ONDE DI GRAVITÀ NELL'ACQUA
(ONDE DI SUPERFICIE)

Per chi si vuole divertire con un poco di matematica di medio livello.

(Requisito: terzo corso universitario di matematica e fisica)

Il compito che mi sono proposto è quello di mostrare come la matematica classica arrivi a spiegare la propagazione delle cosiddette "onde di gravità" (non "onde gravitazionali", che sono tutt'altra cosa) nell'acqua. Sarà ancora una spiegazione approssimata, ma non troppo. In compenso, *la matematica richiesta non è del tutto elementare.*

I. Le onde superficiali.

1. Principio fondamentale: Le onde non spostano materia, ma energia. Come vedremo, le particelle d'acqua coinvolte nel moto ondoso (finché è di relativamente piccola ampiezza) si spostano di pochissimo dalla posizione di riposo, mentre le onde appaiono correre a tutta velocità sulla superficie del mare.

2, Una domanda: Come si formano le onde?

Veniamo ora a un secondo punto. Come si formano le onde? Prendiamo il caso di un sasso gettato in uno stagno tranquillo abbastanza largo. Sembra abbastanza logico che ci sia un'onda circolare che si propaga dal punto di impatto. L'onda ha un diametro crescente e, allargandosi, un'altezza sempre minore. Tutto questo lo si può intuire. Ma non ci dovremmo aspettare una sola onda circolare?

Il fenomeno non è per nulla semplice. Se a cadere è una goccia d'acqua, ad esempio si può vedere (al rallentatore: in rete ci sono molte di queste animazioni) che circa metà dell'acqua della goccia crea la prima onda e si confonde col resto dell'acqua, ma dal punto di impatto rimbalza una goccia che è circa la metà della goccia primaria. Ricadendo, forma una seconda onda. Di nuovo, metà dell'acqua provoca una terza goccia, e ciò avviene un certo numero di volte, creando quindi una serie di anche dieci anelli concentrici, di altezza decrescente.

Ovviamente, questo non spiega perché un sasso provochi più di un anello concetrico, visto che il sasso non si spacca. Se non si sono gettati altri sassi, perché alcune altre onde circolari seguono la prima? E perché la distanza tra le creste di queste onde aumenta con la distanza dal punto di impatto del sasso? E c'è una legge che ci dica in che modo questo fenomeno avvenga?

Sorprendentemente, proprio il punto di partenza della teoria delle onde, la loro generazione per un evento impulsivo, è nebuloso. Si comprende meglio la generazione di onde se, invece di un sasso gettato una volta per tutte, abbiamo una sorgente che vibra in qualche modo, e anche se abbiamo per esempio il vento che soffia sulla superficie piana dell'acqua.

Come sempre avviene in Fisica, se non si può spiegare un fenomeno partendo da altri concetti, si invoca un "principio". Principio vuol dire che, semplicemente, lo si accetta e si incomincia di lì.

Un "principio" ragionevole è quello di ***Huygens (1678)-Fresnel (1818),*** applicabile – con qualche cautela - alla generazione di onde di ogni specie. Secondo questo principio, *inizialmente applicato alle onde superficiali dell'acqua,* si ammette che ciascun elemento di una cresta d'onda circolare è sorgente di onde elementari circolari complete. Ne sortirà un inviluppo di diametro crescente e ampiezza decrescente al crescere della distanza dal punto ove avvenne l'evento iniziale. Queste onde elementari interferiscono costruttivamente formando altre onde circolari complete che quindi dovrebbero andare in entrambe le direzioni, come mostrato in figura:

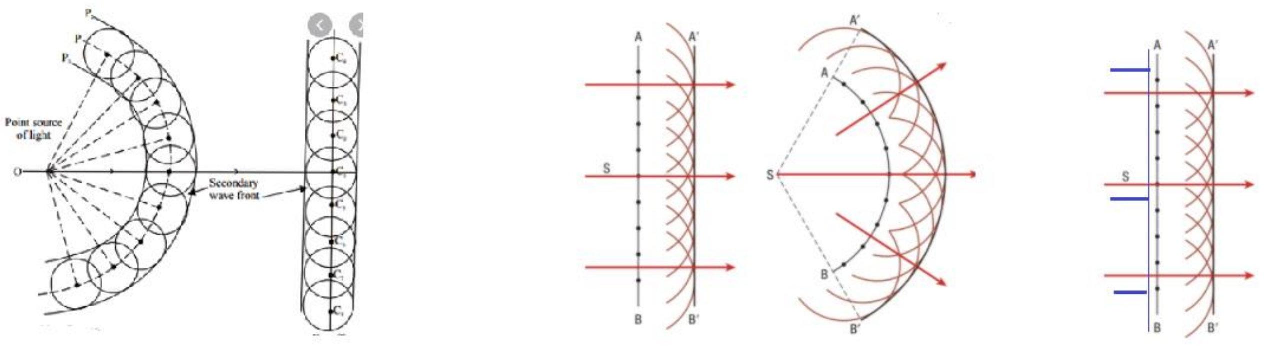


Fig.1

Principio di Huygens

Nelle prime due figure a sinistra si vede un'illustrazione del principio nella forma originale, con onde che si allargano in tutti i sensi da ogni punto delle cresta dell'onda, generando altre onde. Nel terzo e quarto diagramma vediamo il principio di Huygens applicato sopprimendo le onde che si propagano all'indietro (che in effetti non furono mai osservate). Nell'ultimo diagramma a destra si vede che tuttavia ci dovrebbero essere anche onde superstiti, meno intense, che si propagano all'indietro. Ciò proviene dalla correzione di Fresnel, Fig.2

Tuttavia, Huygens era al corrente del fatto che non c'era evidenza di onde che si propagassero all'indietro. Risolse il problema dicendo semplicemente che nel suo modello erano accettate solo le onde che si propagavano in avanti.

Non penso che il principio di Huygens-Fresnel abbia mai trovato un suo accomodamento convincente, se non con aggiunte *ad hoc*, cioè giustificate a posteriori, dal fatto che spiegano risultati sperimentali. Una di queste aggiunte, ad esempio, fu l'aggiunta – da parte di Fresnel - di un "fattore di obliquità" f(θ):

$$f(\theta) = \frac{1 + \cos(\theta)}{2}$$

Questo fattore, ovviamente, proietta l'onda in avanti (asse x positivo), ma rovina (o addirittura distrugge) la semplice ed elegante idea iniziale di Huygens. Inoltre non ha giustificazione fisica, per quanto ne so.

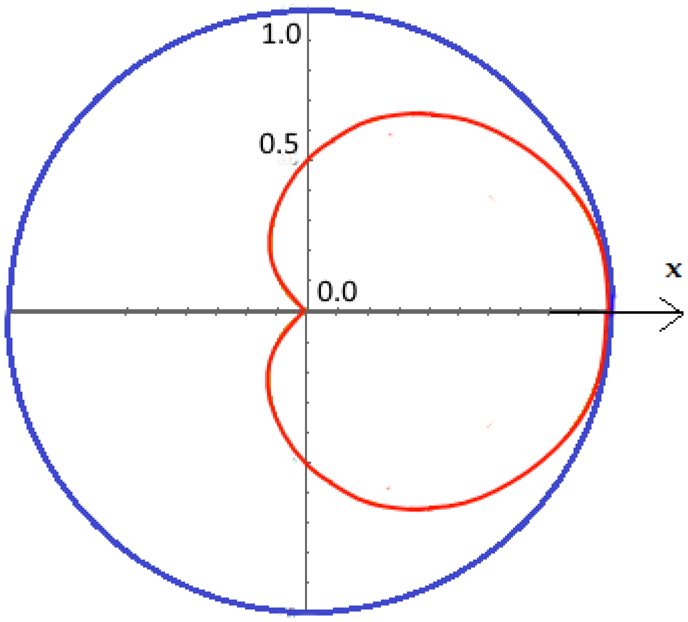


Fig.2

Il diagramma $f(\theta) = \frac{1+\cos(\theta)}{2}$ (in rosso) paragonato al cerchio originale di Huygens.

In realtà, anche con questo sotterfugio, un piccolo fronte d'onda con lunghezza d'onda e ampiezza circa un decimo dell'originale (vedi fig.1) dovrebbe formarsi e procedere all'indietro. Non credo sia mai stato osservato.

Tuttavia, *nel caso delle onde circolari*, almeno per la prima onda, la propagazione in avanti procede su uno specchio di acqua tranquilla, quindi libera da fenomeni di interferenza. Invece, le onde che si propagano all'indietro devono interferire con le onde successive che vengono ancora in avanti. Le piccole (in quanto contengono solo una frazione dell'energia iniziale) onde che si propagano all'indietro diventano ancora più piccole allargandosi. Se poi vi è una vasta distribuzione di lunghezze d'onda, esse formano un fondo disturbato, ma quasi uniforme, che alza (di assai poco) il livello dell'acqua, su cui si propagano le onde successive. Esistono filmati in rete che illustrano questo fenomeno. Questo esempio, che può lasciar capire come la prima onda si possa propagare in avanti formandone altre, mentre le onde che procedono all'indietro eistono, ma non sono visibili, non spiega invece, ad esempio, un flusso *continuo di onde piane*. Qui non c'è molta evidenza di onde che procedano all'indietro.

In conclusione, non conosco teorie o principi generali che spieghino intuitivamente come le onde siano originate, a meno di considerare casi particolari, come sorgenti oscillanti con una determinata frequenza, o instabilità create all'interfaccia fra due fluidi di diversa viscosità scorrenti l'uno sull'altro a diversa velocità (instabilità di **Kelvin (1871) - Helmholtz (1868)**), per esempio vento costante su una superficie marina in calma (quasi) piatta.

3. La matematica in soccorso.

Poiché si parla di onde, possiamo rivedere brevemento il caso più semplice, lo studio di una corda vibrante. Usando l'equazione di Newton (inevitabilmente) e trasformandola senza trucchi né invenzioni ad hoc nella cosiddetta "equazione di d'Alembert" o equazione delle onde, si risolve il problema in modo abbastanza genenrale. Assumo che l'equazione delle corde vibranti (equazione di d'Alembert) sia nota: essa si presenta nella forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Coloro che non ricordano la derivazione, la troveranno, per onde uni e bi-dimensionali, nell'ultima sezione (# 9, pag.29.)

Si tratta di un'equazione del secondo ordine alle derivate parziali, che ai miei tempi veniva insegnata alla fine del corso di Analisi II. Vedremo più avanti (sez.9) il caso di poco più complicato della vibrazione di una membrana rettangolare. La grandezza *y(x,t)*, di cui si voleva conoscere l'evoluzione in funzione del tempo e della distanza era lo spostamento della corda vibrante dalla posizione orizzontale di riposo.

Le equazioni alle derivate parziali in genere danno delle soluzioni assai "generali". Nel caso dell'equazione di d'Alembert, le soluzioni sono date da una coppia di funzioni *arbitrarie*

$$f(x + vt) + g(x - vt)$$

Vi si arriva in vari modi. Il più semplice è quello di introdurre due nuove variabili (che però qui provengono dal cielo – ma possono essere dedotte in modo più razionale, sfruttando le cosiddette "curve caratteristiche " dell'equazione.), che chiameremo ξ= x-vt, e ζ= x+vt.   Abbiamo così:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \zeta}$$

A sua volta sarà

$$(i) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \zeta}$$

Dei termini v interverranno nelle derivate rispetto alla variabile t:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = +v\frac{\partial y}{\partial \xi} - v\frac{\partial y}{\partial \zeta}$$

E, di conseguenza:

$$(ii) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} = v^2\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)$$

Dividendo per v^2 l'ultima equazione e sottraendo membro a membro le equazioni (i) e (ii), si trova l'equazione delle onde ridotta nella forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} = 4\,\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \xi} = 0.$$

Il fattore 4 è irrilevante.

