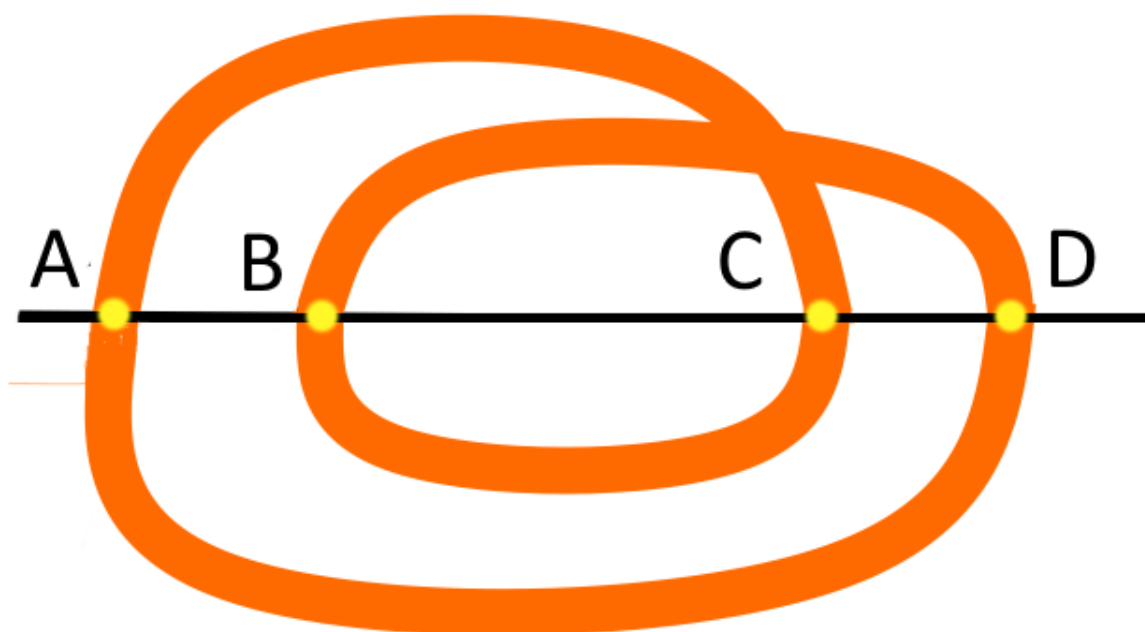




IL BIRAPPORTO

da un altro punto di vista

I. Il BIRAPPORTO come doppio rapporto delle distanze di quattro punti appartenenti a una retta.

Quanto scriverò nella “Postfazione” sarà solo una magra introduzione al soggetto, largamente trattato nei testi di geometria proiettiva, alla base della quale sta il birapporto. Ma nel “gioco” che propongo, la geometria proiettiva. Qui tratto il birapporto solo in base alle sue proprietà grafiche e algebriche, *ma senza fare accenno alla geometria proiettiva*. Ho solo il modesto scopo di dare un aiuto un po’ più che mnemonico a chi ha avuto le mie stesse difficoltà.

Dunque un birapporto non si forma con qualsiasi quattro punti su una retta e facendo rapporti qualsiasi tra le lunghezze dei segmenti che li hanno per estremi. No. I punti possono essere scelti a caso, e questo è vero, ma i rapporti fra segmenti vanno fatti in un certo ordine ben definito e *orientati* in un modo ben definito.

Prendiamo l'esempio dato da Wikipedia. Siano A, B, C, D quattro punti equidistanti posti su una retta nel modo seguente (Fig. 1), e A sia preso come origine.

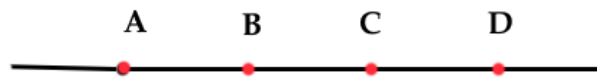


Fig.1

Come pattuito, si suppone che la distanza tra due punti successivi sia 1. Il punto B ha ascissa $b=1$, il punto C ha ascissa $c=2$ e il punto D ha ascissa $d=3$. Fissiamo un'orientazione della retta , tale che $AB=+1$ mentre $BA=-1$. Il birapporto è allora dato da:

$$(1) \quad \frac{\frac{CA}{CB}}{\frac{DA}{DB}} = \frac{CA}{CB} \frac{DB}{DA} = \frac{(-2)/(-1)}{(-3)/(-2)} = \frac{4}{3}$$

Cioè, anzitutto vengono scritti i quattro segmenti che entrano nel birapporto, mettendo sempre per prima la lettera che vien dopo nell'alfabeto italiano, poi si pone il segno. Ma con che legge si pone il segno? Qui la scelta fatta è favorevole, perché i segmenti, seguendo l'ordine delle lettere scritte, sono tutti negativi, ma non è detto che la scelta sia sempre così facile. D'altra parte, non è l'unica.

