **Regola I: una posizione sicura di un gioco con n-pile, non può avere n-1 pile che formano una posizione sicura nel gioco con n-1 pile.**

c) Terza posizione sicura (dalla fine): **(1,4,5)**

Qual è la prossima posizione sicura più vicina risalendo il gioco?

Possiamo ora dare la **Regola II** : **non solo il giocatore deve evitare di avere due pile con lo stesso numero di monete, ma due diverse posizioni sicure non possono avere due pile con lo stesso numero di monete e una terza con un numero maggiore di monete,** perché , se questa è la situazione, l'avversario può spostarsi da una posizione sicura a un'altra posizione sicura *con una rimozione sola* di monete da una sola pila. Quindi, nel nostro caso, la nuova posizione non deve avere due numeri uguali a due numeri tra 1, 2, 3. Supponiamo di mantenere 1 al primo posto. Quindi il secondo numero non può essere né 2 né 3, e il numero più piccolo consentito sarà 4. Il terzo numero non può essere né 1 (Regola I) né 2 o 3 o 4 (Regola II), e quindi sarà 5. Quindi, la prossima posizione sicura è **1, 4, 5.**

Lemma della Regola II: in posizione sicura i numeri di monete di due pile determinano in modo univoco il numero di monete della terza pila.

d) Quarta posizione sicura: (1,6,7) e altre (1,n,m) posizioni
Sempre risalendo nel gioco, la posizione che precede (1,4,5), si ottiene tenendo sempre 1 e considerando ancora che il secondo numero non può essere 1 (regola I). Per la regola II, non può essere né 2, né 3 (perché poi in una sola mossa ricadiamo su 1,2 3), e non può essere né 4 né 5 (perché ricadiamo su 1,4,5). Deve essere 6 e l'ultimo è 7.
Quindi, **(1, 6, 7), è la quarta posizione sicura.**

In seguito avremo **(1,8,9)** , **quinta posizione sicura** , applicando sempre la Regola I e la Regola II. La serie di posizioni sicure con 1 al primo posto finisce qui, se manteniamo il numero di monete a un massimo di 10 in qualsiasi pila (se togliamo il limite, allora (1,10,11) sarebbe la prossimo posizione sicura ecc.) Inoltre, notiamo che 1 non apparirà in nessuna futura posizione sicura, purché 10 sia il numero massimo di monete.

e) Per raggiungere la prossima posizione sicura, dobbiamo avere un 2 in primo luogo.
La pila successiva non può avere né 2 monete secondo la regola I, né 1 o 3 secondo la regola 2. Può essere 4. In terzo luogo non possiamo avere 1 (completamente utilizzata), né 2 (regola I), né 3 (regola II, applicata a 1,2,3), né 4 (regola I), né 5 (regola II, applicata a 1,4,5). Dobbiamo avere 6.
Sesta posizione sicura, (2,4,6).
La prossima posizione sicura ha 2 monete al primo posto, e al secondo posto non possono esserci né 2 (regola I), né 1, né 3 o 4 (regola II). Possiamo avere 5. Ancora, l'applicazione al terzo posto delle regole che abbiamo dato, esclude 5 e 6, e quindi la **settima posizione sicura** è **(2,5,7).**

Non ci vuole un genio matematico per continuare, e scoprire che poi abbiamo **(2,8,10)** , come (2,8,9) è esclusa dalla Regola II, applicata alla (1,8,9).

Allora abbiamo **(3,4,7), (3, 5, 6)** e **(3, 9, 10)** .

Non esistono altre posizioni sicure, sempre se ci limitiamo a un massimo di 10 monete per pila

Positions			Total
0	1	1	2
1	2	3	6
1	4	5	10
1	6	7	14
1	8	9	18
2	4	6	12
2	5	7	14
2	8	10	20
3	4	7	14
3	5	6	14
3	9	10	22

Tav. 2.

Tutte le posizioni sicure (o vincenti), con numero massimo di gettoni =10 per ogni pila.

Per vincere una partita con 3 pile e un massimo di 10 monete ciascuna, questo è tutto ciò di cui abbiamo bisogno. Possiamo imparare a memoria le posizioni sicure (ciò che non è un'impresa straordinaria), oppure scriverle su un foglio. Tuttavia, per qualche ragione, le persone non rifiutano di giocare con uno che ha imparato a memoria le 10 o 11 posizioni, ma si rifiutano di giocare se le legge da un foglietto.