Risolvendo la stessa equazione, ma scritta nella forma $\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) = 0$

si ottiene che $\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)$ è indipendente da ζ, e quindi , essendoci solo due variabili,

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) = \varphi(\xi)$$

Dove φ è una funzione qualsiasi, ma della variabile ξ= x – vt.   Integrando una seconda volta, si ottiene :

$$y = \int \varphi(\xi)\, d\xi = \Phi(\xi) + cost.rispetto\ a\ \xi$$

Risolvendo la stessa equazione, ma nella forma:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right) = 0$$

Ed eseguendo gli stessi passaggi , si ottiene

$$y = \int \varphi(\zeta)\, d\zeta = \Psi(\zeta) + cost.rispetto\ a\ \zeta$$

Integrando rispetto a ξ, la costante è al più una funzione di ζ, mentre, integrando rispetto a ζ, la costante è al più una funzione di ξ. Ne segue che la soluzione generale della y(x,t) è:

$$y(x,t) = y(\xi,\zeta) = \Phi(\xi) + \Psi(\zeta) = \Phi(x - vt) + \Psi(x + vt)$$

> In altre parole, l'unico risultato a cui non ci si può sottrarre è che le due variabili, x e t devono essere legate da una delle due relazion, x + vt e x- vt. In effetti, neppure la matematica dell'equazione delle onde ci aiuta fino in fondo.

L'arbitratrietà delle funzioni che risolvono l'equazione di d'Alembert non deve spaventarci: è quello che vediamo in natura: pizzichiamo per un istante una corda, o la sollecitiamo più a lungo con un archetto di violino: in questi modi provochiamo onde di forma diversa, in cui però vale sempre uno dei dei due vincoli fra le due variabili x e t: o è (x + c t) o è (x – c t), o entrambe, a seconda di come e dove la corda è sollecitata.

4. La propagazione delle onde sull'acqua.

Come sappiamo, se mettiamo sull'acqua un oggetto che galleggi, per esempio un turacciolo di sughero, vediamo che, al passare delle onde provocate dalla caduta del sasso, il turacciolo va su e giù, si muove di poco, avanti e indietro nella direzione dell'onda, ma, quando l'onda è passata, in pratica è tornato al punto di partenza. Non diversamente, il passaggio di un'onda in una corda vibrante non sposta di molto le particelle della corda dal sito in cui si trovano: poco in senso trasversale, e pochissimo in senso longitudinale.

Che le onde procedano senza spostare acqua, nel caso di onde di ampiezza relativamente piccola e in assenza di vento, dunque, è un fatto sperimentale che più rigorose osservazioni di laboratorio confermarono. Forse, come si usava ai miei tempi, qualche ragazzino si dilettò a galleggiare in mare stando seduto in una camera d'aria di un camion, e notò che sostanzialmente le onde non lo trascinavano. Però si accorgeva di avanzare quando era al culmine dell'onda e di essere riportato indietro quando era nel cavo dell'onda.

Lavorando su una bella animazione Surface Wave | CK-12 Foundation ho costruito due serie di "fotogrammi", che descrivono il moto di un galleggiante, che potrebbe essere una particella d'acqua in superficie. Ne ho ricavato due diagrammi, descritti di seguito (Fig.3).

Come si vede, su acqua profonda la particella d'acqua (o un galleggiante – rosso - di eguale densità) che sta sulla superficie dell'onda, resta sempre sulla superficie dell'onda, e compie un'orbita circolare sul piano verticale, col centro sul piano ideale dell'acqua tranquilla, e diametro eguale alla differenza di altezza tra il massimo (la cresta) e il minimo (il cavo) dell’onda. Come vedremo (pag.23 e 24), l’ ampiezza dell’onda in superficie e il raggio dell’orbita sono effettivamente eguali.

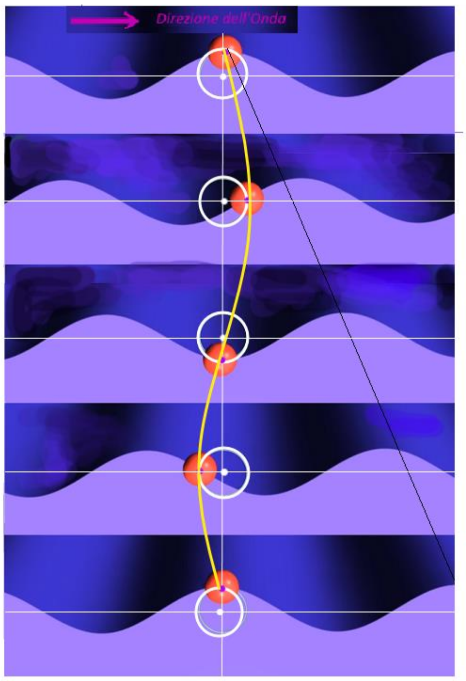


Fig.3a

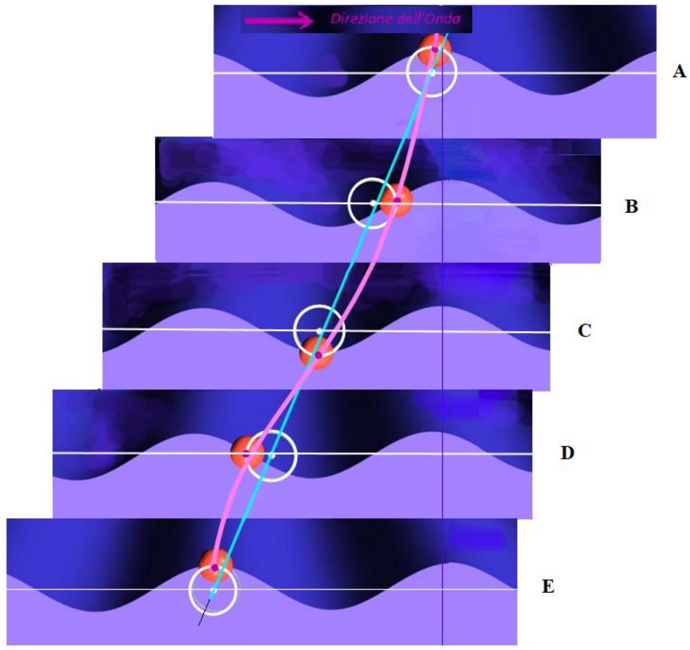


Fig 3b

Moto di una particella d’acqua in due sistemi di riferimento, a sinistra il sistema della particella d’acqua in acqua tranquilla, a destra il sistema di riferimento in cui l’onda che avanza è fissa.

L’onda procede da sinistra a destra, e se lo specchio d’acqua fosse tranquillo, la sua superficie sarebbe all’altezza della linea bianca orizzontale. Noi dobbiamo seguire il moto del galleggiante rosso in superficie. Il (minuscolo) punto color porpora dovrebbe essere il suo baricentro. Si noterà che esso è sempre sulla superficie dell’onda.

Ho scelto due sistemi di riferimento: il primo, a sinistra, in cui il centro dell’orbita (circolare) della particella è fisso; il secondo, in cui è fissa la cresta dell’onda

Si vede quindi che, mentre l’orbita è fissa nello spazio (a parte mie imprecisioni di disegno), con il centro sulla linea orizzontale dell’acqua tranquilla, il baricentro porpora del galleggiante la percorre in senso orario, con velocità che al culmine dell’onda (Fotogrammi D-E o A-B) è diretta in avanti, e nel cavo dell’onda è diretta all’indietro.

Ad esempio, coll’avanzare dell’onda da D a E, *il baricentro del galleggiante non può far altro che salire ed avanzare, perché sotto di lui e dietro di lui ci sarà acqua incompressibile, che non gli permetterà altri movimenti.*

Teniamo intanto presente che la gravità, se possibile, fa scendere il baricentro.

Quindi, tra B e C il punto giallo avanzerà ancora, ma non potrà andare in avanti, perché l'acqua incompressibile avrà occupato il posto che lui occuperebbe, aiutata dalla gravità che richiama il baricentro in basso. Quindi esso scenderà all'indietro tra Ce D.

Con questo non si sarebbe spiegato come le onde procedono, ma solo come si muovono le particelle d'acqua quando le onde procedono. Per spiegare questo secondo fatto, dovrebbe bastare, nella mente dei fisici matematici, il concetto che se si crea un disturbo nell'acqua, l'onda si crea perché l'acqua è incompressibile: se si crea un cavo d'onda, l'acqua che era lì, da qualche parte deve andare. Con qualche aggiunta matematica abbiamo visto che si può dimostrare che le particelle d'acqua superficiali sono soggette all'equazione delle onde, il cui integrale generale è dato da $f(x+ ct) + g (x-ct)$, che in una dimensione rappresenta due funzioni che si propagano in direzione opposta con velocità c.

Inoltre, prima che le onde arrivino, le particelle d'acqua sono in quiete e non hanno energia cinetica. Invece, al passare dell'onda, le particelle entrano in moto sulla loro orbita ed acquistano energia cinetica, pur senza che l'orbita si sposti. Abbiamo quindi un'ulteriore conferma di quanto si è detto, che le onde sono un modo di trasferire energia, non materia.

Dalla seconda figura, si vede che nel sistema di riferimento in cui l'onda, che procederebbe a velocità v_f, è tenuta fissa, quando il baricentro del galleggiante coincide con la cresta dell'onda, esso arretra rispetto all'onda con velocità $(- v_f + v)$, mentre nel cavo dell'onda, ruotando in senso orario, esso arretra con velocità $-(v_f +v)$. In quanto a v, velocità , che supporremo uniforme, del galleggiante nella sua orbita circolare, essa è data da $v = \frac{2\pi r}{T}$, dove T è il periodo di rotazione sull'orbita e r è il raggio dell'orbita in cui supporremo che 2r sia eguale alla differenza di altezza tra cresta e cavo dell'onda. Da questa osservazione congiunta al fatto che tra cresta e cavo dell'onda esiste una differenza di potenziale gravitazionale (=2mgr), si può ricavare in modo poco rigoroso la cosiddetta velocità di fase dell'onda che passa. Chi è interessato ad una "derivazione" non rigorosa, può tentare l'esercizio, o, in caso di disperazione, vedere il mio post "scia delle navi in acqua profonda". https://dainoequinoziale.it/sassolini/2021/01/13/scienavi.html.

Ma qui saremo più rigorosi.

5. La propagazione delle onde.

Come si è detto, se mettiamo sull'acqua un oggetto che galleggi, per esempio un turacciolo di sughero, vediamo che, al passare delle onde provocate dalla caduta del sasso, il turacciolo va su e giù, si muove di poco, avanti e indietro nella direzione dell'onda, ma, quando l'onda è passata, in pratica è tornato al punto di partenza. Inoltre , in condizioni di onde di modesta entità, non si muove quasi in senso trasversale alla direzione dell'onda.

Studiamo per prima cosa il caso dell'acqua (fluido incompressibile) in moto stazionario

Come è noto, il moto dei fluidi, compressibili o incompressibili che siano, è dominato delle equazioni di **Navier-Stokes** ***(anche se non se ne è mai sentito parlare, a noi non importerà: ci basti sapere che queste equazioni, la cui soluzione generale non è nota, dominano il moto dei fluidi).***

Esse inevitabilmente provengono dalle equazioni del moto di Newton, le quali ci dicono che m**a** = **F**, dove **F** include tutte le forze esterne immaginabili e m è la massa di una particella d'acqua.

