SCIA DELLE NAVI (PER TACER DELLE ANATRE)

IN ACQUA PROFONDA,

CIOÈ SAGGIO SULLE ONDE SUPERFICIALI SULL'ACQUA,

VELOCITÀ DI FASE E DI GRUPPO, IL CURIOSO ANGOLO DI 19.54° E ALTRO

I. Primo incontro con la scia delle navi in acqua profonda.

Verso le undici del mattino del giorno 26 di luglio 1958, nel corso di un'impresa ciclistica scout del gruppo Torino XXIV, la nostra schiera di cinquanta pedalatori attraversò il confine tra Svezia e Norvegia, per noi l'ultimo confine da passare prima di raggiungere la nostra meta, Oslo. Qui saremmo arrivati alla sera del giorno successivo, dopo circa 2229 km di viaggio compiuti in 22 giorni.

Fig.1

Il vecchio ponte di Svinesund, al confine tra Svezia e Norvegia (completato nel 1946).

Il passaggio del confine tra Svezia e Norvegia non lo potevamo immaginare più spettacoloso. Si trattava di un ponte alto circa 60 m, gettato sopra uno stretto fiordo dalle acque tranquillissime, lo Iddefjord. Ci fermammo a prendere fotografie, approfittando della giornata assai bella, in un'impresa dove la pioggia a dirotto non era mancata. Questo passaggio di confine fu ovviamente notato da tutti i diaristi, privati e ufficiali. Ma ciò che colpì molti non fu tanto il ponte, che non potevamo vedere essendoci sopra, quanto la vista di due battelli che solcavano il fiordo lasciando una scia "perfetta", quale è rarissima a vedersi in mare aperto, che assai di rado si accontenta di una calma così piatta, come quella di un fiordo senza vento. Inoltre eravamo in un punto di osservazione ideale, quasi verticale sopra alle navi. (Circa cinquant'anni dopo il nostro passaggio, nel 2005, fu inaugurato un nuovo ponte, più a Ovest, sospeso, considerato un capolavoro di ingegneria.)

Quello che mi stupì allora, come stupì molti miei compagni, fu la scia dei battelli, da manuale. Ma bastava guardare dall'alto quelle scie, di cui mi spiace di non avere fotografie, per comprendere che le onde generate da un natante (navi a remi, a vela, a motore; nuotatori in vari stili – purché non subacquei, anatre e perifino insetti) su una superficie di acqua tranquilla erano assai più complicate di tutte le onde di cui avevo visto rappresentazioni: onde di strumenti a corda o anche a fiato (queste un pochino più complicate), onde sonore, onde elettromagnetiche. A pensarci bene, inoltre, anche le onde prodotte da un sasso lasciato cadere in acqua, non sono affatto elementari, per quanto il fenomeno ci sia noto fin dalla più lontana infanzia, e sembri semplice.

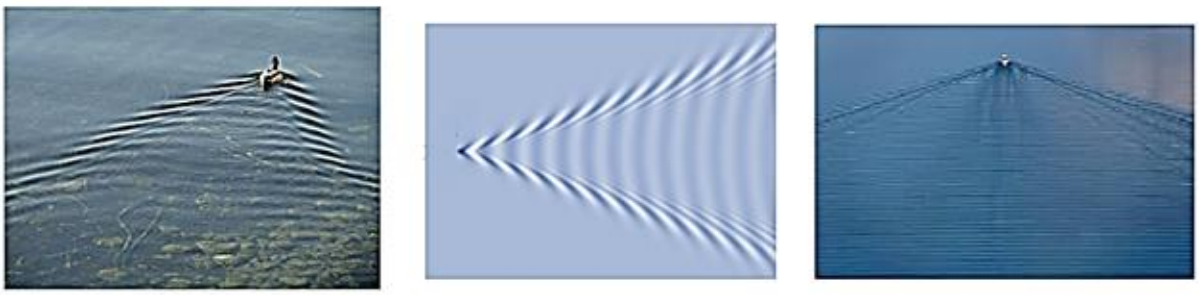
Il ***Sommerfeld***, nel suo classico "*Mechanik der deformierbaren Medien*" (Meccanica dei corpi deformabili, 1945), spiegò che da sempre gli uomini sono abituati a vedere onde di superficie sull'acqua, e per questo si illusero di poter più facilmente interpretare le onde acustiche ed elettromagnetiche ed eventualmente le onde della meccanica quantistica sulla base delle loro conoscenze delle onde di superficie dell'acqua. Presto si dovettero invece accorgere del fatto che i tipi di onde che si volevano spiegare erano assai meno complicati dello strumento che doveva aiutarli a comprenderli: come se, per spiegare i rudimenti della geometria euclidea ai bambini delle elementari noi partissimo dai concetti della geometria che vale su una superficie sferica (in fondo è quello che facciamo, ma la Terra è così grande, anche se non proprio piatta, che, per studiare i rudimenti della geometria, il banco di una piccola classe di scuola è meglio della superficie terrestre vista da un aereo in volo sull'oceano Atlantico o dalla stazione spaziale. Per il banco di scuola, la geometria che ci occorre e basta è la geometria euclidea.) Non solo, ma i fisici matematici si accorsero del fatto che, in fin dei conti, il meccanismo di formazione e propagazione delle onde di superficie nell'acqua non era mai stato capito a fondo.