Un breve ragionamento sulla base delle Regole I e II, ci convince anche del fatto che, giocando con **4 pile di monete, le posizioni** (1, 1, n, n) sono sicure. Meno semplice è il caso delle posizioni sicure (1,3,6,4), (1,2,5,6), (1,2,4,7) (1,3,5,7). (2,3,4,5) (2,3,6,7) (2,3,8,9), (4,5,6,7) (4,5,8,9) (n,n,m,m)(n,n,n,n).– ma vedremo un altro modo di dimostrarlo. La posizione raffigurata in copertina (1, 3, 5, 7) è sicura, e quindi il giocatore, per avveduto che sia, se sarà il primo a giocare partendo da quella posizione, perderà sicuramente.

C. Bouton deve essersi chiesto **cosa fosse comune a tutte le posizioni sicure,** per farle risaltare come la chiave per la soluzione del gioco del Nim. Trovare un facile criterio "di sicurezza" avrebbe facilitato la verifica della loro sicurezza o meno.

Chiaramente, l' **espressione decimale** non diceva molto. La somma dei tre numeri, invece, produce un primo risultato interessante, in quanto, sommando l'ammontare delle monete nelle pile di tutte le posizioni sicure, sia nei giochi a due colonne che a 3 colonne, si ottiene un numero pari.

Poi deve aver pensato che, se ci si vuole addentrare nella macchinario di un numero, si deve ricorrere o alla scomposizione in fattori primi, oppure alla base binaria, perché, di regola, è difficile vedere in altre basi ciò che si non riesce a vedere in base 2.

La **scomposizione in fattori primi** non dice molto: quattro volte abbiamo un totale di 14 monete. Ora, 14 = 2 x 7, dove 7 è un primo dispari, ma 12 e 20 non rientrano in questa immagine. A prima vista, non esiste una caratteristica comune evidente derivante dalla scomposizione in fattori primi.

Credo che, forse dopo altri tentativi, C. Bouton si sia rivolto alla **base binaria,** che gli permise di compilare la seguente Tav.3, che non è altro che la traduzione della Tav.2 in base binaria (le righe corrispondono ai numeri di monete in ogni pila) :

0 0 0
0 0 1
0 0 1
-

0 0 1	0 0 1	0 0 1	0 0 0 1	0 1 0	0 1 0
0 1 0	1 0 0	1 1 0	1 0 0 0	1 0 0	1 0 1
0 1 1	1 0 1	1 1 1	1 0 0 1	1 1 0	1 1 1
a	**b**	**c**		**d**	**e**

0 0 1 0	0 1 1	0 1 1	0 0 1 1
1 0 0 0	1 0 0	1 0 1	1 0 0 1
1 0 1 0	1 1 1	1 1 0	1 0 1 0
	f	**g**	

Tav. 3

Tutte le *posizioni sicure* per pile non superiori a 9 monete. Le posizioni contrassegnate con a,b,c ecc. sono quelle con pile non superiori a 7 monete, escluse le pile (0,1,1) e (0, 0, 0).

A questi vanno aggiunte anche le nove posizioni della forma (0, n, n) – che includono la (0,1,1).

Scommetterei che, una volta scritte tutte le undici posizioni **sicure** in forma binaria, in **riga,** il nostro uomo Bouton si rese subito conto di ciò che era comune a tutte loro, ovvero del fatto che ogni colonna includeva solo o tutti gli zeri o una coppia di 1 (considerando che c'erano solo tre pile, e quindi tre righe). Inoltre, deve essersi reso conto che due righe di una terzina determinano la terza riga, se si vuole far rientrare la terzina nello schema comune (un fatto che già sappiamo: **3.1.c Lemma**). Nella notazione binaria lo stesso risultato diventa ovvio, perché la terza riga è necessaria e sufficiente per compensare gli 1 o gli 0 mancanti. Pertanto, per raggiungere una posizione sicura, non è necessario effettuare un confronto con tutte le posizioni sicure conosciute. Sappiamo dalle regole del gioco, che solo una pila (qui rappresentata come **riga**) può essere modificata, in particolare ridotta.