Tra l'altro, guardando la definizione (1) , vediamo che effettivamente il "birapporto" è un "doppio rapporto", o rapporto di due rapporti. Questa costruzione non è propriamente intuitiva, e, come vedremo in fine, dovrebbe essere oggetto di meraviglia notare che il nostro occhio in qualche modo sia in grado di distinguere, – così come un orecchio normale ha una particolare sensibilità per gli intervalli musicali.

Mi trovai subito nei guai col birapporto. La formula del rapporto, anzitutto, mi sembrava arbitraria e non facile da ricordarsi. L'arbitrarietà della scelta dei quattro segmenti e della loro posizione a numeratore o denominatore, e, infine la confusione dei segni mi creò sempre un problema coi birapporti. Troppe cose da ricordare *senza alcuna giustificazione a me nota*. Si poteva mettere un po' di ordine in questo concetto base della geometria proiettiva?

Su queste basi poco stabili rimasi per decenni, mentre, nel retro della mia mente, una parte di me cercava di trovare senso in questo strano animale geometrico.

Alla fine credo di esserci arrivato. Quanto sto per esporre è certo noto a generazioni di geometri, ma io me lo sono dovuto trovare da solo, e ho pure notato che una ricerca (affrettata) su vari testi introduttivi non fa parola del metodo da me usato. Ho solo trovato

in alcuni testi di geometria proiettiva del secolo XIX la raccomandazione di ricordare la relazione (ovvia):

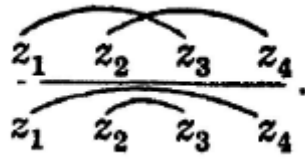


Fig.2

Da: *An introduction to projective geometry*, by C.W. O'Hara (1937)

Vediamo di fare di meglio (e chi lo ha già fatto mi perdoni). Noi partiremo da una retta a piacere ℓ su cui sono segnati quattro punti a piacere.

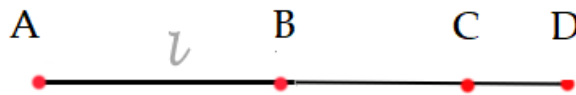


Fig.3

Dunque per prima cosa abbiamo i nostri quattro punti sulla retta ℓ .

Uniamo ora i quattro punti con una linea curva chiusa, percorsa in una sola direzione (senza arrestarsi e tornare indietro) che può cominciare da uno qualsiasi di essi (per incominciare esso sarà per noi A.) La linea curva chiusa deve *attraversare* la retta (o la sua ideale prolungazione) **una sola volta in ciascuno dei quattro punti da noi scelti**.

Se consideriamo la linea ℓ come divisione fra semipiano Nord e semipiano Sud, vediamo che, *partendo da A*, e restando nel semipiano Nord, solo sei curve chiuse intrinsecamente differenti possono partire da A. Anzitutto abbiamo un trio di linee: una diretta dapprima verso B, una diretta dapprima verso C e una diretta dapprima verso D. Una volta creati gli archi AB, AC, AD, gli altri due punti possono essere uniti in due soli modi: avremo cioè ABCD e ABDC; ACBD e ACDB; ADBC e ADCB. Possiamo disegnare le sei varianti, e qui notiamo che la I è la VI capovolta; la II è la IV capovolta, la III è la V capovolta. Quindi, partendo da A verso il semipiano Sud troveremmo le stesse sei curve chiuse, il che è già abbastanza curioso. **Per convenzione, tutte le curve saranno percorse in senso orario**, (con la conseguenza che, ad esempio, ove si avrà a che fare con le distanze fra i punti, le ascisse dell'estremo di partenza saranno sottratte dalle ascisse dell'estremo di arrivo.)