Di qui sorgono dapprima le equazioni di Eulero, in cui il termine inerziale (cioè il primo termine, contenente l'accelerazione) è dato da

$$-\Delta m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\rho \, \Delta\tau \frac{d\mathbf{v}}{dt} .$$

Dove ρ è la densità del fluido (qui acqua, magari salata) e $\Delta\tau$ un elemento di volume. Invece, il termine dinamico, F, deve essere estratto dalle forze dell'idrostatica, che tengono conto del principio di Pascal.

In altre parole, agendo nella direzione x, abbiamo le seguenti forze per elemento di volume:

sulla sup. posteriore	sulla sup. anteriore	**Altre Forze** sull'elemento di volume
$p(x)\Delta y\Delta z$	$-p(x+\Delta x)\Delta y\Delta z$	$F_x\Delta\tau$

da cui, sommando, e dividendo per $\Delta\tau$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + F_x = \left| \begin{array}{l} 0 \textit{ (caso della statica)} \\ -\rho \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} \textit{ (caso della dinamica)} \end{array} \right.$$

E, generalizzando alle altre coordinate, **F** - gradp = …., cioè, *zero* in idrostatica e *ma* in idrodinamica. Nel caso in cui le forze esterne derivino da un potenziale, abbiamo (secondo la convenzione di segno) F = - grad U, da cui:

grad (U+p) = …

Nel caso dell'idrostatica, ne risulta:

U+p = costante

Mentre, nel caso dell'idrodinamica, le nostre equazioni possono essere scritte in forma:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla U + \frac{f_{visc}}{\rho}$$

In cui le f_{visc} , forze di viscosità, che qui appaiono abbastanza innocenti, hanno in realtà la loro temibile espressione. Noi qui non ce ne occuperemo, perché ci limiteremo a trattare il caso dell'"acqua asciutta", come fu battezzata da Von Neumann, non senza qualche ironia, l'acqua in cui si trascurassero gli effetti della viscosità. ***Per la cronaca, come affermato più sopra, non esiste una soluzione generale delle equazioni di Navier- Stokes, anzi, esse sono uno dei sette "Problemi del Millennio", concorso bandito dal Clay Institute (con inizio ufficiale il 24 maggio 2000). A tutt'oggi, marzo 2021, le equazioni restano non risolte.***

Non dobbiamo dimenticare una considerazione, cioè la possibilità di trasformare il termine "accelerazione", tenendo conto non solo della variazione della velocità di **una** particella di acqua al passar del tempo, **in un punto fisso,** ma della variazione della **nostra** particella d'acqua, che col passar del tempo si sposta in un punto a distanza $\Delta\boldsymbol{r}$. In altre parole,

$$\boldsymbol{v}(x+\ v_x\,\Delta t, y+v_y\,\Delta t, z+\ v_z\,\Delta t+\ \Delta t)$$
$$=\boldsymbol{v}(x,y,z,t)+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\,v_x\,\Delta t+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}\,v_y\,\Delta t+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\,v_z\,\Delta t+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\,\Delta t$$

E quindi

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}\rightarrow\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\,v_x+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}\,v_y+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\,v_z=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$$

Per arrivare a comprendere intuitivamente questa complicazione del termine di accelerazione, dobbiamo pensare a una piccola massa di acqua, parte del flusso di liquido in un tubo. Se il tubo è perfettamente regolare e il flusso costante, il problema è già risolto. Ma possiamo immaginare due ragioni di variazione: 1) la velocità del fluido nel tubo può variare nel tempo, per esempio inclinando il tubo; 2) in secondo luogo, il tubo può essere, ad esempio, un tubo di Venturi che presenta una strettoia. Se avessimo considerato un punto fisso nel tubo avremmo visto solo il primo effetto. Ma poiché seguiamo la particella d'acqua, vediamo che essa, oltre ad un possibile aumento di velocità, per esempio perché abbiamo inclinato il tubo, accelererà entrando nella strettoia.

Se la nostra particella d'acqua entra in una strettoia, la velocità aumenta e un nuovo elemento entra nella valutazione dell'accelerazione.

Come è noto, queste due osservazioni ci portano alle due equazioni di Eulero

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\dfrac{1}{\rho_0}\nabla p+\mathbf{g}\\ \nabla\cdot\mathbf{v}=0\end{cases}$$

La seconda equazione altro non è che l'equazione di continuità

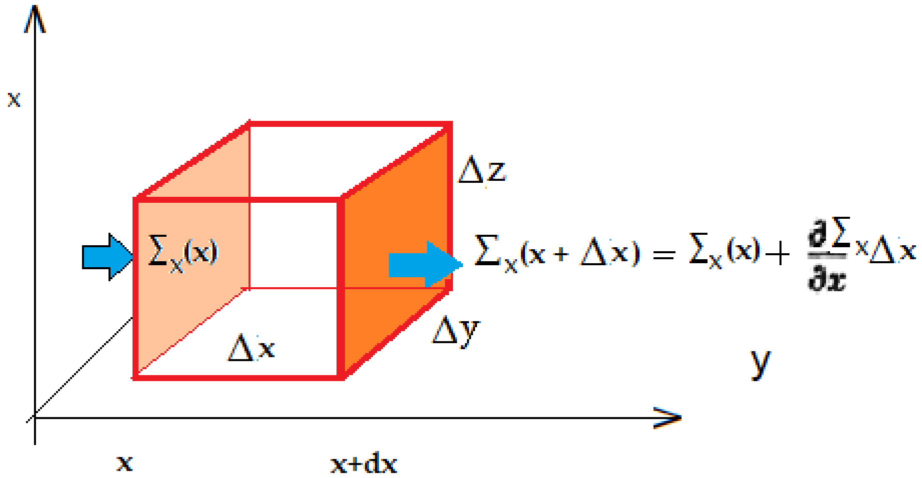
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\ (\rho\ \boldsymbol{v}) = 0.$$

in cui (i) si è presupposta l'assenza di sorgenti e di scarichi nella regione in esame, e, soprattutto, (ii) si è tenuto conto della costanza nel tempo della densità del liquido. La si deriva calcolando il flusso di fluido netto uscente da un volumetto di liquido e ponendolo eguale a zero:

Il flusso del fluido è dato da densità per velocità, cioè:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \rho\boldsymbol{v}$$

In cui tanto **Σ** quanto **v** sono vettori.



Come si vede dalla figura, la differenza di flusso (uscente – entrante), moltiplicato per l'area della faccia del cubo è:

$$(\Sigma_x(\,x + \ \Delta x) - \Sigma_x(\,x\,)\,)\Delta y\ \Delta z) = \frac{\partial\Sigma_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\ \Delta z = \frac{\partial\rho v_x}{\partial x}\Delta V$$

Ripetendo lo stesso calcolo per le coppie di facce opposte, dire che il flusso netto totale uscente dal volumetto ΔV è nullo, equivale a dire che

$$\frac{\partial\rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial\rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial\rho v_x}{\partial x} \equiv div\ (\rho\boldsymbol{v}) \equiv\ \boldsymbol{\nabla}(\rho\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$$

In questo caso, avendo supposto invariabile la densità, essa vien meglio detta *equazione di incompressibilità.*

Si tratta di ora trasformare la prima equazione in modo da poter fare ipotesi che ci permettano di eliminare qualche termine. In particolare si tratta di dimostrare che

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}\times \mathrm{rot}\ \mathbf{v}$$

Non sembra formalmente un gran guadagno, ma lo diventa se si fa l'ulteriore ipotesi che nel fluido, ad esempio, non esistano vortici. Intanto dimostriamone la validità.

l'equazione è vettoriale e corrisponde a tre equazioni, sugli assi **i, j, k.** Basterà verificare la correttezza di una delle componenti, ad esempio la componente x.

Facendo uso dell'espressione

$$\mathbf{v} \times \text{rot}\ \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \end{vmatrix}$$

il risultato per la componente x dell'equazione è:

$$\left(\cancel{v_x \frac{\partial}{\partial x}} + \cancel{v_y \frac{\partial}{\partial y}} + \cancel{v_z \frac{\partial}{\partial z}} \right) v_x = \left(\cancel{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}} + v_y \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial x}} + v_z \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial x}} \right)$$

$$- v_y \left(\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial y}} \right) + v_z \left(\cancel{\frac{\partial v_x}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial x}} \right)$$

E le altre componenti facilmente seguono.

Questo termine, il termine convettivo, complica grandemente le cose, rendendo le equazioni in esame non lineari. La non linearità, ad esempio, ci vieta di considerare che la combinazione lineare di due soluzioni dell'equazione sia ancora una soluzione dell'equazione. Ne segue che le equazioni dell'idrodinamica, complete, sono assai più complicate di quelle dell'elettromagnetismo. E se aggiungessimo un termine che tenga conto della viscosità, le equazioni di Eulero complete (non dimentichiamo che si tratta di tre equazioni scalari, che ne compongono una vettoriale) diventerebbero le Equazioni di Navier-Stokes, la cui difficoltà, come già detto, sarebbe ancora più elevata.

Riscriviamo ora l'equazione di Eulero completa:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla \mathbf{v}^2 + \mathbf{v} \times \text{rot}\ \mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla \mathrm{U}$$

In cui la forza **F,** qui **g,** è stata fatta derivare da un gradiente secondo l'abituale posizione

g = - grad U. Introduciamo ora la condizione che il moto sia irrotazionale, cioè rot **v** = 0. L'equazione diventa:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla \mathbf{v}^2 - \frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla U$$

Supponendo il moto stazionario, cioè nulla la derivata parziale della velocità rispetto al tempo, e considerando che i tre termini restanti sono gradienti di funzioni, otteniamo subito il teorema di Bernoulli:

$$\mathrm{grad}\left(\rho\frac{v^2}{2} + p + U\right) = 0$$

da cui

$$\rho\frac{v^2}{2} + p + U = \mathrm{const}$$

che è la base dell'idrodinamica elementare ed ha svariate applicazioni, per le quali rinvieremo ai testi appositi.

A questo punto occorre un breve commento sulla pressione. Molti testi semplicemente la fanno sparire dalle equazioni delle onde di superficie senza commenti, altri invece cercano di giustificarne la scomparsa. In realtà , come osserva il Sommerfeld (Appendice al § 12.), il ruolo della pressione nel caso delle onde di gravità è difficile da chiarire: l'acqua è considerata incompressibile (il che sappiamo che non è vero). Ma che ruolo ha la pressione nel moto di un fluido incompressibile, che è un modo di dire che la pressione non lo può influenzare? Il Sommerfeld, che va a fondo delle cose, identifica la pressione con un moltiplicatore di Lagrange, cioè un vincolo del sistema. Tuttavia, quando giunge a parlare delle onde di superficie, afferma che **p è la pressione atmosferica, che può essere trascurata**, tanto più che il fluido è incompressibile, e quindi la possiamo porre eguale a zero. Siamo quindi nel caso di oscillazioni libere sotto la sola azione della gravità. Tuttavia, una pressione abbastanza significativa da produrre fenomeni osservabili, la incontreremo nell'ultima sezione, la numero 9. Noi seguiremo il Sommerfeld in entrambe le situazioni.

Oltre a questa importante semplificazione, come si può facilmente dimostrare, l'ipotesi fatta, che il moto sia irrotazionale, ha importanti conseguenze. Si può dimostrare, sia formalmente (tanto in modo non rigoroso, dalla semplice equazione vettoriale $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0,$ *applicata al vettore simbolico* $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}$) quanto rigorosamente (scrivendo per esteso le derivate), che il rotore di un gradiente è sempre nullo. Quindi l'ipotesi fatta implica che la velocità sia il gradiente di una funzione (scalare), che chiameremo Φ.