Ad esempio, una spiegazione completa delle onde che si propagano lasciando cadere un sasso nell'acqua ferma richiede il ricorso a matematica avanzata, quale non si insegna(va) se non in un terzo corso di analisi matematica all'università.

Il problema della scia delle navi fu studiato soprattutto nell'area dell'ingegneria navale inglese, nella seconda metà del XIX secolo, con il concorso di insigni matematici. Lord Kelvin (William Thomson, First baron Kelvin) diede un'elegante dimostrazione matematica della forma della scia, per cui essa prende il suo nome: scia di ***Lord Kelvin*** o "*Kelvin wake*", pubblicata in Proc. R. Soc. London, **42,** 80 (1887).

Io mi occuperò della scia dei natanti in moto in acqua profonda e tranquilla, senza vento e senza correnti. Ma questo ci porterà ad osservare fenomeni (secondo me) sorprendenti e ad introdurre concetti nuovi, senza dover scandagliare la matematica troppo al di là di quello che si apprende in quinta liceo scientifico, ma basandoci piuttosto sulla nostra intuizione geometrica.

Il fatto più sorprendente lo si vede dalle tre figure sottostanti. A sinistra , la figura (2a) rappresenta la scia formata da un'anatra in uno stagno; in centro (figura 2b) abbiamo la scia formata in condizioni ideali di laboratorio (con simulazione di acqua tranquilla e profonda, nave puntiforme), a destra (figura 2c) la scia di una nave – anche se non è chiarissimo che si tratta di un nave - qualsiasi (senza andare a cercare navi particolarmente grandi, o operate in modo non convenzionale). La visione prospettica della figura 2c fa apparire l'angolo di apertura della scia assai più maggiore del reale.



2a 2b 2c

Fig.2

Le eliche di una grande nave provocano una loro scia turbolenta, di larghezza quasi costante, che introduce un problema in più, che non tratterò. Va anche detto che, se si guardano diverse foto di scie di navi, non tutte si conformano alla scia che porta il nome di Lord Kelvin, della quale noi ci occuperemo. Molte scie sono abbastanza diverse, ma, per quanto lo siano la maggioranza nelle foto, che sovente vogliono appunto dimostrare che la scia di Lord Kelvin ("*Kelvin wake*") non è universale, nel mondo reale le scie anomale sono una minoranza, anche se nelle moderne grandi navi, la scia turbolenta formata da due o

quattro eliche giganti perturba l'intero aspetto della scia. Lo stesso avviene per le navi super-veloci, gli aliscafi e simili, che navigano in modo diverso.

Oggi lo studio della scia delle navi moderne, come le superpetroliere o le grandi navi da crociera, è fatto in laboratorio con modelli per la prua e la chiglia delle navi: in questo modo sono saltate fuori prue, che, lungi dall'essere le più affilate possibili, cosa che pareva un tempo un'ovvia necessità, hanno invece una forma che ricorda vagamente il naso del delfino, cioè una sporgenza "bulbosa". E non sono rare su Internet le fotografie di delfini che giocano con queste prue, talvolta stando ritti sulla coda *davanti* alla nave. Per i nostri scopi, invece, una barca a vela è assai meglio, per tacer di un'anatra, e una barca a remi va ancora bene, per quanto perturbata dai vortici provocati dalle palate dei remi.