Ma si osservi ancora: è evidente che le curve non cambiano la loro geometria partendo non da A, ma da uno qualunque degli altri tre punti. Quindi, per ognuna delle sei curve, ce ne sono quattro equivalenti. Totale, 24 curve in tutto, che non sono altro che le permutazioni di quattro elementi qualsiasi A,B,C,D.

I quattro elementi qualsiasi possono essere biglie colorate, caramelle, cucchiaini, insomma, qualsiasi cosa. Per noi sono punti ordinati su una retta, ciascuno però con la sua carta d'identità, cioè l'ascissa o distanza dall'origine.

Possiamo quindi pensare ad altri birapporti, sostituendo in vario modo A,B,C,D (ma sempre mantenendo invariati ordine e ascissa di ciascuno) ai punti z_1, z_2, z_3, z_4 di Fig.2. Noi abbiamo incominciato con A,B,C,D. Ma potremmo anche usare la successione B,A,C, D dalla quale, seguendo le regole di Fig.2, ricaveremmo il rapporto $\frac{CB DA}{DB AC}$ che è diverso da $\frac{CA DB}{CB DA}$. Qui, per caso, il rapporto risulta l'inverso di quello di Fig.2, ma la relazione potrebbe anche essere più complicata.

Noi, invece, continuiamo con le nostre sei curve, ordinatamente composte secondo i due primi punti.

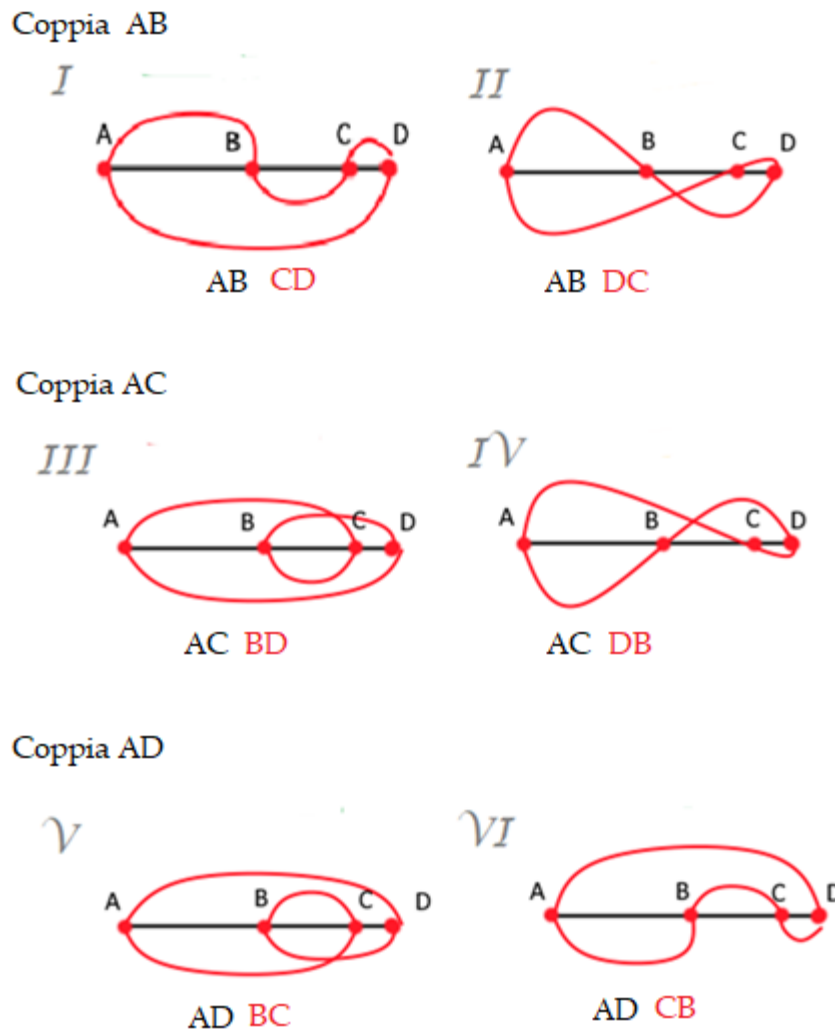


Fig.4

Come possiamo trasformare queste curve in birapporti? Magicamente.