Ora veniamo al nocciolo della mia risposta alla domanda posta su Quora: la somma modulo 2 ha la stessa tabella dell'operatore logico XOR dell'algebra booleana. Tuttavia, in nessuna dimostrazione della strategia vincente per Nim è indispensabile utilizzare le proprietà di XOR in una sorta di proposizione logica.

x	y	$x \oplus y$
0	**0**	0
1	**0**	1
0	**1**	1
1	**1**	0

Tabella 4
Tabella dei risultati dell'agire con l'operatore XOR sui due numeri (0,1).
Fondamentalmente, è la stessa della tabella "+" di Fig.1

Come dicevamo, Bouton non citò mai concetti matematici più avanzati di quello di **"somma modulo 2",** concetto che deriva piuttosto dall'aritmetica modulare (Gauss, 1801) o dalla teoria dei campi finiti (Galois) di ordine 2 (Bouton era un esperto di teoria dei gruppi avanzata.)

Nella sezione 2 del suo articolo, ci dice immediatamente che una posizione sicura si trova scrivendo su tre righe il numero di tre monete in ciascuna pila in forma binaria e allineando le colonne. Poi, più o meno casualmente, dice: " **Se la somma di ogni colonna è 2 o 0 (cioè congruente a 0 mod.2) l'insieme dei numeri forma una posizione sicura".** Non dà alcuna spiegazione di una prescrizione così straordinaria, e quindi credo che ci sia arrivato come ho mostrato, costruendo empiricamente l'insieme delle posizioni sicure consecutive, a partire dalla fine del gioco, mettendole in forma binaria, e confrontandole. La proprietà che cita salta all'occhio e Bouton scrive come se stesse esaminando la tabella 3, che aveva costruito, ma senza dirci come.

3.2 Il numero di posizioni sicure .

Un ultimo punto necessitava di una dimostrazione, cioè che **tutte e solo** le posizioni con somme per colonna tutte uguali a zero, utilizzando la somma mod.2, erano rappresentate nella costruzione empirica del genere, che ho dato nel Paragrafo 3.1.

Una risposta a questa domanda è calcolare il numero totale di posizioni sicure sia in modo teorico che empirico. I risultati devono essere gli stessi. Vediamo come si può calcolare teoricamente, nel modo più semplice possibile, il numero totale delle posizioni sicure. Verifichiamo ad esempio che **7 sia il numero di posizione sicure per pile non superiori a**

7 monete. Se uno lo fa con un massimo di 7 monete per ogni pila, dovrà riempire una matrice quadrata 3 x 3 con zeri e uno.

Il numero è limitato perché una colonna può dare una somma mod 2 uguale a zero solo se assume una delle 4 forme.

0	1	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

Tabella 5.
Le 4 possibili colonne la cui somma Mod2 (bitwise, cioè senza riporti) degli elementi è 0.

Ognuna delle quattro colonne può combinarsi con tutte le colonne del quartetto. Le forme binarie dei numeri fino a 7 richiedono solo tre colonne, quindi possiamo avere fino a 4^3 combinazioni, ovvero un totale di 64 posizioni. Tuttavia, possiamo sottrarre come meno interessanti le posizioni della forma (0,n,n,), sette di esse, e le loro permutazioni (possiamo mettere lo 0 in uno qualsiasi dei tre posti), per un totale di 7 x 3 = 21 posizioni (che sono state trattate a parte). Tale operazione ci porta a 43 combinazioni. Si sottrae poi, in quanto ancora meno interessante, la posizione contenente "solo zeri". Ora siamo a 42 posizioni. Ma osservando le righe, (cioè il numero di monete in ogni pila), vediamo che ogni posizione ha sei permutazioni equivalenti (cioè, numerando le **righe** come 1,2,3, abbiamo le permutazioni 123, 132, 213, 231 , 312, 321, tutte equivalenti per il gioco del Nim). Quindi abbiamo 42/6 posizioni intrinsecamente diverse, cioè un totale di 7, che coincide con la Tav.1. **Le diverse posizioni sicure che contengono fino a 7 monete sono le sette posizioni etichettate a,b,c,d,e,f, g, più sette posizioni della forma (0, n, n) o equivalenti.**

Allo stesso modo, una tabella costruita empiricamente da Bouton, con un massimo di 15 monete per pila, produce **35 posizioni sicure** e un calcolo lungo le linee che abbiamo seguito sopra fornisce lo stesso numero.

> Fare il calcolo è facile se consideriamo le tabelle per le posizioni, in cui tutte le pile hanno al massimo 2^n -1 monete. Ad esempio, possiamo calcolare le posizioni sicure per un massimo di 15 oggetti (= 2^4 -1) su **tre pile** . Quindi il numero totale di combinazioni è 4^4 = 256. Dobbiamo sottrarre le 15 x 3 (= 45) combinazioni, che includono una pila vuota. Questo ci lascia con 211 combinazioni. Sottraiamo l'unica posizione "tutto zero" e otteniamo 210. Ma ogni posizione (o linea) appare 6 volte (permutando le linee), il che significa che il numero totale di diverse posizioni sicure per n = 16 è 210/6 = 35, come riportato da Bouton nel suo articolo.
> Ancora una volta, dobbiamo aggiungere ad esse le 45 posizioni (3x15) in cui due colonne sono uguali.