Nelle tre parti di Fig. 2, distinguiamo in ciascuna figura almeno due sistemi di onde:

(i) **un sistema costituito da onde che divergono dal natante**, simmetriche rispetto alla direzione del moto. Queste mostrano una loro (piccola) convessità rivolta verso la direzione del moto del natante, e hanno una loro lunghezza d'onda, che chiameremo λ_0. Ogni singola onda di questo sistema (i) ha un fronte relativamente breve, e unendo i centri di ogni fronte d'onda si ottiene una V col vertice nel natante.

(ii) **un sistema di onde perpendicolari alla direzione del moto del natante**. Queste hanno una loro lunghezza d'onda, che chiameremo λ_1. Guardando il caso ideale di fig.2b si vede sulla destra della figura che le onde di questo sistema più lontane dal natante incominciano ad avere la forma di archi di cerchio con la loro convessità rivolta al natante, mentre le onde più vicine al medesimo sembrano essere linee rette perpendicolari alla direzione del moto. Come vedremo, questa è un'impressione dovuta al fatto che il segmento di circonferenza che possiamo osservare è sempre più breve in quanto è limitato all'interno dell'angolo della V formata dal sistema di onde (i). In realtà, le onde trasversali vicino alla sorgente hanno una curvatura asai maggiore (ovvero un raggio di curvatura assai minore) di quelle più lontane.

I fronti delle onde di questo secondo sistema hanno gli estremi nelle onde del primo sistema.

II. L'apertura dell'angolo della scia non dipende dalla velocità del natante.

L'insieme ha una sua complicata bellezza. Ma ci sono altre particolarità. La più interessante è che **l'apertura dell'angolo della V che ha il vertice nel natante non dipende dalla velocità del natante, ma ha un valore fisso, di poco meno di quaranta gradi** (l'incertezza dipende dal fatto che possiamo tracciare una retta attraverso il centro delle onde, o uno dei due estremi). Perché questo curioso angolo fisso? In generale, nei

problemi che (fortunatamente – per gli studenti - di rado) vengono proposti su questo soggetto, questa è la prima, se non l'unica domanda, e la spiegazione, come vedremo, non è del tutto banale.

II.1: Paragone con gli aerei supersonici. L'angolo di Mach.

Questa, però, oltre a non essere banale, è una sorpresa. In effetti, se si pensa agli aerei che vanno a velocità superiore a quella del suono, si creano delle onde sonore sferiche che si propagano alla velocità del suono. In condizioni ideali (aereo abbastanza in alto, niente perturbazioni atmosferiche,) queste onde sferiche si accumulano creando un "inviluppo" in forma di cono con un angolo di apertura (angolo di Mach) che è tanto più acuto quanto più l'aereo è veloce. Sulla superficie del cono si saranno accumulati i fronti delle onde sferiche partite in diversi istanti, e questo accumulo di onde sonore (onde di pressione dell'aria) che arrivano tutte insieme produrrà un'onda d'urto che arriverà a terra in ritardo rispetto al passaggio dell'aereo producendo il forte boato (o *boom*) sonico (o ultrasonico.) In realtà il "boom sonico" è provocato anche da un secondo fenomeno, che sarebbe percettibile sul fronte della prima onda anche se ci trovassimo nel caso (a) di fig 3, ma è amplificato dall'accumularsi di vari fronti d'onda generati da un aereo in moto supersonico.