Si prenda la linea $\mathcal{L}$ come linea di frazione. I segmenti di retta risultanti dagli archi di curva che stanno sopra la linea, ciascuno iniziante e terminante in punti sulla linea, sono i fattori del numeratore (orientati in senso orario), e gli archi al di sotto della linea saranno i fattori del denominatore. Come si è detto, la linea si ritiene percorsa in un solo senso. Si veda l'esempio seguente

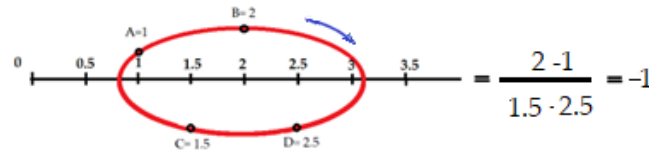


Fig. 5

Se l'ellisse è percorsa in senso orario, il "rapporto" dà come risultato -1. Ma questo è lo stesso risultato se l'ellisse è percorsa in senso antiorario, perché tanto il numeratore quanto il denominatore cambiano segno.

Riordiniamo le nostre curve, notando che, in base a quanto precede, **capovolgendo la curva il numeratore si scambia col denominatore e il valore della curva diviene il suo inverso**.

Otteniamo così:

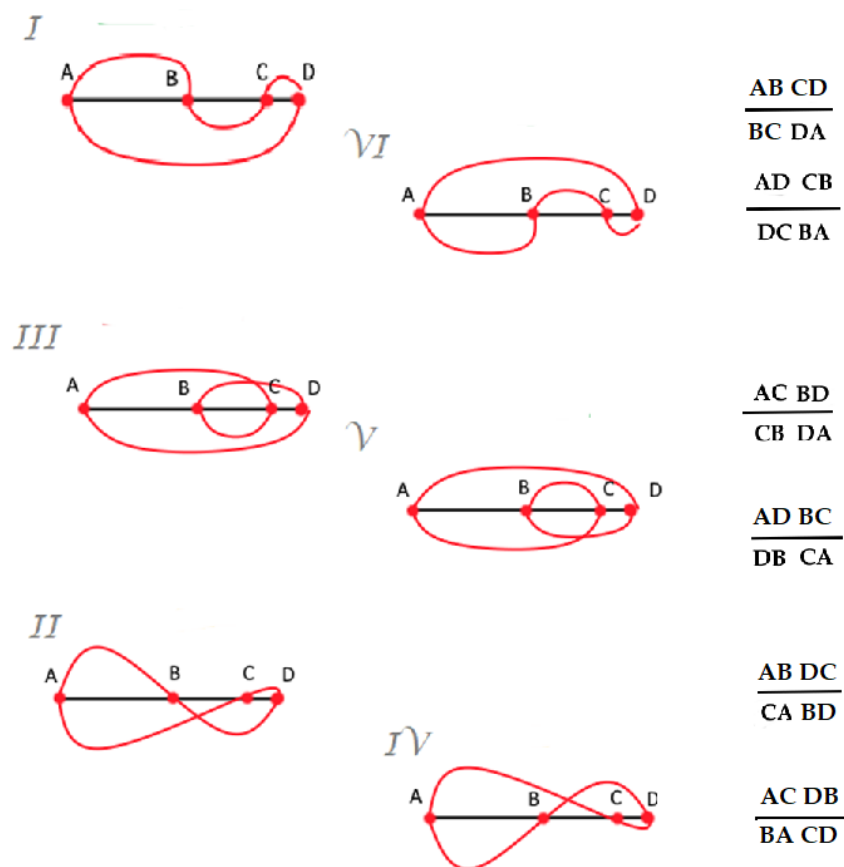


Fig.5

Come si sarà notato, le direzioni degli archi (qual è la prima e quale la seconda lettera) possono scambiarsi purché lo scambio avvenga a coppie, in quanto uno scambio di estremi cambia il segno dell'arco, ma il cambiamento di due segni lascia immutato il risultato.

Ma che cosa si è fatto, precisamente? Il birapporto di quattro punti è un solo numero e noi ne abbiamo trovati sei, anzi 24. Qual è il birapporto vero, da usarsi in geometria proiettiva? La risposta è semplice: seguendo Fig.2 e ponendo z_1, z_2, z_3, z_4 come permutazione base A B C D, il risultato è il birapporto $\frac{CA}{CB} \frac{DB}{DA}$ e, date le opportune simmetrie e sensi di lettura, è la **trascrizione della curva III**, che per noi è $\frac{AC}{CB} \frac{BD}{DA}$. Infatti, i denominatori sono eguali e i fattori a numeratore hanno entrambi l'ordine degli estremi, cioè il segno, opposto.