La **divergenza di un gradiente** (detta anche laplaciano) di un potenziale scalare, Φ, può essere scritta:

$$\Delta\Phi = \nabla \cdot \nabla\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

E la nostra equazione di continuità , o di incompressibilità, può essere scritta:

$$\text{div grad } \Phi \equiv \mathbf{\Delta\Phi = 0.}$$

Per risolvere questa equazione il Sommerfeld introduce un trucco, che è quasi un gioco di prestigio. Anzitutto, supponiamo di poter studiare il moto in due coordinate spaziali: mettiamoci nel caso di una massa d'acqua la cui superficie è determinata da due coordinate, la x (direzione di propagazione dell'onda) e la y (la profondità, diretta verso il basso). Supponiamo quindi che il moto sia indipendente dalla coordinata zeta. Si tratterebbe dello studio di onde piane in due coordinate (x, y) che hanno un fronte rettilineo. In qualsiasi piano (x',y') dovremmo trovare lo stesso moto indipendentemente da z, anche perché , basandosi sull'incompressibilità dell'acqua (e un poco, come si è già detto, sull'esperienza) , si assume che non esistanto onde trasverse.

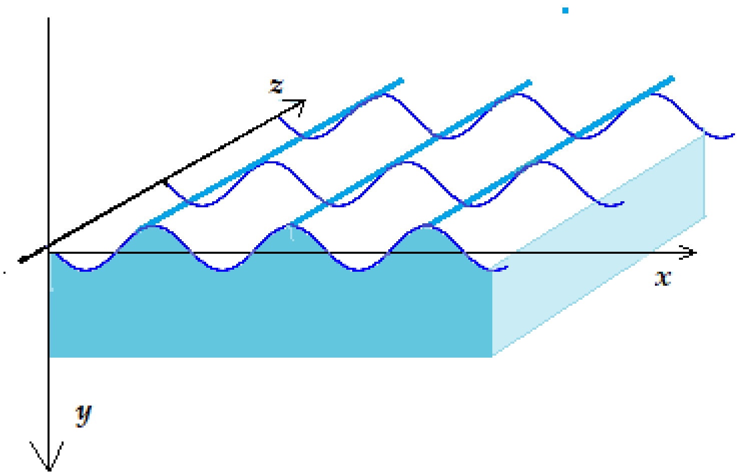


Fig.4
Caso trattato, in cui trascuriamo la coordinata z.

Il moto ondoso è regolato dalla cosiddetta equazione delle onde, che, in una dimensione, è data da:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$

di cui abbiamo parlato nella sezione 3.

Come è noto, le equazioni differenziali alle derivate parziali hanno infinite soluzioni che vanno particolarizzate mediante un accorto uso delle condizioni al contorno. Ma quello che importa è che in questo caso ci sono due soluzioni fondamentali che si propagano nelle due direzioni opposte. In altre parole, la Φ (x, t) può essere scritta nella forma più generale come

$$\Phi(\mathrm{x,t}) = F_1(x+vt) + F_2(x-vt)$$

Si verifica immediatamente che una qualunque delle due funzioni F risolve l'equazione.

Facciamo ora il nostro gioco di prestigio: mettiamo t =y e v^2 = -1, cioè v= ± i.

L'equazione delle onde diventa allora l'equazione

(1) $$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

Ricordando l'arbitrarietà delle F_1 e F_2, se vogliamo che la soluzione generale della (1) sia una funzione reale, si deve poter scrivere la Φ come:

$$\Phi(\mathrm{x,y}) = \frac{1}{2}(f(x+iy) + f^*(x-iy))$$

Cioè le due funzioni F_1 e F_2, arbitrarie, devono essere una la complessa coniugata dell'altra (a parte il fattore arbitrario ½ che fa in modo che metà della loro somma ci dia la parte reale della soluzione,) il che produce una Φ reale. Quindi, la soluzione generale della (2) è la parte reale di una funzione analitica arbitraria *f(x + iy) ≡ f(z).* Esisterà dunque anche una parte immaginaria: in effetti, usando la *f(x+iy) e la f*(x-iy)* abbiamo non una, ma due funzioni che compongono la soluzione complessa della (1) :

$$f(z) = \Phi(x,y) + i\,\Psi\,(x,y)$$

La parte immaginaria Ψ, per quanto "parte immaginaria", è una funzione reale, che diventa immaginaria solo moltiplicandola per i. Essa è detta funzione coniugata di Φ, ed è ottenuta facendo la differenza della f e della f* e dividendo per 2i. Essa è talvolta chiamata "potenziale coniugato" di Φ, ed è anche nota in idrodinamica come "funzione di corrente" (*stream function*), che ha una propria interpretazione geometrica e fisica.

La parte reale e la parte immaginaria Φ e Ψ non sono indipendenti l'una dall'altra. Una funzione analitica deve avere la particolarità di essere derivabile in ogni punto del piano complesso e la derivabilità implica che in qualsiasi direzione ci si avvicini al punto in questione, il limite del rapporto incrementale

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta(\Phi + i\,\Psi)}{\Delta(x+iy)}$$

tenda ad un *unico valore df/dz*. Per vedere che cosa ciò comporti, possiamo procedere nel modo più semplice, prima procedendo per Δz lungo la sola variabile *x (Δz = Δx),* e poi procedendo lungo la sola variabile *y (Δz = iΔy)* ed eguagliando i due risultati. Si potrebbe dimostrare che, procedendo in una direzione intermedia data da una composizione tipo Δz = *h (cosθ + isinθ)* si otterrebbe lo stesso risultato.

Procedendo nel modo semplificato, si trovano due notevoli equazioni, come segue:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x}\ ; \qquad \frac{\partial f}{i\,\partial y} = \frac{\partial \Phi}{i\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -i\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

Eguagliando separatamente le parti reali e le parti immaginarie dei due risultati, si ottiene:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}\ ;\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Cioè le celebrate equazioni di Cauchy-Riemann.

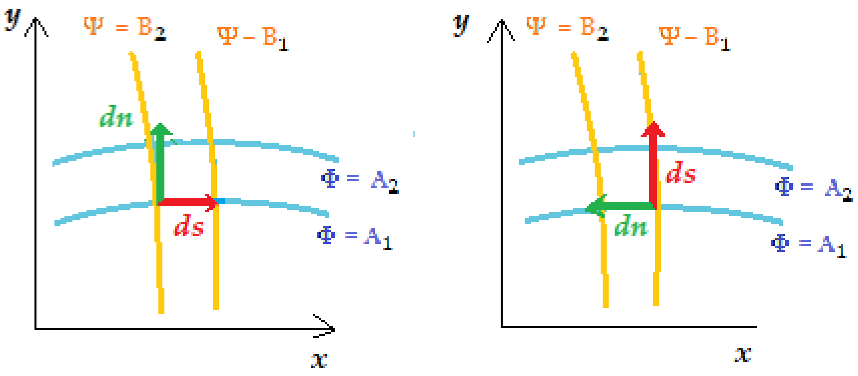


Fig.5

Queste possono essere ridotte a un'unica espressione simbolica *lavorando sui denominatori delle derivate*: se scegliamo due segmenti infinitesimi ds e dn, ortogonali, **orientati in senso antiorario come gli assi ortogonali usuali,** possiamo dapprima scegliere

dx = ds, il che comporta che sia dy = dn, da cui otteniamo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Psi}{\partial n} \rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (prima\ equazione\ di\ Cauchy-Riemann)$$

Mentre se scegliamo ds come direzione di dy, nel qual caso la normale dn diviene dx, ma orientata nella direzione negativa di x, allora abbiamo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Psi}{\partial n} \rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (seconda\ equazione\ di\ Cauchy-Riemann)$$

Tuttavia, queste equazioni ci dicono di più, unitamente al disegno in Fig.5, in cui sono state arbitrariamente scelte delle curve di livello dei potenziali Φ e Ψ che approssimativamente seguono gli assi coordinati. Ciò non è necessario, ma è istruttivo, in quanto nella figura di sinistra vediamo che la derivata di Φ lungo una curva di livello produce

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0$$

che grazie all'equazione simbolica dà parimenti

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$$

Cioè le due famiglie di curve Φ = costante e Ψ = costante sono ortogonali le une alle altre, e la figura di destra (in Fig.5) conferma questo risultato – il quale è ulteriormente confermato dal fatto che, utilizzando le componenti dei gradienti di Φ e Ψ rispettivamente, si ottiene l'equazione:

$$grad\ \Phi\ \cdot grad\ \Psi = \left(\boldsymbol{i}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\left(\boldsymbol{i}\,\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

usando le equazioni di Cauchy-Riemann nell'ultimo passaggio.

Ancora la fig. 5 mostra che , se ds (figura di sinistra) coincide con le linee del potenziale delle velocità, Φ, il vettore v (= -grad Φ) è diretto secondo dn, che è la direzione di Ψ = costante, il che significa che le linee Ψ = costante sono le linee seguite dalla corrente del flusso. In rete si trovano diverse rappresentazioni dei due sistemi di linee, quali ad esempio:

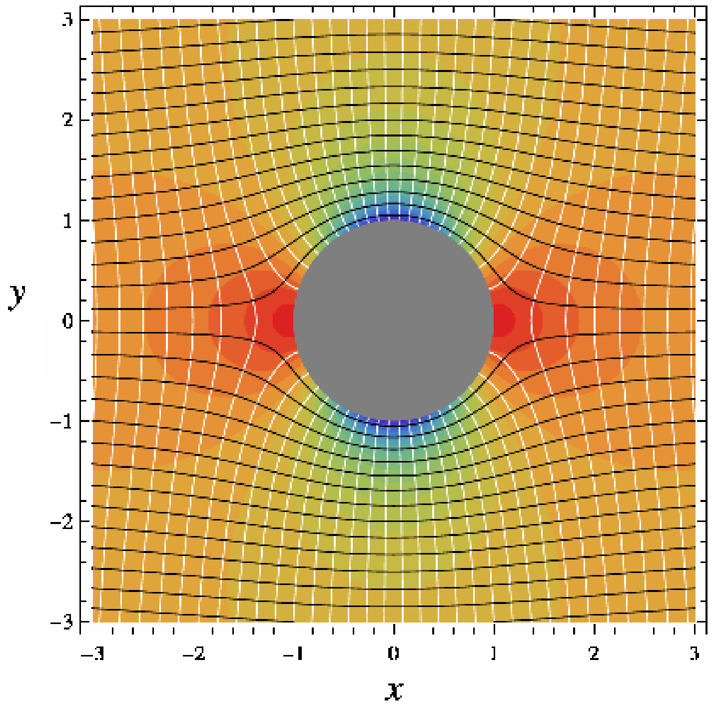


Fig.6

Flusso bidimensionale di liquido incompressibile intorno a un cilindro di raggio unitario (orientato lungo l'asse z, invisibile). Attribuzione: Incredio, CC BY-SA 3.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>, via Wikimedia Commons).

Le linee bianche sono le linee Φ = costante, le linee nere sono le linee   Ψ = costante, che indicano la **corrente del flusso**. Si noti la perpendicolarità dei due sistemi di linee.

Vediamo che cosa abbiamo combinato: con un trucco formale, abbiamo utilizzato l'equazione delle onde in una dimensione, **di cui conoscevamo la soluzione,** in una equazione dipendente unicamente da due variabili spaziali, che ci dà il potenziale delle velocità, Φ, e le linee di flusso Ψ, in due dimensioni. Ma con questo abbiamo formalmente reinterpretato il tempo per trasformarlo in una seconda variabile spaziale. Ora occorre, quindi, ri-introdurre il tempo nel nostro studio.