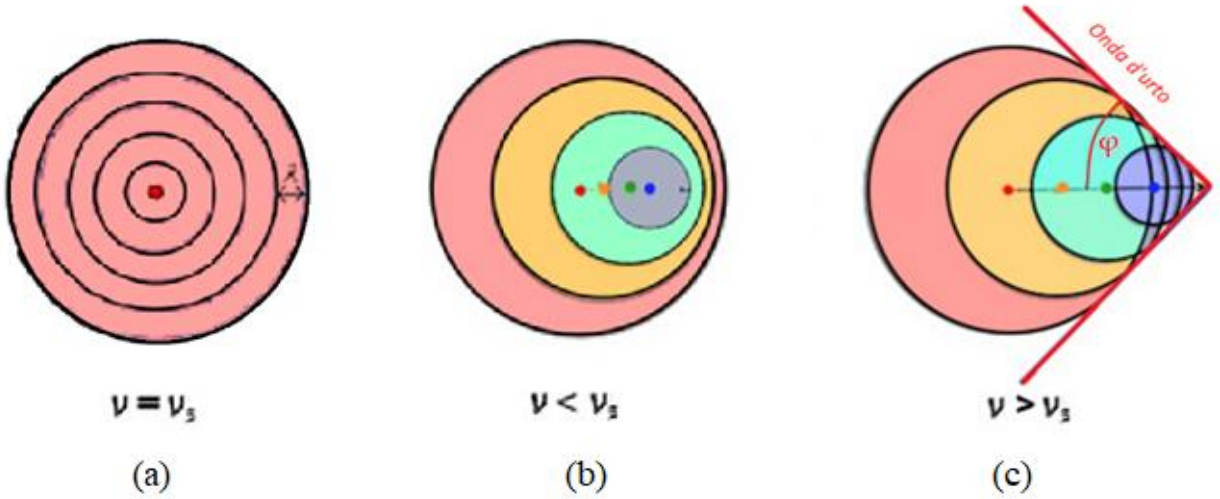


Fig. 3

La Figura 3 vuol mostrare in modo grafico quanto già scritto. Incominciando da sinistra vi si vede la propagazione di onde sonore per diverse velocità della sorgente. In **(a)** la sorgente è fissa ($v_s = 0$), per cui essa produce un suono di lunghezza d'onda (distanza fra i cerchi) costante; in **(b)** la sorgente è mobile a sinistra a destra a velocità inferiore a quella

della sorgente, e vi si vede una spiegazione qualitativa del cosiddetto effetto Doppler, cioè cerchi più vicini e quindi onde più corte davanti alla sorgente, ciò che produce un suono più acuto; cerchi più lontani e onde più lunghe dietro alla sorgente, che conducono a un suono più grave); in **(c)** la sorgente è in moto a velocità superiore a quella del suono e vediamo la formazione dell'onda d'urto, cono con angolo di apertura φ detto angolo di Mach, che – come vedremo - dipende dalla velocità della sorgente in moto. In figura si vede la sezione del cono.

Poiché il boato è udito alla superficie del cono, chi si trova sul terreno lo sente sulla linea gialla di Figura 4:

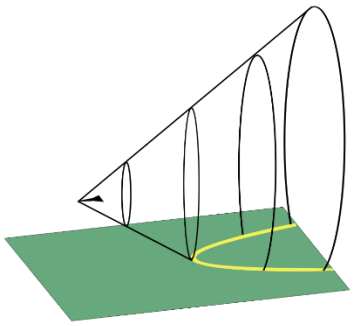


Fig.4

Se l'aereo vola parallelo al suolo, che supporremo piano, ovviamente la curva gialla è una parabola (è una sezione conica parallela all'asse del cono…). Ma la parabola si allarga sul suolo man mano che l'aereo avanza, in modo da assordare un po' tutti, anche se non allo stesso tempo.

!Original: ThuringiusVector: Andreas 06, CC BY-SA 3.0 <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>, via Wikimedia Commons

Ma come si forma un'onda d'urto? Perché il procedere di un aereo a velocità supersonica non si limita a farci sentire il suono dei suoi motori in ritardo rispetto al suo passaggio, ma deve presentarsi con un "bang" improvviso, che, se l'aereo non è stato visto, ci fa sussultare?