Naturalmente è lecito chiedersi come mai il birapporto standard dei testi di geometria proiettiva, da me citato, corrisponda regolarmente al III, che costringe a ordinare le quaterne di birapporti in modo, a mio parere, poco razionale. Perché non si dà la precedenza ad (ABCD) invece che a III, che per noi è invece [ACBD]? Penso che, usando le nostre convenzioni, trovare le quaterne equivalenti sarebbe troppo semplice: si tratterebbe di scrivere le quaterne nello stesso ordine partendo da un punto diverso della curva, cioè con una permutazione ciclica. Avremmo allora la seguente tavola (leggendo i punti in senso orario e chiudendo fra parentesi quadre i nostri birapporti, a differenza dei birapporti "classici", che chiuderemo fra parentesi tonde)

TAVOLA I (dalla lettura delle nostre curve in senso orario)

(I) [ABCD], [BCDA], [CDAB], [DABC]	m	(per ora incognito – poi (vedi sotto)	1-k
(VI) [ADCB], [BADC], [CBAD], [DCBA]	1/m	(in quanto la figura è semplicemente capovolta.)	$\frac{1}{1-k}$
(II) [ABDC], [BDCA], [CABD], [DCAB]	n	(o 1/n, per ora incognito)	$\frac{k-1}{k}$
(IV) [ACDB], [BACD], [CDBA], [DBAC]	1/n (o n, vedi sopra)		$\frac{k}{k-1}$
(III) [ACBD], [BDAC], [CBDA], [DACB]	k	(classico nome di questo birapporto)	
(V) [ADBC], [BCAD], [CADB], [DBCA]	1/k		

La stessa tavola, nella notazione tradizionale (le righe non seguono lo stesso ordine) è scritta:

TAVOLA II, dei birapporti “classici”

(tra parentesi tonde, qui precedute da una b minuscola)

$$\begin{aligned}
 b(A, B, C, D) &= b(B, A, D, C) = b(C, D, A, B) = b(D, C, B, A) = k, \\
 b(A, B, D, C) &= b(C, D, B, A) = b(B, A, C, D) = b(D, C, A, B) = \frac{1}{k}, \\
 b(A, C, B, D) &= b(D, B, C, A) = b(C, A, D, B) = b(B, D, A, C) = 1 - k, \\
 b(A, D, B, C) &= b(C, B, D, A) = b(D, A, C, B) = b(B, C, A, D) = \frac{k-1}{k}, \\
 b(A, D, C, B) &= b(B, C, D, A) = b(D, A, B, C) = b(C, B, A, D) = \frac{k}{k-1}, \\
 b(A, C, D, B) &= b(B, D, C, A) = b(C, A, B, D) = b(D, B, A, C) = \frac{1}{1-k}.
 \end{aligned}$$

Di qui, riconoscere come risalire alla frazione che identifica il birapporto è meno divertente che usare la tabella data sopra, nella quale le permutazioni nelle varie righe sono cicliche (come risulta leggendo una stessa curva nello stesso senso), a partire da quella iniziale.

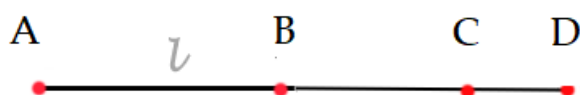
Così, se abbiamo una data permutazione fornita dalla lettura in senso orario di una curva, partendo dal punto C, per esempio [CDBA], noi risaliamo alla prima permutazione, quella che incomincia con A, che è [ACDB] (della quale [CDBA] è una permutazione ciclica). Questa ci dà immediatamente la curva corrispondente, da cui è immediato ricavare la frazione, e direttamente le quattro permutazioni possibili.

Probabilmente, se il birapporto fosse nato come rappresentazione di un gruppo di permutazioni di quattro elementi, si sarebbe preferito un ordinamento come quello che io utilizzerò. Il fatto è che il birapporto nacque da considerazioni geometriche, e le varie permutazioni furono studiate solo in seguito.