1 2 3	2 4 6	3 4 7	4 8 12
1 4 5	2 5 7	3 5 6	4 9 13
1 6 7	2 8 10	3 8 11	4 10 14
1 8 9	2 9 11	3 9 10	4 11 15
1 10 11	2 12 14	3 12 15	
1 12 13	2 13 15	3 13 14	
1 14 15			

5 8 13	6 8 14	7 8 15
5 9 12	6 9 15	7 9 14
5 10 15	6 10 12	7 10 13
5 11 14	6 11 13	7 11 12

Tabella 6

Le 15 posizioni sicure "Nim" per tre pile con al massimo 15 monete (dalla carta di Bouton). Le 15(x3) posizioni del modulo (0, n, n,) e la posizione (0,0,0) non sono incluse.

Quindi, non ci sono disertori, che hanno somma zero per ogni colonna e non sono posizioni sicure.

A quel punto Bouton non aveva altro che una congettura. Doveva trasformarla in un teorema o in un insieme di teoremi.

3.3 Teoremi di Bouton.

Bouton subito dopo aver presentato "una posizione sicura" (Sezione 2) fornisce due teoremi, **il primo,** che *se A lascia una posizione sicura sul tavolo, allora B non può effettuare alcuna rimozione che lasci una posizione sicura sul tavolo* (il che metterebbe A in difficoltà). Questo è quasi ovvio, sulla base del **Lemma 3.1.c,** perché due elementi di una posizione sicura determinano in modo univoco il terzo (assumendo che non ci siano pile vuote).

Quindi, poiché B può muovere monete da una sola pila, è costretto ad abbandonare una posizione sicura, qualunque rimozione faccia, perché due posizioni sicure non possono avere lo stesso numero di monete in due pile diverse.

Il **secondo teorema** è che*, indipendentemente dalle modifiche apportate a B in una colonna di una posizione sicura lasciata da A, A può sempre rimuovere monete da una delle restanti due colonne per creare una posizione sicura.* Che si debba operare (ovvero rimuovere monete da) una delle **due rimanenti pile** è ovvio, da quanto detto sopra. Qui Bouton fa una "dimostrazione limitata", che considera solo tre pile, e, inoltre, presume che la posizione insicura da cui parte A sia stata lasciata da B, che a sua volta è partito da una posizione sicura, lasciata da A. *Entrambi le restrizioni, come vedremo, non sono necessarie….* Ma lui lo fece per primo. Darò una dimostrazione del secondo teorema più generale di quella di Bouton.

Inoltre afferma che le stesse regole si applicano ad un gioco con più di tre pile: " *In questo caso una combinazione sicura è un insieme di numeri tale che, quando scritto nella scala binaria e disposto con le unità nella stessa colonna verticale, la somma di ogni colonna è pari, cioè 0 mod.2.* Sommando colonna per colonna (**che si dice somma "bit per bit", fondamentalmente una somma binaria senza riporti) mod 2 ,** abbiamo 0 0 0 0. **La somma "bit per bit mod2" sarà chiamata di qui in avanti NimSum[.. , .., ...]** e i numeri su cui opera il NimSum saranno contenuti tra parentesi quadre. "Bitwise mod2" o "senza riporti" mi sembrano dei pleonasmi: "somma binaria mod2" esclude i riporti e rimane bit per bit.

> Ricordo che nelle operazioni mod.2 i numeri sono rappresentati dal resto della loro divisione per 2 (cioè o 0 o 1), e i risultati di tutte le operazioni sono rappresentati dai loro resti della divisione per 2. Ad esempio 3(decimale) + 4 (decimale) è rappresentato da 1+0 =1, che è anche il resto della divisione del risultato decimale 7 diviso per 2. Nella NimSum la somma di due numeri, l'unica operazione che ci importa) viene eseguita ponendo i due numeri in forma binaria, per esempio 3 +5= 011+101, ponendoli in colonna e poi sommando le colonne come indicato:
> 011
> 101
> - - -
> 110
>
> Ma, tornando alla forma decimale, abbiamo che 3+5 = 6.