In acustica, moti ondosi eccetera, si considera come punto di partenza un'eccitazione periodica del fluido che viene studiato. Noi incominceremo con lo studiare un'onda di frequenza $\nu = 1/T$ (dove T è il periodo dell'oscillazione) e λ è la lunghezza d'onda. Seguendo il Sommerfeld, sceglieremo le funzioni arbitrarie, soluzioni dell'equazione di d'Alembert come:

$$F_2(x-ct) = a\cos(kx - \omega t + \alpha)$$

$$F_1(x+ct) = b\cos(kx + \omega t + \beta)$$

Dove a, b sono ampiezze dell'oscillazione, α e β sono costanti di fase (fase al tempo t = 0), $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, il cosiddetto "numero di onde" o "numero d'onda", *wave number*), numero di onde di lunghezza λ in un segmento di lunghezza π). **Si noti che in tal modo l'onda F_2 viaggia nella direzione positiva, e la F_1 nella direzione negativa.**

Come si sottolineerà in seguito, il problema viene *formalmente* semplificato introducendo le variabili complesse., cioè riscrivendo le due onde come:

$$Ae^{i(kx-\omega t)}, dove\ A = ae^{i\alpha}$$

$$Be^{-i(kx+\omega t)}, dove\ B = be^{-i\beta}$$

La parte fisicamente significativa è la **parte reale** di queste due espressioni, che concorda con le espressioni in termini di coseni, in particolare la seconda, che diviene

$$b\cos[-(kx+\omega t+\beta)] = b\cos(kx + \omega t + \beta)$$

dato che la funzione cos è pari.

Ma, con la scelta fatta, in entrambe le espressioni la parte dipendente dal tempo è data da $e^{-i\omega t}$. Sottintendendo il fattore dipendente dal tempo, abbiamo tuttavia un'onda $A\,e^{ikx}$ che viaggia nella direzione x positiva, e un'onda $B\,e^{-ikx}$ che viaggia nella direzione negativa (mentre le due onde così scritte, mancando il fattore temporale, non viaggiano affatto).

Nota riservata agli studenti del primo corso di meccanica quantistica.

In meccanica quantistica, nei più semplici problemi che si incontrano (barriera quadrata, gradino di potenziale, buca di potenziale e pochi altri in una dimensione), si elimina subito il fattore comune exp(-iωt) e si decreta che le onde con fase ikx vengono dette progressive e quelle con fase -ikx retrograde, anche se in un'onda con tali fasi il tempo non compare e quindi non c'è alcun movimento. Il fatto è che nella fase è sempre sottinteso proprio lo exp(-iωt) di cui ci eravamo forse troppo semplicisticamente disfatti. Questo fattore in meccanica quantistica deriva dall'equazione di Schroedinger di una particella libera, indipendente dal tempo. In tal caso abbiamo:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}$$

Qui possiamo tentare una soluzione ψ(x,t) come prodotto T(t) u(x), con che, direbbe un matematico, possiamo "separare le variabili":

$$i\hbar\frac{\partial\,(T(t)u(x))}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\,(T(t)u(x))}{dx^2}$$

Dividendo entrambi i membri per T(t)u(x), e notando che a sinistra possiamo semplificare la u(x) che non dipende dal tempo, e a destra la T(t), che non dipende da x, usando le derivate ordinarie e non quelle parziali, poiché tanto la T(t) quanto la u(x) dipendono da una sola variabile,

$$i\hbar\,\frac{1}{T(t)}\frac{d\,T(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{u(x)}\frac{d^2\;u(x)}{dx^2}$$

A sinistra abbiamo un'espressione che dipende solo dal tempo, a destra una che dipende solo da x. Ma, come si può intuire, un'espressione unicamente di t e un'espressione unicamente di x, variabili entrambe indipendenti, possono essere eguali solo occasionalmente. Perché lo siano sempre, dobbiamo porre i due membri eguali a una stessa costante, normalmente indicata con E (in cui, procedendo nel corso di meccanica quantistica, riconosceremmo l'Energia). Abbiamo così due equazioni:

$$i\hbar\,\frac{1}{T(t)}\frac{d\,T(t)}{dt} = E$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{u(x)}\frac{d^2\;u(x)}{dx^2} = E$$

Le derivate, da parziali sono diventate totali, perché la funzione su cui operano dipende nel primo caso solo da t e nel secondo solo da x.

Delle due equazioni, ci interessa ora solo la prima, che scriveremo come:

$$\frac{d\,T(t)}{dt} = -i\frac{E}{\hbar}\;T(t) = \;-i\omega\,T(t)$$

Avendo posto

$$E = h\nu = \frac{\hbar}{2\pi}\;2\;\pi\omega$$

Abbiamo quindi la facile soluzione T(t) = exp(-iωt), con quel segno " – " che determina che le onde con fase ikx vengano dette progressive e quelle con fase -ikx retrograde.

Il ragionamento è elementare, e la matematica lo è poco meno. Eppure la grande maggioranza degli studenti che mi caddero sotto le grinfie non sembrava essersi mai posta la domanda "Perché exp(ikx) rappresenta un'onda che avanza nella direzione di x positiva". La risposta quindi è: **"perché la dipendenza temporale *exp(-iωt)* è sottintesa."**

6. Velocità di fase delle onde di gravità

Mettiamo ora a frutto un poco di quanto appreso in generale in precedenza.

Sfruttando l'arbitrarietà delle soluzioni dell'equazione di D'Alembert, incominciamo col trattare un'unica onda, e quindi non un gruppo di onde di frequenze diverse. Inoltre consideriamo di trattare un fenomeno puramente periodico della forma $e^{-i\omega t} = \cos\omega\,\mathrm{t} + \mathrm{i}\sin\,\omega\,\mathrm{t}$. Fatti i vari calcoli ci interesserà solo la parte reale del risultato, che potremo sempre ricavare dal medesimo. Usando le variabili complesse, i calcoli diventano assai più semplici. Il potenziale Φ assume ora la forma:

$$\Phi = f(x+iy)e^{-i\omega t} + f(x-iy)e^{-i\omega t} \;= Ae^{i(kx-\omega t)}e^{-ky} + Be^{i(kx-\omega t)}e^{+ky}$$

Ricordo che nelle nostre formule λ è detta lunghezza d'onda; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ è detto numero d'onda/e; ν è detto frequenza; $T = \frac{1}{\nu}$ è il periodo, e $\omega = 2\,\pi\nu$ è la frequenza angolare, da cui $T = \frac{2\pi}{\omega}$. (Le costanti A e B sono le ampiezze delle onde del potenziale Φ, non delle onde del fluido stesse.)

Ma velocità di fase significa che la fase si ripete identica dopo che l'onda ha percorso una distanza λ in un periodo T, cioè $\lambda = cT$, che si trasforma in $c = \lambda/T = \frac{2\pi}{k}/\frac{2\pi}{\omega}$ cioè

$$c = \frac{\omega}{k}$$

A questo risultato si può anche arrivare ponendosi il problema di quale distanza minima e in quanto tempo l'onda la debba percorrere perché le fase si riproduca identica. Deve qundi essere

$$\big(k\;(x+\Delta x) - \;\omega(t+\Delta t)\big) = kx + k\Delta x - \omega t - \;\omega\Delta t = (\;kx - \omega t)$$

Da cui: $k\Delta x - \omega\Delta t = 0$, e $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = c$, che è la relazione cercata.

Ricordo inoltre che la x è la coordinata del piano (x,z) dell'acqua tranquilla in cui l'onda avanza, mentre la y è la profondità calcolata in senso positivo dal piano dell'acqua tranquilla verso il basso. La coordinata z, l'altra coordinata sul piano dell'acqua tranquilla, sarà qui trascurata, come già annunciato.

Se la profondità è "infinita", l'esponenziale e^{+ky} va all'infinito, il che è fisicamente inaccettabile, per cui dobbiamo porrre B= 0. *Quindi il problema del moto dell'onda nell'acqua profonda viene largamente semplificato.*

Ma noi cerchiamo una soluzione generale, valida per ogni profondità. Si vede subito che si può scrivere

$$\Phi = e^{i(kx-\omega t)}\left[Ae^{-ky} + Be^{+ky}\right]$$

Ponendo che la *profondità massima sia h*, la componente della velocità **perpendicolare al fondo**, v_y, deve ivi essere eguale a zero. Usando la definizione v = - grad Φ, abbiamo che

$$v_y(h) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_h = 0 \;\; \rightarrow -Ae^{-kh} + Be^{+kh} = 0 \rightarrow Ae^{-kh} = Be^{+kh}$$

che viene semplificata eguagliando entrambi i termini dell'ultima equazione a destra a una costante, che chiameremo (1/2) C, da cui:

$$A = \frac{1}{2}\,Ce^{+kh}, \qquad B = \frac{1}{2}\,Ce^{-kh}$$

E, sostituendo nel potenziale Φ

(1) $$\Phi = e^{i(kx-\omega t)}\,\frac{1}{2}\,C\left[e^{+k(h-y)} + e^{-k(h-y)}\right] = e^{i(kx-\omega t)}\,C\,Cosh\,[k(h-y)]$$

Ma le equazioni dinamiche, che derivano dalla **F** = m**a**, (pag. 13) ovvero

$$\text{-grad } U = \varrho\,(\text{-grad } \frac{\partial\Phi}{\partial t}),$$

ove U = $-\rho g y$, e , per l'incompressibilità assunta dell'acqua, ρ = costante, producono:

(2) $$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -g\eta$$

Dove η è la nuova y, la superficie deformata dall'onda, o profilo dell'onda, misurata dal piano dell'acqua tranquilla, che supporremo progressiva, cioè della forma

$$\eta = De^{i(kx-\omega t)}$$

Nel nostro caso, da questa prima equazione, sostituendo Φ nell'equazione (2) in questa pagina e dividendo per $e^{i(kx-\omega t)}$ otteniamo:

$$-i\,\omega\,C\;Cosh\,[k(h-y)] = -gD$$

A sua volta, la velocità con cui si alza e abbassa la superficie η, è data da:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Cioè:

$$- i \, \omega \, D = \mathrm{C\,k} \; Sinh \, [k(h - y)]$$

Ponendo y = 0 (superficie) in entrambi i membri otteniamo tre termini legati da tre equazioni:

$$\frac{C}{D} = \frac{g}{i \, \omega \; Cosh \, (kh)} = \frac{-i \, \omega}{k \; Sinh \, (kh)}$$

Il secondo e il terzo termine, eguagliati, ci danno la cosiddettta "**relazione di dispersione ω(k)**":

$$\frac{\omega^2}{gk} = Tanh \, (kh)$$

Questa equazione vale per tutte le profondità. Se h → ∞ , caso dell'acqua profonda, abbiamo Tanh(x) → 1 , mentre se h tende a zero abbiamo Tanh(kh) → *kh,* come si vede dal diagramma della funzione:

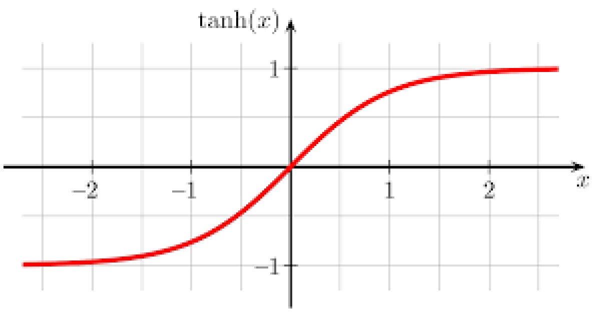


Fig.7

Diagramma di Tanh(x)

Per cui, ricordando che la velocità di fase è data da V = ω/k, e moltiplicando per 1/k l'equazione per $\frac{\omega^2}{gk}$, otteniamo l'importante formula della velocità di fase :

$$V^2 = \frac{g}{k} Tanh(kh)$$

Con i limiti indicati:

$$V^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gh \quad (\text{ acqua poco profonda})$$

$$V^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} = \frac{g\lambda}{2\pi} \quad \text{(acqua profonda)}$$

Estratte le radici si mantengono solo i valori positivi, perché sappiamo che l'onda si propaga nella direzione x positiva. Si noti che in acqua poco profonda, la velocità non dipende dalla lunghezza d'onda e quindi il mezzo è detto "non dispersivo. "

Questo ci dice *qualcosa* sulla formazione dei frangenti che si verificano vicino a riva, cioè in acqua di profondità decrescente. La velocità della cresta dell'onda, anche senza tenenr conto del vento, è maggiore che nel cavo, perché $V^2 = gh$ e h(cresta) > h(cavo) e quindi la velocità della cresta è maggiore.