II. NUMERI

Per i modesti scopi di questo saggio si tratta in pratica di calcolare i valori di m e n nella nostra tavola, **in funzione di k**, per completare la nostra TAVOLA I.

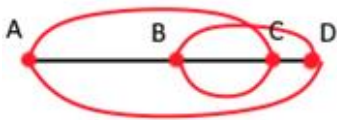
Prendiamo la Fig.3 come punto di partenza:



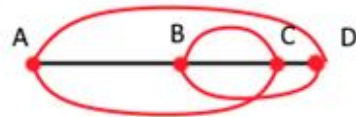
Come una breve riflessione rivela subito, noi abbiamo la libertà di scegliere uno dei punti (qui A) come origine, che chiameremo O, e un secondo punto con ascissa = 1, che chiameremo 1, in modo che la sua ascissa (AB = O1) definisca l'unità di lunghezza del nostro sistema. Restano due punti, a cui daremo nomi di X e Y, con ascisse x e y. Con questo approccio semialgebrico, vediamo che tutte le proprietà generali che troveremo sfruttando la scelta 0, 1, X, Y varranno per qualsiasi gruppo di quattro punti su una retta.

Se noi assegnassimo valore diverso da 1 al segmento AB, dovremmo naturalmente scalare le altre ascisse in modo da renderle coerenti con AB, ma si tratterebbe di complicazioni che, a questo punto, non porterebbero, spero, a nulla di nuovo.

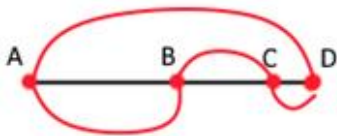
$$A=0, B=1, C=x, D=y$$



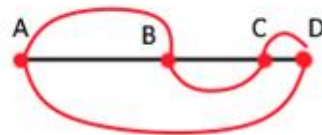
$$\frac{x(y-1)}{-y(1-x)} = \frac{x(y-1)}{y(x-1)} \quad (\text{III})$$



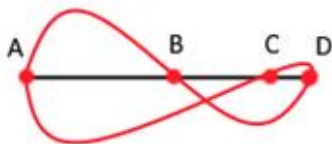
$$\frac{y((x-1))}{x(y-1)} \quad (\text{V})$$



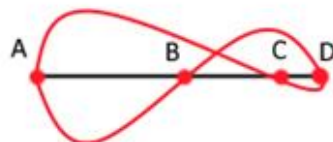
$$\frac{y(1-x)}{(x-y)(-1)} = \frac{y(x-1)}{(x-y)} \quad (\text{VI})$$



$$\frac{(x-y)}{y(x-1)} \quad (\text{I})$$



$$\frac{1(y-x)}{(y-1)(-x)} = -\frac{(y-x)}{x(y-1)} \quad (\text{II})$$



$$\frac{x(y-1)}{(y-x)} \quad (\text{IV})$$

Fig.6

Per riconoscere le relazioni che intercorrono tra le 6 permutazioni, è utile trasformare in formule i rapporti di segmenti. Poiché si tratta di frazioni semplici, possiamo cercare

quelle che hanno lo stesso denominatore. La somma dei numeratori diventa allora la scelta più ovvia. Ed è un altro fatto notevole che i denominatori siano eguali a due a due.

Si sommino per esempio la (I) e la (III). La somma dei numeratori è : $x(y - 1) + x - y = xy - y + x - y = y(x - 1) + x - y = xy - y + x - xy = x - y$. Ma così il numeratore risulta eguale al denominatore, per cui abbiamo (I) +(III) = 1, o meglio (III)= 1- k. Di qui $m = 1-k$. La (VI) ne è l'inverso, cioè (VI) = $1/(1-k)$.

La (VI), cambiando di segno a numeratore e denominatore, assume lo stesso denominatore della (IV). La somma dei numeratori è ora: $y(x - 1) + x(1 - y) = xy - y + x - xy = x - y$. Anche qui il numeratore diviene eguale al denominatore, per cui abbiamo 1-(VI) = (IV). La (IV) ha quindi valore $1 - 1/(1-k) = k/(k-1)$

Infine la (V) ne è l'inverso, cioè = $(k-1)/k = 1-1/k$.