Questo secondo problema è abbastanza facilmente spiegato in modo intuitivo (il diavolo sta nei dettagli). In ogni punto della traiettoria dell'aereo, che supporremo rettilinea e percorsa a velocità uniforme, superiore alla velocità del suono nell'aria, viene prodotto un sistema di onde sferiche (di pressione dell'aria) che si propagano alla velocità del suono nell'aria. Ci sarà in ogni caso una prima onda. Come mostrato in figura 3, e come probabilmente è noto, queste prime onde (di pressione) arriveranno insieme, sulla parabola in figura 4, accumulate nell'onda d'urto di Fig.3c. Questa spiegazione grafica, però, in genere non è sufficiente. L'onda d'urto (*shock wave*) è dovuta principalmente al fatto che la prima onda di pressione, il fronte d'onda, comprime adiabaticamente l'aria al

suo passaggio, per cui la temperatura dell'aria dietro il fronte d'onda aumenta, la velocità del suono aumenta, e le onde successive alla prima tendono a raggiungere la prima onda, anche se ovviamente non possono sorpassarla. Si forma così un "accumulo" di salti di pressione, che è quello che dà il suo vigore all'onda d'urto.

Un facile disegno e un concetto di trigonometria ci dimostrano che *l'angolo di apertura del cono (angolo di Mach) formato dall'onda d'urto, dipende dalla velocità dell'aereo*. Ma la dimostrazione merita qualche attenzione. .

In un mezzo *non dispersivo*, cioè tale che la velocità di fase è eguale per tutte le onde sonore emesse dall'aereo, indipendentemente dalla loro lunghezza, - e quindi la velocità "di fase" è uguale alla velocità "di gruppo" (concetti che vedremo in seguito), si può incominciare col congelare la scena, scegliere uno dei punti sulla scia, B_1, disegnare l'onda sferica più esterna, che sul piano del disegno è un circolo, e tracciare la tangente dal circolo dal punto B_2 in cui si trova la sorgente. Ne otteniamo la figura 5

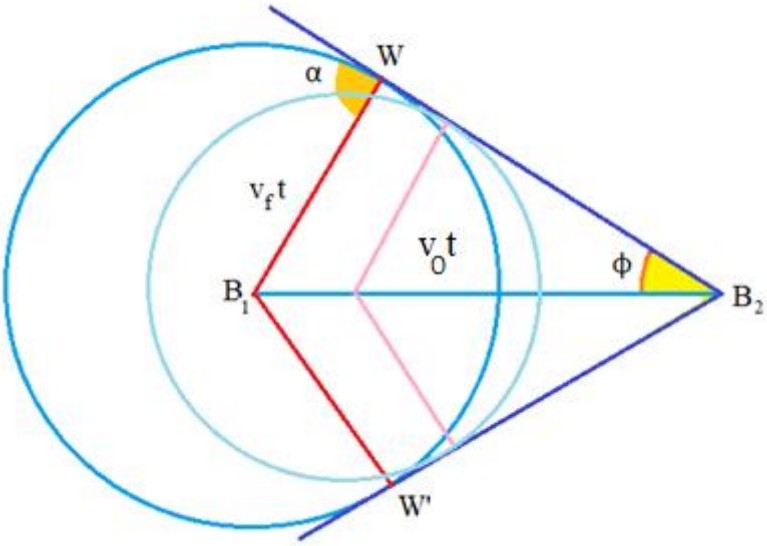


Fig.5

dalla quale si desume la relazione tra velocità e angolo φ (di Mach):

(1) $$v_0 \sin\varphi = v_f$$

La distanza da B_1 a W è scelta perché è *la minima distanza da B_1 a quella che sarà la scia*.

In figura è rappresentato il moto di una sorgente da sinistra a destra. Nell'intervallo di tempo t, la sorgente si sposta da B1 a B2, procedendo a velocità v_0 uniforme, che per ipotesi è superiore alla velocità di fase dell'onda, v_f. Nello stesso tempo dai punti del percorso B_1B_2 in cui non si abbia un cavo prodotto dall'onda precedente, saranno partiti altri sistemi di onde concentriche con velocità di fase v_f , costante e inferiore alla velocità

della sorgente. Il rapporto tra il raggio del cerchio della prima onda di questi vari sistemi e la distanza percorsa è costante, in quanto