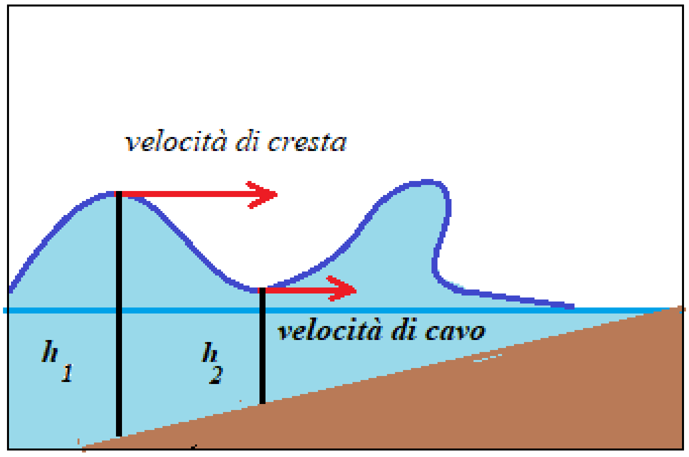


Fig.8

Formazione dei frangenti: la cresta dell'onda, corrispondendo a una maggiore profondità, è più veloce della velocità del cavo dell'onda, e produce il frangente**, tenendo conto del fatto che a questo punto ancxhe il vento ha il suo effetto.**

7. Orbite delle particelle d'acqua a causa delle onde di gravità.

Ma quale traiettoria seguiranno le particelle d'acqua investite dall'onda?

A questo scopo introduciamo le coordinate x, y della particella in acqua tranquilla e x', y', come coordinate della stessa particella perturbata dall'onda. Lo spostamento dalla posizione di riposo sarà individuato dalle due coordinate $X = x' - x$ e $Y = y' - y$.

La velocità sarà data dal gradiente (cambiato di segno) di

$$\Phi = e^{i(kx-\omega t)}\, C\, Cosh\, [k(h-y)]$$

Cioè:

$$v_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -ike^{i(kx-\omega t)}\, C\, Cosh\, [k(h-y)]$$

$$v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = ke^{i(kx-\omega t)}\, C\, Sinh\, [k(h-y)]$$

Integrando rispetto al tempo (cioè dividendo per -iω) otteniamo:

$$X = \frac{k}{\omega} e^{i(kx-\omega t)}\, C\, Cosh\, [k(h-y)]$$

$$Y = i\frac{k}{\omega} e^{i(kx-\omega t)}\, C\, Sinh\, [k(h-y)]$$

trascurando la costante di integrazione per la periodicità del moto.

Introduciamo ora due *costanti rispetto al tempo*:

$$a = \frac{k}{\omega}\, C\, Cosh\, [k(h-y)]$$

$$b = \frac{k}{\omega}\, C\, Sinh\, [k(h-y)]$$

Queste ci permettono di scrivere, **usando solo le parti reali delle due equazioni per X e Y:**

$$X = a\cos(kx-\omega t)\,; \;\; Y = -b\sin\,(kx-\omega t)$$

La traiettoria può essere facilmente ottenuta eliminando il tempo dalle due equazioni, ciò che si ottiene quadrando e sommando rispettivamente X/a e Y/b. La somma delle parti trigonometriche dà 1, e il risultato è

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Cioè l'equazione di un'ellisse.

Il rapporto dei semiassi dell'ellisse vale:

$$\frac{b}{a} = Tanh\, k(h-y) = \begin{cases} 0 \quad per\ y = h\ (fondo) \\ Tanh\, kh\ per\ y = 0\ (superficie) \end{cases}$$

Se, nel secondo caso, h = ∞, allora , come sappiamo, Tan kh = 1, e l'ellisse è un cerchio.

L'eccentricità dell'ellisse è la stessa a qualsiasi profondità, poiché essa è data da:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{kC}{\omega}$$

Inoltre, nel caso dell'acqua profonda, in cui le ellissi sono cerchi, i raggi saranno determinati da uno dei due valori *a* oppure *b*, che risultano sempre eguali, come si può facilmente verificare. Ad esempio, per *a*, sostituendo in C il valore di A (= C/2):

$$a = \frac{k}{\omega}\, C\, Cosh\,[k(h-y)] = \frac{kA}{\omega}\, e^{-kh}\left(e^{+k(h-y)} + e^{-k(h-y)}\right) = \frac{kA}{\omega}\left(e^{-ky} + e^{-k(2h-y)}\right)$$

(ricordo che A = 1/2C, ed è utile per trasformare la differenza di due esponenziali in un coseno iperbolico, e viceversa.)

Il secondo termine in parentesi può essere scritto come

$$e^{-k(2h-y)} = e^{-2kh} e^{+ky}$$

Ma la costante e^{-2kh} = 0 per h = ∞, per cui il secondo termine può essere trascurato, e a risulterà eguale a b, cioè l'ellisse sarà un cerchio con raggio di valore

$$a = \frac{kA}{\omega}\, e^{-ky}$$

che diminuisce rapidamente con la profondità, grazie all'esponenziale negativo. Peraltro, il raggio del cerchio alla superficie y = 0, sarà dato da a = b = (kA)/ω, che è anche l'ampiezza dell'onda incidente, pag.24, come annunciato a pag. 7.

Per h = finito, al fondo (y =h), invece, fermo restando il valore di e, l'eccentricità, b varrà zero, come si legge dalle equazioni:

$$a = \frac{k}{\omega}\, C\, Cosh\,[k(h-y)]$$

$$b = \frac{k}{\omega}\, C\, Sinh\,[k(h-y)]$$

In questo caso non si devono più considerare le ellissi che a e b generano, ma le due equazioni separatamente:

$$X = a\cos(kx-\omega t)\,;\; Y = -b\sin(kx-\omega t)$$

L'equazione della Y ci dà identicamente zero, perché b = 0 essendo h = y; quella per la X ci dà un moto oscillatorio di ampiezza a, cioè l'ellisse degenera in un segmento di retta, di lunghezza costante 2a, e la particella d'acqua eseguirà un moto armonico. È più o meno ciò che si vede in riva al mare, su una spiaggia sabbiosa poco inclinata, con oggetti che galleggiano avanti e indietro, ma non molto in alto e in basso.

Per cui un breve studio ci convincerà della validità delle seguenti figure schematiche:

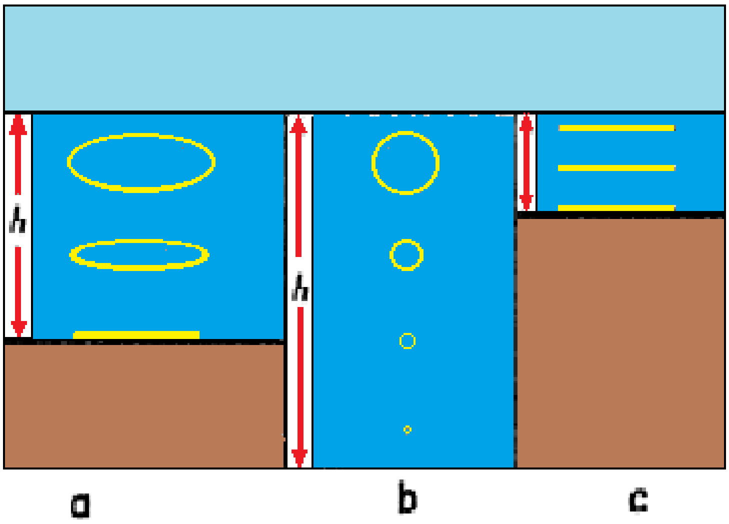


Fig.9

(a) onde in acqua di media profondità; (b) onde in acqua profonda (profondità "infinita"; (c) onde in acqua assai poco profonda.

8. Linee di flusso o di corrente *(streamlines)*

Come si è annunciato, l'equazione (1) di pag.15, ha la soluzione

$$f(z) = \Phi(x,y) + i\,\Psi\,(x,y)$$

In cui la funzione Φ(x,y), reale, è il potenziale della velocità, sul quale finora ci siamo unicamente focalizzati. Esiste però anche la Ψ(x, y), il cosiddetto "potenziale coniugato", noto in idrodinamica anche come "funzione di corrente" (*stream function*). La fig. 6 di pag.17 indica le linee Ψ(x, y) in nero: esse sono le linee di corrente seguite dalle particelle del fluido. Che forma avranno queste linee di corrente?

Qui ci vengono in soccorso le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}\ ;\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

Ma noi conosciamo la soluzione generale per la Φ(x,y), che è (a pag.23) la

$$\Phi = e^{i(kx-\omega t)}\ C\ Cosh\ [k(h-y)]$$

Abbiamo quindi:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = k\ e^{i(kx-\omega t)}\ C\ Sinh\ [k(h-y)]$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = ik\Psi e^{i(kx-\omega t)}\, C\, Cosh\,[k(h-y)]$$

Ora possiamo integrare una delle due equazioni, su x o su y rispettivamente. Conviene integrare la prima rispetto a x, ottenendo:

$$\Psi = -ie^{i(kx-\omega t)}\, C\, Sinh\,[k(h-y)]$$

Ora prendiamo la parte reale della funzione per t=0, da cui

$$\Psi = \ C \sin kx\ \ Sinh\,[k(h-y)]$$

Possiamo paragonare questa funzione all'altezza η dal piano del fluido tranquillo,

$$\eta = De^{i(kx-\omega t)}$$

Dalla formula generale (pag.20)

$$\frac{C}{D} = \frac{g}{i\,\omega\ \ Cosh\,(kh)} = \frac{-i\,\omega}{k\,Sinh\,(kh)}$$

per kh piccolo, si ha Cosh(kh) ≅ 1 (approssimazione di acqua poco profonda) e quindi

$$\frac{C}{D} = \frac{g}{i\omega}$$

Al tempo t=0, abbiamo quindi:

$$\eta = \frac{i\omega C}{g} e^{i(kx)}$$

La cui parte reale è:

$$\eta = \frac{-\omega C}{g} sinkx$$

Ora, la nostra soluzione

$$\Psi = \ C \sin kx\ \ Sinh\,[k(h-y)]$$

mostra che Ψ = 0 richiede che y= h. In altre parole, il fondo (che supporremo piano) è una delle linee di corrente del fluido. Però, anche per kx = 0, $\pm n\pi$, abbiamo di nuovo Ψ = 0, indipendentemente dall profondità y. Anche η si annulla per questi valori di kx, il che significa che la linea di corrente non continua in direzione x oltre tali valori di x. Quindi il flusso è diviso in celle rettangolari da cui le particelle d'acqua in moto non possono uscire. Inoltre, in tutti i punti in cui $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$, cioè coskx =0, cioè kx = nπ/2, le linee di corrente sono orizzontali.