Abbiamo quindi sei valori $k, 1/k, 1-1/k, k/(k-1), 1-k, 1/(1-k)$. Se si effettuano solo le due operazioni "fare l'inverso" e "sottrarre da 1" quante volte si vogliono, il risultato è ancora e sempre uno dei membri del gruppo, il gruppo del birapporto, di cui si occuperanno i cultori di teoria dei gruppi.

Cenno sulla quaterna armonica

Resta ancora da dire che se una quaterna A, B, C, D ha birapporto $k = -1$, essa è detta **quaterna armonica**, dove il birapporto è quello classico (il primo delle Tavole I e III), cioè

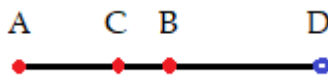
$$\frac{CA}{CB} \frac{DB}{DA} \equiv \frac{AC}{CB} \frac{BD}{DA} = -1$$

Le quattro quaterne della prima riga hanno quindi lo stesso birapporto $k = -1$. Ma, dato che le quaterne delle seconde righe in entrambe le tavole hanno valore $1/k$, ciò significa che anche il loro birapporto vale $1/k = -1$, cioè sono anch'esse quaterne armoniche. *In tutto otto quaterne armoniche.*

Che particolarità ha una quaterna armonica (dalle molte applicazioni, che noi non vedremo)?

La risposta ufficiale è che C e D dividono il segmento AB internamente ed esternamente nello stesso rapporto. Come nel caso delle permutazioni, in cui non è chiaro che cosa si permuta, ma quasi nessun testo a me noto si sofferma a spiegarlo, perché per l'autore è ovvio, anche in questo caso pochi testi si fermano a spiegare che cosa significhi la frase "dividono esternamente".

Notando però che il birapporto $\frac{AC}{CB} \frac{BD}{DA} = -1$ ci dice che $\frac{AC}{CB} = -\frac{DA}{BD}$ e osservando la figura



con ascisse $x_A = 0$, $x_A = 2/3$, $x_A = 1$, $x_A = 2$, vediamo che $AC/CB = 2$, e $BD/AD = 2$ (dove AD ha sostituito $-DA$.) Per essere così, l'ascissa di D deve valere 2. A parte l'uso della formula accompagnata dal diagramma, non vedo molti modi di spiegare ciò che significa "dividere esternamente".

Usando le nostre ascisse $(0,1,x,y)$, che, come si è detto, possono essere applicate a qualsiasi quaterna, abbiamo $\frac{x(y-1)}{y(x-1)} = -1$ cioè $xy - x = -xy + y$ o meglio $2xy = x + y$, che illustra la simmetria della quaterna. Infatti, l'equazione può essere risolta sia in termini di x che in termini di y . Ne risulta:

$$y = \frac{x}{2x-1}; \quad x = \frac{y}{2y-1}$$

Normalmente, i primi tre termini del birapporto sono dati, e l'incognita è y . Nel nostro esempio, quindi, $y \equiv x_D = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}-1} = 2$ come mostra la figura.

Inutile dire che qualsiasi birapporto, date le ascisse di tre punti, permette di trovare l'ascissa del quarto punto, mettendo il valore desiderato al posto di -1.

Ad esempio, il nome di quaterna armonica proviene dal fatto che se ci si diletta a calcolare il quarto armonico dati 0, $\frac{1}{2}$ e 1, si ottiene $\frac{1}{3}$. Per ottenere ciò, si ricordi che ora abbiamo sostituito l'ascissa 1 con l'ascissa $\frac{1}{2}$, e quindi, riaggiustando le ascisse, dovremo anzitutto calcolare il coniugato armonico di $0,1,2$. La nostra formula produce $x = 2/3$, che però va ancora divisa per 2 per risalire alle ascisse originali, producendo infine $\frac{1}{3}$. Il passo successivo è la ricerca del coniugato armonico dei prime tre numeri, che ora sono $(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Il coniugato armonico sarà $(1/3)$ del nostro rapporto derivante da $(0, 1, 3/2)$, cioè $\frac{1}{3} (3/2/(3-1)) = \frac{1}{4}$. Etc. Se si continua a fare tale operazione prendendo ogni volta i primi tre termini (il prossimo è $0, 1/4, 1/3$), e aggiustando le loro ascisse, si ottengono successivamente i termini della cosiddetta serie armonica $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ etc.).