Vale la pena notare che l'operazione NimSum gode delle proprietà **commutativa** e **associativa** e inoltre, come mostrato nella tabella delle addizioni, **NimSum[x,x,]=0,** che può essere dimostrato ponendo prima x =0 e poi ponendo x=1 . Tuttavia, il risultato può essere applicato a due numeri **uguali** qualsiasi indipendentemente dal numero di cifre binarie 0 e 1). Supponiamo per esempio di volere NimSum[13,13], che, in notazione binaria, si scrive

1 1 0 1 +
1 1 0 1

Il risultato (della somma binaria Mod.2 - automaticamente senza riporti) è NimSum [13,13] = **0 0 0 0** o semplicemente zero. D'altra parte, la somma di due numeri diversi non può essere zero ed è positiva (non abbiamo numeri negativi nel nostro sistema.)

L'esempio mostra che se mettiamo in colonna due espressioni binarie uguali, abbiamo sempre in ogni colonna due coppie di 1 o due coppie di 0 e la loro NimSum è sempre 0.

3.4 Modifiche

Nella sua Sezione 5, Bouton considera brevemente il caso di n pile. Le "posizioni sicure" hanno le stesse proprietà per tutti i numeri di pile da 2 in poi, e "la dimostrazione per induzione [*del teorema che il giocatore che per primo imposta una combinazione sicura può farlo ad ogni giocata successiva e vincerà*] è così diretta che sembra superfluo darla". Tante grazie.

Nella Sezione 6, Bouton osserva che il gioco Nim può essere giocato anche in una versione in cui il vincitore è quello che costringe l'altro giocatore a prendere l'ultima moneta (la cosiddetta versione "misère").

Fornisco qui la mia versione della strategia per vincere la versione "Misère", che differisce un po' dall'approccio di Bouton.

Sostanzialmente la strategia cambia dal gioco "normale" a quello "misère" solo alla fine del gioco, quando un giocatore (ad esempio A) raggiunge la posizione **(1, 2, 3)** .

A quel punto **B** può ridurre 123 a sei posizioni: **12; 121; 122; 113; 13 o 23** .

Nel "caso normale", la posizione vincente finale è (0, 1, 1) . In quattro casi è immediato vedere come A possa arrivare alla posizione 011. In due casi A può facilmente raggiungere (0, 2, 2) che sappiamo essere una posizione sicura per il gioco "normale".

Nel gioco "Misère", la posizione finale vincente è (1, 1, 1) o (1, 0, 0) e possiamo vedere come A può arrivare a 111 o (meglio) 001, da una qualsiasi delle sei posizioni date (12; 121; 122; 113; 13 o 23.) Il giocatore A può ridurre **12** a 1; da **121** a 111, da **122** a 22, da **113** a 111, da **13** a 1, da **23** a 22.

Nota che **22** costringe B a 12, o 02, e in entrambi i casi, A può prendere l'ultima moneta (gioco "normale") o costringere B a prendere l'ultima moneta ("misère").

3.5 La "dimostrazione standard"

Come annunciato, non seguirò l'approccio di Bouton per dimostrare la strategia vincente, perché, una volta introdotto il concetto di NimSum con le sue proprietà immediate, la dimostrazione è semplice e più generale di quella di Bouton.

Mentre Bouton parte da una "posizione sicura" di un "gioco a 3 pile", che appare senza spiegazioni, la spiegazione standard (che compare ad esempio in Wikipedia) giustamente non menziona affatto nessuna "posizione sicura" e non è basata sul fatto che abbiamo a che fare con tre pile. La dimostrazione standard parte da una posizione arbitraria, senza preoccuparsi di come ci siamo arrivati, e calcola il NimSum **S** di quella posizione. Poi si dimostra che, se S = 0, ogni variazione in una singola pila porta ad una posizione in cui la somma S non è nulla, mentre se S >0 (non può essere minore di zero) si può ridurre a S=0 operando su un'unica pila.

La prova è semplice. Per essere concreti, supponiamo di avere tre pile, il cui **numero di monete** in una posizione iniziale è x1, x2, x3 . Dopo aver scritto i numeri delle monete in forma binaria, la loro somma colonna per colonna (mod2), che abbiamo chiamato NimSum[….], dà un numero binario, S. In altre parole, **S = NimSum [x1, x2 , x3]** .