Secondo il Sommerfeld, di cui questo saggio è poco più di una modesta traduzione, questo basta a disegnare le linee di corrente con buona approssimazione.

Il Sommerfeld mostra che, facendo opportuni esperimenti fotografici (di cui riproduce il risultato nel suo libro già citato, *Mechanics of deformable bodies,* p.181) con brevi esposizioni si vedono le linee di corrente, e con lunghe esposizioni si (intra)vedono le orbite ellittiche di Fig. 9b.

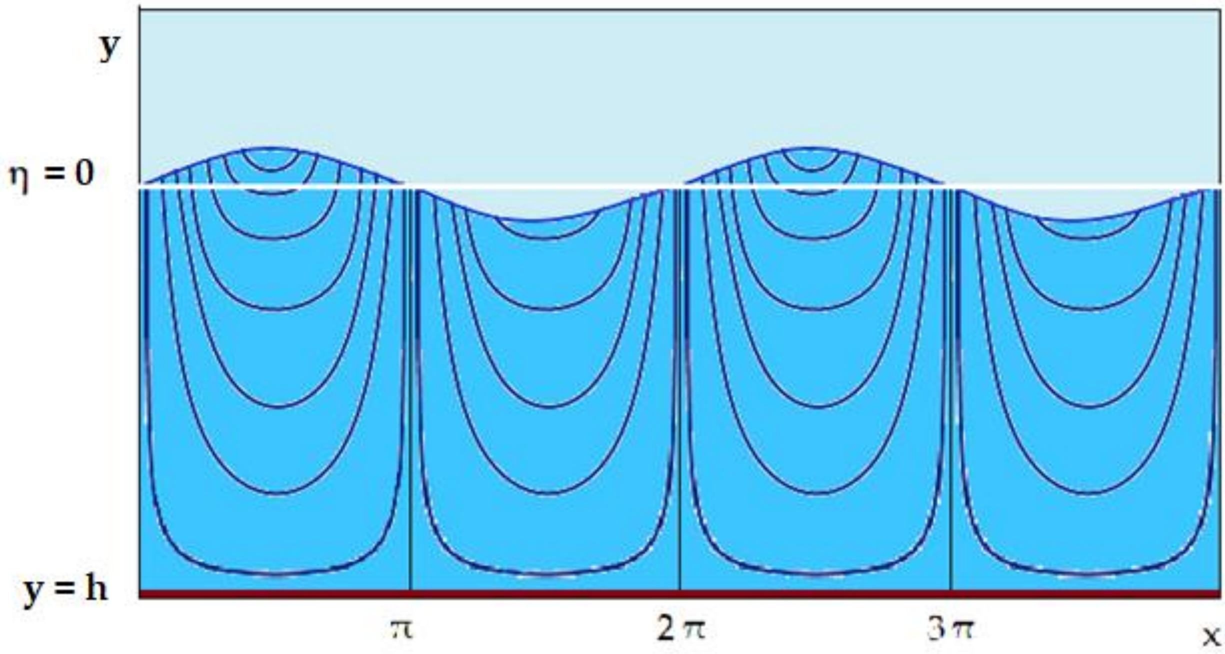


Fig.10

Linee di flusso (stramlines) di onde di gravità in acqua di profondità finita)
La linea bianca eè la linea del piano dell'acqua tranquilla, cioè lo zero della funzione η.
La coordinata y si calcola verso il basso

Qui troviamo la conferma matematica di due affermazioni fatte più volte.

1) Le particelle sono confinate a muoversi in una cella, cioè sostanzialmente restano nello stesso luogo. Ciò, però, è vero solo se l'ampiezza dell'onda è sufficientemente piccola. Per una maggiore ampiezza, le particelle vengono trascinate con l'onda.

2) Prima che le onde arrivino, le particelle d'acqua sono in quiete e non hanno energia cinetica. Invece, al passare dell'onda, le particelle entrano in moto sulla loro orbita ed acquistano energia cinetica, pur senza che l'orbita si sposti. Abbiamo quindi un'ulteriore conferma di quanto si è detto, che le onde siano un modo di spostare energia, non materia.

8. Velocità di gruppo (solo per informazione)

Le onde di superficie (fino a un certo punto) dell'acqua hanno non una, ma due velocità, la velocità di fase, che si riferisce a un'onda di una sola frequenza, e la velocità di gruppo, che si riferisce a pacchetti di onde di varie frequenze. Entrambe le velocità nella forma completa (non approssimata) dipendono dalla lunghezza d'onda. Se le due velocità sono identiche, noi diciamo che il mezzo in cui si propagano è "non dispersivo". Se invece le due velocità sono differenti, il mezzo è detto dispersivo. Ma, e questo è forse una sorpresa, se osserviamo le onde di gravità, per esempio sulla superficie di uno specchio d'acqua, noi vediamo quasi sempre che le onde si spostano alla velocità di gruppo. Esse appaiono spostarsi alla velocità di fase solo se il mezzo non è dispersivo, cioè le velocità di fase sono indipendenti dalle lunghezza d'onda, come avviene, ad esempio, in acqua poco profonda. (pag.22), con onde di piccola ampiezza.

Della velocità di fase abbiamo già parlato a sufficienza – e non basta ancora. In un mezzo "non dispersivo", con locuzione che proviene dall'ottica, abbiamo che ***c*** è indipendente da k ovvero da λ , e $\omega = c\,k$, semplice relazione. In un mezzo dispersivo, invece, la velocità di fase dipende dalla lunghezza d'onda di una data onda, e la relazione tra ω e k, o tra frequenza e lunghezza d'onda, la celebre relazione di dispersione $\omega(k)$, resa celeberrima dalle sue applicazioni alla fisica delle particelle elementari, è più complicata.

Noi abbiamo ottenuto per le onde di gravità la relazione (pag.22):

$$V^2 = \frac{g}{k} Tanh(kh)$$

Si suggerisce per esercizio di applicare la formula della velocità di gruppo

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Notando che $V_f = \omega/k$.

Una dimostrazione classica ed elementare della relazione data per v_g, che è dovuta a **Stokes** e non mancò di essere criticata, la si ottiene usando due onde di frequenze e lunghezze d'onda poco differenti. Si ottiene così la relazione già nota per **i battimenti** in acustica, interpretata come forma elementare della velocità di gruppo.

Noto che la velocità di gruppo è qui menzionata. solo per informazione. In questo saggio, non ci occuperemo delle velocità di gruppo, che invece sono essenziali per comprendere la scia dei natanti ordinari, Ne parlo *ad abundantiam* nel mio saggio https://dainoequinoziale.it/sassolini/2021/01/13/scienavi.html.

9. Equazione d'onda e capillarità

Avevamo trascurato la pressione, e, per onde abbastanza lunghe, possiamo farlo e ottenere senza problemi risultati corretti. Tuttavia, per onde di piccola lunghezza e amplitudine, esiste una pressione generata dalla tensione superficiale: infatti il nostro fluido, come già notò Laplace, ha una tensione superficiale. Questa, nel nostro caso, esercita una sua funzione, cioè esercita una certa pressione, se la superficie dell'acqua non è piana, ma agitata da piccole onde, che chiameremo "capillari". Mentre le onde lunghe sono tormentate da ogni sorta di influenze esterne, esistono anche onde, di piccolissima ampiezza e non trascurabile velocità, che nascono dal fatto che l'acqua può essere considerata anche come ricoperta da una membrana oscillante. Le membrane oscillanti formano un soggetto a parte, ma qui vorrei soltanto ricavare la velocità di propagazione delle onde di questo tipo. Ne risulterà anche qualche sorpresa.

La velocità (sempre di fase) delle onde, risulta dall'equazione d'onda. Mettere insieme un'equazione d'onda è quindi il nostro obiettivo. Per questo si utilizza una tecnica di uso assai frequente.

Sia una membrana piana flessibile. Sia u(x,y) la funzione che rappresenta in ogni punto lo scostamento della membrana dal piano al passare di una perturbazione. Si ricordi infine che alla base di tutto c'è sempre la legge di Newton, F = ma. Si consideri ora un rettangolo di piccole dimensione (anche se largamente al di sopra delle distanze atomiche o molecolari) con i lati Δx e Δy paralleli agli assi coordinati. Mentre in una corda vibrante si considera una tensione – **costante in modulo** - che agisce agli estremi di un segmento di corda, qui si considera una tensione – **anch'essa costante in modulo** - che agisce sui lati del rettangolo.

Sia σ la densità superficiale della membrana. La parte inerziale (ma) della legge di Newton è dunque immediata.

$$ma = (\sigma\,\Delta x\,\Delta y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Resta da calcolare la forza totale che agisce su questo elemento di massa.

Come si vede in pianta in Fig. ci sono due forze in direzione x e due forze in direzione y, data da T (tensione lineare, che supporremo costante in tutte le direzioni, come sarà il caso dell'acqua) moltiplicata per la lunghezza del tratto su cui essa agisce.

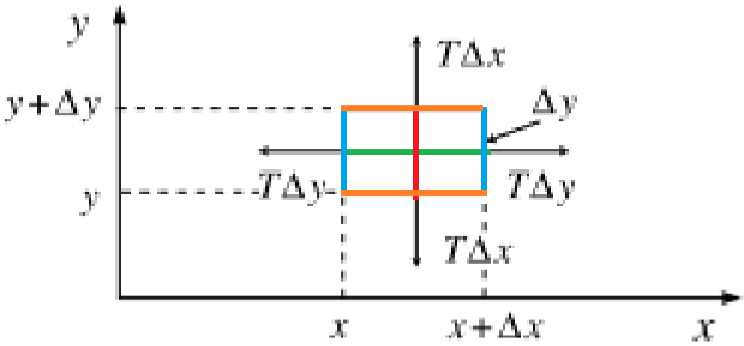
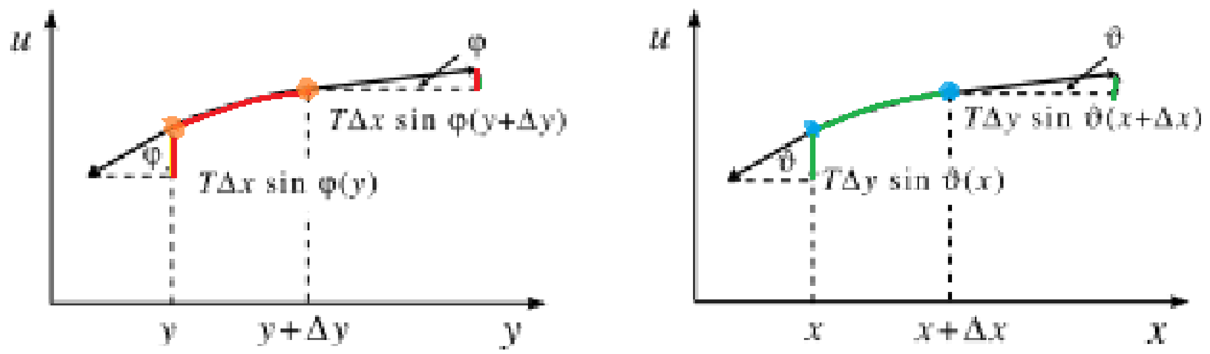


Fig.11

Costruzione di onde su una lamina (A)

Guardando di fianco, e supponendo l'area in esame assai piccola, possiamo agire con due forze medie, in cui ciò che varia sono solo gli angoli φ e θ di inclinazione della tensione T rispetto alla verticale.