$$\frac{v_f t}{v_0 t} = \frac{v_f}{v_0}$$

Ma questo rapporto non è altro che il seno trigonometrico dell'angolo φ, e la costanza del rapporto implica che due cerchi descritti da onde partite in istanti diversi dai punti della traiettoria rettilinea abbiano lo stesso seno trigonometrico, la stessa tangente trigonometrica e quindi la stessa tangente geometrica. È facile confondersi nel discutere, sebbene il concetto appaia intuitivo e sebbene abbiamo sempre visto il disegno del cono (o dell'angolo di apertura φ del medesimo) detto angolo di Mach. Per dimostrarlo bisogna disegnare un primo triangolo rettangolo, per esempio B_1B_2W, (i) incominciando con il lato orizzontale di lunghezza $v_0 t$, (ii) poi aggiungendo il cerchio di raggio $v_f t$, (iii) poi la tangente $B_2 W$ perché sappiamo che *il triangolo formato tracciando la tangente da un punto (B_2) a un cerchio forma un angolo retto α nel punto di tangenza W.* Poiché il triangolo è rettangolo per costruzione, allora il rapporto fra raggio B_1W, un cateto, e la distanza B_1B_2, l'ipotenusa, è dato da sin φ, da cui si ricava φ.

Disegniamo ora un altro triangolo rettangolo. Se le due velocità (del suono e della sorgente) non cambiano, allora il rapporto fra cateto e ipotenusa è uguale al precedente, e di conseguenza anche sin φ. Ne segue che l'angolo φ è uguale al precedente e i due triangoli possono essere disposti l'uno dentro l'altro, in modo da avere la stessa tangente ai due cerchi. L'errore che spesso si fa è quello di partire dalla risposta, cioè disegnando la tangente. No, quella arriva per ultima.

In altre parole, il concetto di angolo di Mach nasce dal fatto che al passaggio della sorgente, vengono eccitate da diversi punti del percorso onde circolari che hanno la stessa velocità, e la cui (linea) tangente tracciata dalla sorgente al cerchio è la stessa.

Ma come sta la nostra geometria euclideia? Ricordiamo davvero che il raggio di un cerchio è perpendicolare alla tangente nel punto di tangenza? Be', questa è più facile, e mi spiego a colori "senza parole". I due angoli violetto (A) e rosa (B) sono eguali e quindi retti, perché rispondono a una definizione alternativa dell'angolo retto: *se una retta incide su un'altra formando due angoli eguali, i due angoli sono retti.*

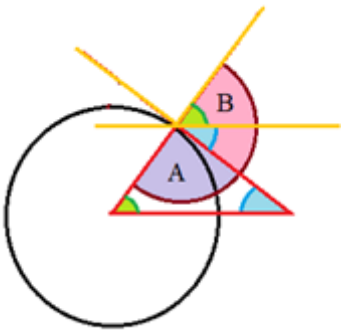


Fig.6

Data una circonferenza e un punto P fuori di essa, l'angolo formato tra una delle due tangenti alla circonferenza e il raggio condotto al punto di tangenza è retto.

Si noti che la sorgente, che supponiamo puntiforme, genera una successione di onde circolari che hanno un esteso spettro di lunghezze d'onda, ma hanno tutte la stessa velocità, ciò che non sarà vero nelle onde di superficie dell'acqua.

Breve excursus sull'effetto Cerenkov (per gli ambiziosi)

Questo concetto si applica anche alla luce. Uno dei primi problemi che si presentò nello studio dei raggi cosmici fu quello di determinarne l'energia, cosa non facile, perché si sapeva che si trattava di particelle relativistiche, cioè in moto a velocità vicine a quelle della luce. Venne in soccorso la scoperta dell'effetto Cerenkov. Se una particella, per esempio un raggio cosmico, va a velocità superiore a quella della luce….. Alto là, dirà qualcuno. Nessun oggetto può andare a velocità superiore a quella della luce. Ora, *la critica è corretta, ma vale solo per il vuoto*. In un mezzo con indice di rifrazione n > 1, la velocità ***di fase*** della luce è c/n, e quindi la particella può andare a velocità superiore a c/n, che per quanto ci riguarda è la velocità della luce in quel mezzo. Il risultato è che il passaggio della particella a velocità superiori a quella della luce è segnalato dall'emissione di luce azzurra. Questo effetto si chiama "effetto Cerenkov" (da ***Pavel Aleksjejevic Cerenkov***, che per questa scoperta ebbe il Premio Nobel nel 1958), e permette di rivelare particelle ad alta velocità che attraversano un mezzo con n>1.