Che non ci siano dubbi. Il lettore non dovrebbe stupirsi se in forma binaria **NimSum[101, 110] =11** , che in notazione decimale diventa **5 + 6 =3.**

Dopo che il giocatore che si trova di fronte a una situazione **con qualsiasi S** esegue la sua rimozione, la nuova posizione è T = [y1, y2, y3], con nuovi valori per il numero di monete nelle pile. In verità le regole concedono di agire solo su una pila (che possiamo sempre permutare al terzo posto), la quale cambia il suo valore x3 in un nuovo y3 e y3 < x3 (in forma decimale o binaria) perché le monete possono essere solo rimosse. In tutte le altre pile i numeri sono invariati (x1 = y1, x2=y2).

Abbiamo: T = NimSum[0 ,T], ma le regole del NimSum ci dicono che NimSum[x, x]=0, o, nel nostro caso, NimSum[S,S]=0. Quindi possiamo sostituire lo 0 con NimSum[S,S].

Pertanto T = NimSum[S,S,T], e, per la proprietà associativa, T= NimSum[S, NimSum[S,T]], dove
NimSum[S,T] = NmSum[NimSum[x1, x2, x3] + NimSum[y1,y2,y3]].

Possiamo riorganizzare T come

T = NimSum[S, NimSum [x1, y1], NimSum[x2,y2], NimSum[x3,y3]].

Ma, grazie al fatto che x1=y1 e x2=y2, finalmente abbiamo

T = NimSum[S, NimSum[x3,y3]] (l'unica somma che differisce da 0).

Ora abbiamo due casi:

I) La posizione iniziale era S=0, il che significa che dopo una rimozione la posizione risultante non può essere T=0,

II) La posizione di partenza era S>0, il che significa che la posizione finale può diventare (con un'opportuna rimozione) T=0.

> L'intero teorema garantisce che se un giocatore (A) imposta una posizione con S = 0, l'avversario (B), a causa di (I), non può trasformare la posizione in un'altra posizione con T=0. Il giocatore A, invece, grazie a (II), può sempre passare da una posizione T>0, creata da B, ad una posizione con S'=0, e **meno monete**. Il processo continuerà (T non sicuro, S' sicuro; T' non sicuro, S'' sicuro... con **sempre meno monete**, finché non ci saranno più monete, e A avrà vinto, perché costruire la posizione (0,0,0), con $S^{(2k)}$ =0 significa, "***prendere l'ultima moneta***", o le ultime monete. Abbiamo scritto S^{2k}, perché ci si arriva con un numero pari di mosse. Dunque, partendo da una posizione sicura e giocando bene, il secondo

giocatore arriva alla posizione sicura per eccellenza (0,0,0). Come abbiamo mostrato , la somma mod.2 e tutte gli altri approcci, sono solo metodi più o meno sofisticati per caratterizzare le posizione sicure e indicarci come ci si arriva. *Questo commento è pressoché ovvio, ma ho pensato che fosse meglio scriverlo esplicitamente, perché ho notato che la sua frequente omissione in molte spiegazioni della strategia del gioco lascia molti giocatori con una ricetta in mano, senza capire come mai partendo da una posizione sicura, il primo giocatore, pur giocando correttamente, debba inevitabilmente perdere.*

Mentre (I) è immediato, (II) richiede una certa attenzione. Vediamolo nel dettaglio.

Se S ≠0, esso, scritto come un unico numero binario, avrà un 1 più a sinistra in posizione D (da destra). Il fatto che ci sia un 1 nella rappresentazione binaria di S esprime il fatto che la S della posizione non è uguale a 0. Dobbiamo quindi cercare la pila xK che ha un numero di monete con un numero 1 in quella posizione D , sia xK(D), in notazione binaria. Non è necessario che sia il bit più a sinistra di xK. Deve esserci almeno una di queste pile, altrimenti il bit S(D), la somma delle cifre binarie nella colonna D, sarebbe zero.

Quindi mettiamo **yK= NimSum[S, xK],** che viene interpretato come un numero binario di monete.

La NimSum del bit xK(D) con S(D) sarà 0, trattandosi della NimSum[1,1]. Il primo 1 proviene da S(D), il secondo da xK(D)

Affermiamo che yK < xK (numero di monete), cioè la pila di K è diminuita. Infatti, tutti i bit a sinistra di D rimangono invariati rimuovendo da xK a yK, mentre il bit D, sommandolo a 1, diminuirà da 1 a 0, diminuendo così il valore di yK di -2^D.