Due forze lungo y   due forze lungo x

Fig.12

Costruzione di onde su una lamina (B)

La prima osservazione è che per piccoli angoli α, $\sin(\alpha) \approx tg\ (\alpha)$, ma a loro volta:

$tg\ \varphi = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $tg\ \theta = \frac{\partial u}{\partial y}$ cioè la forza lungo y è data da $F_x = T\Delta x(\frac{\partial}{\partial x} u\ (x, y + \Delta y) - \frac{\partial}{\partial x} u\ (x, y))$

Per la forza lungo y sarà lo stesso, *mutatis mutandis:* $F_y = T\Delta y(\frac{\partial}{\partial y} u\ (x + \Delta x, y) - \frac{\partial}{\partial y} u\ (x, y)$.

Mettendo insieme i due termini ma = F:

$$(\sigma\ \Delta x\ \Delta y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial t^2} = T\Delta x\left(\frac{\partial}{\partial x} u\ (x, y + \Delta y) - \frac{\partial}{\partial x} u\ (x, y)\right) + T\Delta y\left(\frac{\partial}{\partial y} u\ (x + \Delta x, y) - \frac{\partial}{\partial y} u\ (x, y)\right).$$

Ora dividiamo tutto per $(\sigma\ \Delta x\ \Delta y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma}\left[\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} u\ (x, y + \Delta y) - \frac{\partial}{\partial x} u\ (x, y)\right)}{\Delta x} + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial y} u\ (x + \Delta x, y) - \frac{\partial}{\partial y} u\ (x, y)\right)}{\Delta y}\right]$$

Passando al limite nei due termini entro parentesi, rispetto a Δy e a Δx rsipettivamente, otteniamo le due derivate seconde di u, quindi la celebrata equazione delle onde o di D'Alembert:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Dove si identifica normalmente la velocità di propagazione nel mezzo con c, e quindi, nel nostro caso, con la velocità di fase:

$$c^2 = V_f^2 = \frac{T}{\sigma}$$

Essendo T , tensione lineare, misurata in dine/cm, e σ, densità superficiale, in g/cm^2 , si vede che il rapporto ha le corrette dimensioni del quadrato di una velocità. Si torni ora all'equazione di Bernoulli, con uso del potenziale di velocità Φ, tale che *v* = - *grad Φ*

Abbiamo:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\,(p + U) = costante$$

La costante può dipendere dal tempo. In quanto alla pressione, come già annunciato, e come fatto da Sommerfeld (V.23 op. cit., Eq.4) essa è considerata nulla alla superficie.

Si veda la seconda legge di Newton (si comincia o si finisce sempre lì) in un potenziale gravitazionale, prendendo come livello 0 il piano dell'acqua tranquilla e η la coordinata verticale, positiva al di sotto del piano e negativa al di sopra:

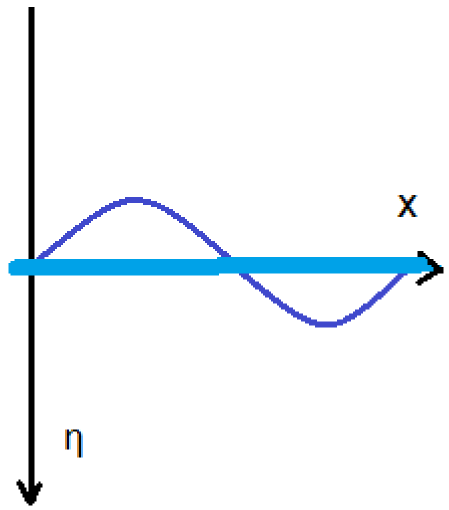


Fig.13

η(x,t) come onda sinusoidale piana

Si scelga come η(x,t) un'onda sinusoidale piana, come sempre in forma esponenziale. Per questo tipo di onde, la η sostituirà la y.

Introduciamo ora la pressione, sinora trascurata, dovuta alla tensione superficiale, che, come si può vedere, è data da

$$p = T\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$

Per comprendere questa formula, si veda la figura:

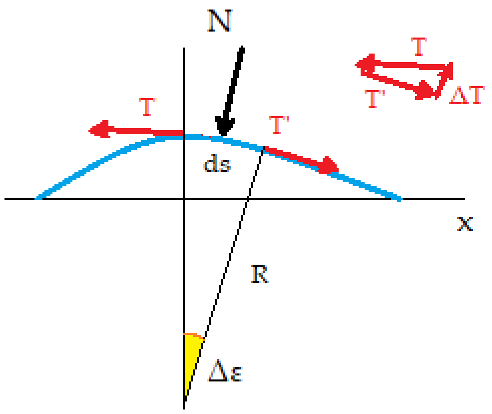


Fig.14
Pressione dovuta alla tensione superficiale.

Si ottiene ΔT = T |Δε|, notando che l'angolo fra T e T' è eguale a Δε, e T è costante.

Similmente, Δs = R |Δε|.

La derivata di u rispetto a x è per definizione la tangente trigonometrica dell'angolo θ formato fra le due tangenti geometrihe agli estremi di ds (in altre parole, θ = Δε) Quindi:

$\frac{d\eta}{dx} = u' = tg\ (\Delta\varepsilon)$ e Δε = arctg η'. Di conseguenza,

$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{d\varepsilon}{d\eta'}\frac{d\eta'}{dx} = \frac{\frac{d\eta'}{dx}}{1+\eta'^2}$. Ma $ds = \sqrt{dx^2 + d\eta^2} = dx\sqrt{1 + (\frac{d\eta}{dx})^2}$ e quindi $\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{d\varepsilon}{dx}\frac{dx}{ds} =$

E infine: $\frac{1}{R} = \frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{\frac{d^2\eta}{dx^2}}{(1+\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2)^{3/2}}$

Ma nel nostro caso il denominatore può essere considerato trascurabile.

Oltre alla gravità, con potenziale U = - $\rho g\eta$, l'equazione, che era

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -g\eta$$

Diventa ora, grazie alla tensione,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - g\eta$$

(Noto per evitare confusione, che il T/ϱ che compare qui non è il quadrato della velocità di propagazione delle onde capillari T/σ, delle pag. 31-32, come le diverse dimensioni confermano. Ricordo che T , tensione, è data in dine/cm).

Usiamo ora le già note equazioni:

$$\Phi = f(x+iy)e^{-i\omega t} + f(x-iy)e^{-i\omega t} \; = Ae^{i(kx-\omega t)}e^{-ky}$$

$$\eta = De^{i(kx-\omega t)}$$

Eseguiamo le derivate ed eliminiamo gli esponenziali, avendo sostituito y con η. Si ottiene:

i) $$-\,i\,\omega A = \left(-\frac{T}{\rho}k^2 - g\right)D$$

In Φ *si* è sviluppato il termine $e^{-k\eta} = 1 - k\eta$ *etc* e si è tenuto solo il primo termine, 1, in quanto η è assai piccolo.

L'equazione del moto diviene quindi:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\,\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}$$

Che è sempre valida, e produce

ii) $$-i\omega\, D \;= A\, k$$

Dividendo per (D k) entrambe le equazioni (i) e (ii) abbiamo:

$$\frac{A}{D} = \frac{1}{i\omega}\left(\frac{T}{\rho}k^2 + g\right) = -\,\frac{i\omega}{k}$$

Da cui, eguagliando i due membri di destra:

$$\omega^2 = \left(\frac{T}{\rho}k^3 + gk\right)$$

Siccome la velocità di fase è data da ω/k, dividendo ambo i membri per k^2 otteniamo il quadrato della velocità di fase:

$$V_f^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \left(\frac{T}{\rho}k + \frac{g}{k}\right)$$

Già sappiamo che il secondo addendo nella parentesi è il quadrato della velocità di fase per onde di gravità.

Rifacendo i calcoli a partire dalla (i) ma omettendo il termine U, otterremmo che il primo addendo è la velocità delle onde capillari. Abbiamo quindi la legge di sovrapposizione quadratica delle velocità, cioè

$$V_f^2 = V_{cap}^2 + V_{grav}^2$$

La somma dei due termini è sempre positiva, il che è realistico oltre che reale, e, siccome il quadrato della velocità capillare in termini di λ è un'iperbole discendente mentre il quadrato della velocità di gravità è una retta ascendente, ci si può aspettare che la somma dei due quadrati, e la sua radice quadrata, presenti un minimo.

Possiamo calcolare la derivata prima, o disegnare un diagramma, inserendo valori noti di T , g, e ϱ.

Essi sono: T = 72 dine/cm; ϱ = 1 g/cm³, p = 981 cm/s²

Confesso che questo mio saggio assomiglia troppo a un testo di analisi. Per cui, invece di eseguire le derivate, del resto banali, mi servo di MATHEMATICA per mostrare con un diagramma quello che succede.

L'istruzione per MATHEMATICA è:

$$\text{Plot}[\sqrt{\frac{2\pi 72.}{x}+\frac{981.x}{2\pi}}, \quad per\ \{x,0,10\}]$$

Dove x è la lunghezza d'onda.

Il risultato è:

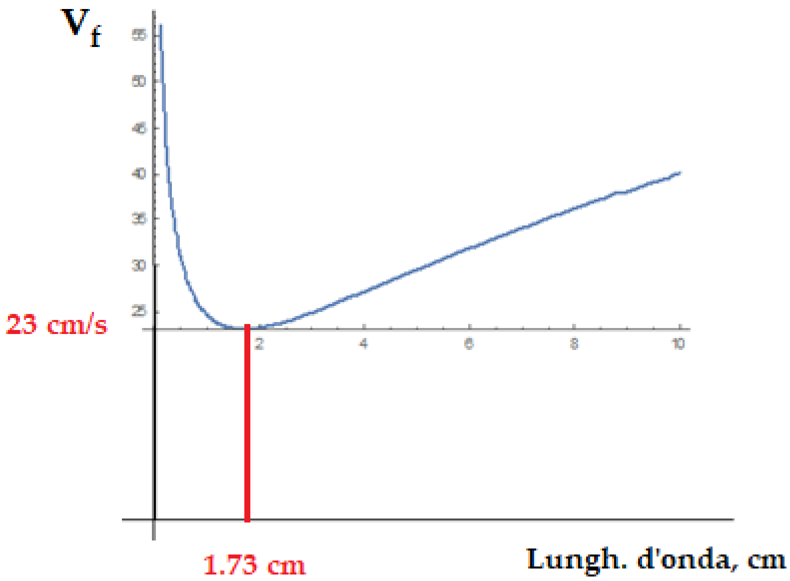


Fig.15

Velocità di fase in funzione della lunghezza d'onda in acqua. Esistenza di una velocità minima

La velocità di fase minima è di 23 cm/s. Non esistono onde di superficie nell'acqua che si propaghino a velocità inferiori. Questo minimo corrisponde a una lunghezza d'onda di

1.73 cm. Le onde di lunghezza inferiore, si propagano ancora, ma a velocità superiore. Per queste onde, Lord Kelvin propose il nome di “ripples” (increspature?).

Tanto per cambiare, ho deciso di lasciare il problema della scia delle navi e delle anatre ad una semplice spiegazione, per me soddisfacente, presentata altrove (nella già citata pagina https://dainoequinoziale.it/sassolini/2021/01/13/scienavi.html.

E, per quanto riguarda le onde di gravità, soprattutto di superficie, penso che possa bastare così, a meno di eventuali revisioni di errori segnalati da chi li trovi.