Del resto, la quaterna armonica ha diverse altre applicazioni.

III. POSTFAZIONE

La Geometria proiettiva fu lodata da molti, tra cui il fisico Dirac, come uno dei rami più eleganti della geometria. Si può essere d'accordo. Ma, all'università di Torino, dove io giunsi per sbaglio paracadutato dal Liceo Classico, fu per me un mezzo incubo, anche perché la trattazione, relativamente intuitiva, della geometria analitica, era preceduta da un'introduzione assai più astratta sulla geometria proiettiva.

Questa iniziava con una breve discussione del “**Programma di Erlangen**”, celebre dissertazione di Felix Klein (1872), che affermava che le varie branche della geometria, che si venivano sviluppando dalla fine del XVIII secolo, potevano essere classificate in base alla geometria proiettiva (come concetto unificante) e alla teoria dei gruppi (come strumento, in quanto le varie branche della geometria studiavano ciascuna un diverso gruppo di trasformazioni degli oggetti geometrici che trattavano.)

Per riassumere il programma in maggior dettaglio, è difficile fare meglio di Wikipedia, alla quale rimando: (https://it.wikipedia.org/wiki/Programma_di_Erlangen)

A livello più elementare vale ancora il testo di Courant e Robbins “*Che cosa è la matematica*”, Capo IV edizione 1950.

Tutte queste trasformazioni hanno in comune il fatto che esistono in ogni geometria elementi invarianti ad essa specifici. Ad esempio le trasformazioni della geometria euclidea rispettano angoli e lunghezze degli oggetti che trattano, e quindi si limitano a “trasformazioni” che sono traslazioni e rotazioni. La geometria “affine”, invece, non si cura di angoli e lunghezze, ma si limita a studiare allineamenti di punti, parallelismo, incidenza (anch’essi invarianti in geometria Euclidea) colmando lo spazio tra geometria euclidea e geometria proiettiva.

E la geometria proiettiva?

Il nostro testo metteva alla base della geometria proiettiva il temuto “**birapporto**” (in inglese *Cross-ratio*). Il birapporto, come abbiamo visto, si riferisce alle distanze fra quattro punti scelti a piacere sulla retta, e a un doppio rapporto di queste distanze fra coppie di punti presi in un certo ordine.

Il birapporto fu studiato assai presto, ed è corredato da diversi teoremi di illustri matematici del passato, quali Girard Desargues (1591-1661), forse il fondatore della geometria proiettiva moderna, che introdusse il concetto (ma non il nome) di birapporto, Colin MacLaurin (1698-1746) e Jean-Victor Poncelet (1788-1867). Poncelet utilizzò il nome di “birapport” (1822), subito accolto dagli italiani.

L’importanza del concetto sta nel fatto che esso è invariante per proiezioni, ciò che lo rende un importante elemento base della geometria proiettiva: tale lo considerò per primo Lazare Carnot (1803), normalmente in tutt’altre faccende affaccendato. Ma, sorprendentemente, il birapporto non era ignoto ai Greci.

L’invarianza del birapporto è in ultima analisi quello che permette di scoprire corrispondenze fra fotografie e realtà. Ad esempio, il birapporto non varia se noi, scelta una strada rettilinea su cui sono piantati almeno quattro pali equidistanti, la paragoniamo ad una sua fotografia presa di scorcio. I pali raffigurati sulla fotografia sembrano esser sempre più vicini tra loro quanto più lontani sono dall’osservatore, e quanto più di scorcio è presa la fotografia. Questo avvicinarsi delle immagini dei pali, però, non è arbitrario, ma

segue una legge che l'occhio umano riconosce. La legge è che il birapporto nelle immagini dei quattro pali è eguale al birapporto che si calcolerebbe con le distanze reali.

Questa non ovvia proprietà delle prospettive fu notata dai Greci, e il matematico Pappo di Alessandria la scoprì, o quanto meno ne fece uso, nel suo libro VII della sua Collezione (c.340). Ma come e perché vi siano arrivati i Greci, che non avevano macchine fotografiche e non conoscevano le regole della prospettiva inventate nel Rinascimento italiano (qui citerei Filippo Brunelleschi come il precursore), resta un piccolo mistero.