Le modifiche che si verificano a destra di D ammonteranno al massimo a + 2^D-1. Si può considerare, ad esempio, la differenza binaria di 1000-0001, (cioè 8-1), che produce 7 (111).

Può essere utile ricordare che la formulazione binaria di un numero indica solo quali potenze di 2 compaiono nella somma che riproduce il numero. Ad esempio, supponiamo che uno Zero nella posizione D da destra indichi che la potenza 2^D è stata **eliminata**. Supponiamo ora che in tutte le posizioni che seguono D verso destra, fino alla fine del numero, ci sia un 1, il che significa che sono presenti tutte le potenze decrescenti da 2 $^{(D-1)}$ a D^0. Allora il numero è dato dalla somma di tutte le potenze da 0 fino a D-1, cioè dalla somma $1+2+2^2$..+ = 2^D-1, che è inferiore alla potenza 2^D che abbiamo eliminato. Dobbiamo quindi concludere che in ogni caso il numero diminuisce. Anche se esistono in xK potenze superiori (non coinvolte), il numero con 2^D mancante è inferiore al numero in cui appare 2^D.

I bit a destra di D possono essere disposti in modo da creare una situazione S=0 (quelli con D maggiori evidentemente non importano)

In altre parole, il giocatore può **rimuovere xK –yK monete** dalla pila K (poiché xK- (xK-yK) = yK). Il risultato è che la nuova T sarà uguale a zero:

T = NimSum[S, xK, yK] =

NimSum [(S, xK), NimSum [S, xK]] = 0 , cdd. (I due addendi sono eguali.)

Ciò significa che con una singola rimozione, si può portare il gioco da qualsiasi posizione insicura a una posizione sicura.

Un esempio chiarirà (spero) la situazione e allo stesso tempo mostrerà cosa succede se ci sono più pile la cui rappresentazione binaria ha un 1 dove si trova il bit più alto di S (cioè nella posizione che abbiamo chiamato D). Non ho visto questo caso particolare trattato altrove, ma non è impossibile trovarlo, almeno come posizione iniziale. Supponiamo di avere le tre pile **(6, 3, 7), cioè (110, 011, 111).** Il caso – se entrambi i giocatori giocano bene – è possibile solo come posizione iniziale, che supponiamo scelta casualmente, mentre è una posizione impossibile nel corso di una partita corretta *(Perché? Suggerimento: è impossibile ottenere (6,3,7) da una posizione sicura con più monete)* . Il NimSum delle tre pile è 010. Come si può vedere, il primo bit a sinistra di S è nel punto D=2, e tutte e tre le pile hanno un 1 come 2° bit.

1 1 0
0 1 1
1 1 1
S = 0 1 0

Ora, S può diventare 0 se mettiamo 0 al posto di 1 al secondo posto (da destra) in uno qualsiasi dei numeri binari che rappresentano ogni pila. Ciò può essere ottenuto mediante NimSum [S , xK] (in questo caso K è 1, o 2, o 3, cioè significa una qualsiasi delle tre pile). Abbiamo quindi tre possibilità: mettere 0 al centro della riga superiore (e ricordare che **4, 3, 7** = 3, 4, 7); mettendo 0 nella linea di mezzo (**6, 1, 7** = 1,6,7); mettendo 0 nella riga inferiore (**6, 3, 5** = 3, 5, 6). Tutte e tre le posizioni che otteniamo sono sicure.

I risultati sono stati raggiunti mediante ispezione, ma dovremmo dimostrare che lo stesso risultato può essere ottenuto seguendo le regole sopra indicate. Consideriamo yK = NimSum[S, xK].

- Se selezioniamo **K=1** , abbiamo y1 =NimSum[010, 110] = 100, corrispondente a **y1= decimale 4;**
- per **K=2** abbiamo y2=NimSum[010, 011] = 001, corrispondente a **y2=decimale 1** ;
- per **K=3** , abbiamo NimSum y3=[010, 111] = 101, corrispondente a **y3=decimale 5.**

Sottraendo da x1 la differenza x1-y1 = 6-4=2 dalla prima pila otteniamo le tre pile **4, 3, 7;** sottraendo 3-1=2 dalla seconda pila abbiamo **6,1,7;** sottraendo 7-5=2 dalla terza pila, abbiamo **6,3,5** . Come sopra, sono tutte posizioni sicure.

Oltre ad esercitarci sulla strada per raggiungere una posizione sicura da una posizione non sicura, abbiamo scoperto una classe di posizioni, che non possono essere raggiunte nel corso di un gioco corretto. Tuttavia, possono presentarsi come posizione di partenza, soprattutto se la posizione di partenza è selezionata casualmente, per garantire un gioco equo.