Ciò detto, la teoria dell'effetto Cerenkov non è del tutto immediata, tant'è vero che ***I. Frank e I. Tamm*** ebbero anche loro il Premio Nobel 1958 per averla spiegata. Le domande erano molte. Perché una particella carica irradia anche in moto rettilineo uniforme (*tutti* sappiamo che dovrebbe irradiare solo se accelerata)? Perché la luce emessa (o meglio, visibile) è in generale azzurra? Come si osserva l'effetto? Che cosa se ne può dedurre e come? Si può dire che chi si pone queste domande dopo le mie poche parole ha l'istinto del fisico, soprattutto se poi va a cercare le spiegazioni sui sacri testi. Se poi è in grado di spiegarsele da solo…. Comunque, dalla velocità della particella si risale alla sua energia, che è sovente relativistica, perché n sovente è assai vicino a 1. In quanto al colore, la formula di Frank e Tamm (grazie alla quale essi ebbero il Nobel, e che non mi pare necessario ricavare in questa sede – non esageriamo; comunque la si trova in rete – solo in inglese - su Frank–Tamm formula - Wikipedia) è:

$$\frac{d^2E}{dx\,d\omega} = \frac{q^2}{4\pi}\mu(\omega)\omega\left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)}\right)$$

Dove q è la carica della particella, n (ω) è l'indice di rifrazione del mezzo attraversato, e μ(ω) la "permeabilità magnetica", cioè una misura della magnetizzazione che il mezzo raggiunge quando si applica un campo magnetico (per esempio creato da una corrente elettrica – o da una particella carica in movimento).

Impariamo a leggere una formula di fisica: questa in prticolare esprime **l'energia dE** emessa **per intervallo di lunghezza (dx)** e di **frequenza (dω,** dove ω = 2 πν, ν essendo la frequenza della luce emessa). Il termine che interessa di più per rispondere alla domanda circa il colore è segnato in azzurro e dice che l'energia emessa è proporzionale alla frequenza, cioè l'emissione è più alta a più alte frequenze, blu, violetto e in realtà ultravioletto. Ma il nostro occhio è più sensibile al blu che alle frequenze successive, ed è praticamente cieco all'ultravioletto.) Altri termini della formula introducono un taglio alle alte frequenze: il contributo principale a questo taglio è dato dall'indice di rifrazione n(ω) che diventa eguale a 1 alle alte frequenze. A questo punto la velocità della luce nel mezzo è eguale alla velocità della luce nel vuoto, la particella non può andare a velocità superiore, e il cono non si forma più. Fine del fenomeno: niente radiazione Cerenkov per esempio alla frequenza dei raggi gamma, come ci potremmo aspettare se n fosse costante.

Un punto interessante è chiedersi chi o che cosa emetta la radiazione. I sacri testi (Jackson, Landau, Frank e Tamm nel loro lavoro originale del 1937, citato da Wikipedia, edizione inglese) affermano che è **la particella carica** stessa a emettere la radiazione, sotto l'influenza del mezzo, pur muovendosi in moto rettilineo uniforme. Per Wikipédia francese e italiana , invece, sono **gli atomi e le molecole eccitate** dal passagio della particella, ad emettere la radiazione: *"Ciò (l'emissione di radiazione) è dovuto al fatto che la particella carica, lungo la sua traiettoria, induce dei momenti di dipolo temporanei negli atomi o nelle molecole del mezzo. Ritornando alla configurazione iniziale, le molecole producono radiazione elettromagnetica."*. Dovendo scegliere, e non avendo autorità sufficiente per dire la mia opinione, preferisco stare con i sacri testi.

Ma la sola cosa che qui ci importa, estratta da questo (doppio) esempio, è quanto segue: aerei supersonici e particelle che muovono a velocità v_0 maggiore di c/n creano un cono (onda d'urto o onda luminosa) il cui angolo d'apertura si ripiega come un ombrello con la velocità della sorgente. *Mutatis mutandis*:

$$\sin\varphi = \frac{c/n}{v_0} = \frac{1}{n\beta_0}$$

Dove β è l'usuale notazione per v/c.

Per la luce di Cerenkov e per il suono, l'angolo φ è tanto più piccolo e il cono tanto meno aperto, quanto più alta è la velocità della sorgente, sia essa una particella che muove a velocità superiore a quella della luce o un aereo supersonico.