Come possiamo vedere, *in nessun momento, la dimostrazione standard dipende dal numero di pile,* che possono essere quante ne vogliamo. Vince sempre un giocatore che atterra su una posizione S=0 (che è sicura), e anche le regole per definire e creare (se necessario) una posizione sicura rimangono le stesse. Naturalmente, entrambi i giocatori devono giocare una partita perfetta.

E allora, qual è la strategia per vincere?

Il gioco del Nim è veramente un gioco curioso. Per farne un gioco onesto, occorre estrarre a sorte i numeri di monete delle pile, e chi è il primo giocatore. A questo punto, però, si sa già chi vincerà, e, **tra due bravi giocatori, è inutile giocare la partita.**

posizione di partenza	primo a giocare	VINCITORE
SICURA	A	B
	B	A
INSICURA	A	A
	B	B

Abbiamo così il risultato, comune a tutti i giochi per i quali si può (matematicamente) dimostrare che esiste una strategia vincente, che **essi, da giochi matematici diventano giochi d'aazzardo,** perché la vittoria è determinata dalle condizioni iniziali, che, per avere un gioco equo, devono essere estratte a sorte. Poiché questa estrazione a sorte determina il risultato del gioco, diventa inutile giocare il gioco. ***Teorema: I giochi matematici distruggono se stessi.***

Conclusione

Alla fine della sua vita relativamente breve (morì all'età di 53 anni) Charles Leonard Bouton dovette soffrire di problemi di salute, problemi familiari, dolore personale.

Considerando l'ambito principale della sua ricerca nei suoi primi anni, penso che il saggio sul gioco di Nim (nome che lo stesso Bouton scelse, probabilmente dalla parola tedesca Nimm, che significa "prendere!" – ma senza specificare i motivi della sua scelta) non sia stato preso troppo sul serio dal suo autore. Piuttosto, deve averlo considerato solo come un divertimento matematico.

Tuttavia, mentre nessun suo contributo fondamentale è menzionato negli annali delle equazioni differenziali, oggi si ritiene che **il suo articolo *"Nim, a game with a complete mathematical theory" (1901) su Annals of Mathematics Vol. 3, n. 1/4, 1901 - 1902* abbia**

posto le basi della teoria dei giochi combinatoria , un intero campo della matematica. Buon per lui!

> A piè di pagina aggiungo che l'interesse per il gioco è stato ravvivato da un famoso film: "L'Année dernière à Marienbad", un film della Rive Gauche italo-francese del 1961, diretto da Alain Resnais, da una sceneggiatura di Alain Robbe-Grillet. Ci sono tre personaggi e uno, chiamato M,sconfigge continuamente il personaggio principale (?), X, e dice: "Posso perdere, ma vinco sempre".
>
> Commenti su Wikipedia [metto i miei commenti tra parentesi quadre]: Il film è famoso per la sua struttura narrativa enigmatica, in cui il tempo e lo spazio sono fluidi, senza alcuna certezza su cosa stia succedendo ai personaggi, cosa stiano ricordando o cosa stiano immaginando. La sua natura onirica ha affascinato [i critici] e sconcertato gli spettatori; molti [i critici] hanno salutato l'opera come un capolavoro d'avanguardia , altri [la maggioranza,] l'hanno trovata incomprensibile. ... *Marienbad* è stato collocato tra *I cinquanta peggiori film di tutti i tempi* , ...

Fig. 1: Neues Schloss Schleißheim

Questo NON è l'hotel a cui si fa riferimento nel film "L'anno scorso a Marienbad" (ma vicino ad esso).

NOTA

(1) Charles L. Bouton (Saint Louis (MO) 1869 – Cambridge (MA)1922) fu professore all'Università di Harward, dove fu ricordato come un insegnante eccezionale, e editore/co-editore di due riviste matematiche . Aveva studiato due anni a Lipsia (con una borsa di studio Parker), dove era stato uno degli ultimi studenti del matematico norvegese Sophus Lie (morto il 18 febbraio 1899). Conseguì il dottorato di ricerca nel 1898, con la tesi *"Invariants of the General Linear Differential Equations and their Relation to the Theory of Continuous Groups,"* Relatore: Sophus Marius Lie.

(https://www.ams.org/journals/bull/1922-28-03/S0002-9904-1922-03508-2/S0002-9904-1922-03508-2.pdf)