Invece, come abbiamo detto, la maggior parte delle navi, e delle anatre, a qualunque velocità vadano, purché superiore a alcuni km/ora, lasciano ***una scia a V, il cui angolo di apertura non dipende dalla loro velocità.***

Occorre dunque chiedersi perché non esista un effetto simile a quello di Mach o Cerenkov applicabile a anatre e navi, per quanto facciano una loro scia a V.

Il mio obiettivo sarà quindi rispondere a questo pressante interrogativo, studiando la scia dei natanti. Tuttavia, la matematica e la fisica che conducono a una per me soddisfacente e quindi completa spiegazione del fenomeno, sono alquanto complicate. *Mi riprometto di scrivere una parte matematica rigorosa separatamente,* più che altro per mio diletto, spiegando in modo rigoroso diversi risultati che qui otterremo in modo più semplice (e meno rigoroso, e meno preciso). Ma niente paura, sarà per un'altra volta.

III. Le onde di superficie.

Principio fondamentale: Le onde non spostano materia, ma energia.

Questo lo si vede sperimentalmente. Un turacciolo su uno stagno d'acqua ferma, al passare dell'onda provocata dal sasso, si muove percorrendo un'orbita all'incirca circolare (vedremo quanto) su un piano verticle, ma il centro dell'orbita in prima approssimazione non si sposta. Le particelle d'acqua su cui il turacciolo galleggia eseguono lo stesso moto, per cui in verità non c'è un progresso di materia (almeno in acqua profonda), ma certo esiste un trasferimento di movimento principalmente dall'alto al basso delle particelle di superficie.

III.1. Come si formano le onde?

Veniamo ora a un secondo punto. Come si formano le onde? Prendiamo il caso di un sasso gettato in uno stagno tranquillo abbastanza largo. Sembra abbastanza logico che ci sia un'onda circolare che si propaga dal punto di impatto. È però logico più che altro perché fin dalla più tenera età scagliamo sassi nell'acqua e abbiamo un innato senso della simmetria. L'onda circolare, procedendo, ha un diametro sempre maggiore e un'altezza sempre minore. Tutto questo lo si può intuire. Ma perché non si vede una sola onda circolare?

Il fenomeno non è per nulla semplice, e diversi filmati disponibili in rete lo dimostrano. Se a cadere è una goccia d'acqua, si può vedere (in rete ci sono molte di queste animazioni al rallentatore) che circa metà dell'acqua della goccia crea la prima onda e si confonde col resto dell'acqua, ma dal punto di impatto rimbalza una goccia che è circa la metà della goccia primaria. Ricadendo, forma una seconda onda. Di nuovo, metà dell'acqua provoca una terza goccia, e ciò avviene un certo numero di volte, creando quindi una serie di anche dieci anelli concentrici, di sempre minore altezza.

Ovviamente, questo non spiega perché un sasso provochi più di un anello concentrico, visto che il sasso non si divide. Se non si sono gettati altri sassi, perché alcune altre onde circolari seguono la prima? E perché la distanza tra le creste di queste onde aumenta con la distanza dal punto di impatto del sasso? E c'è una legge che ci dica in che modo questo fenomeno avviene?

Se un sasso cade nell'acqua, sposta l'acqua che era dove cade (in tutto questo saggio supponiamo l'acqua incompressibile). Ma un esempio più semplice è l'opposto: si immerga lentamente un cilindro di lunghezza L e, raggio a e, una volta che lo specchio d'acqua è ridiventato perfettamente piano, lo si estragga rapidamente. Si forma una sorta di "buco nell'acqua", che viene prontamente riempito. *Ricordiamo che l'acqua è considerata incompressible.* L'acqua che riempie il buco arriva dal contorno per effetto della gravità. Quello che succede poi, non è facile da spiegare. Per le onde di superficie devo dire che non ho mai letto una spiegazione *intuitiva* del tutto soddisfacente di come esse vengano generate, neanche nei migliori testi. Sorprendentemente, proprio il punto di partenza della teoria delle onde, la loro generazione per un evento impulsivo, è nebulosa. Si comprende meglio la generazione di onde se, invece di un sasso gettato una volta per tutte, abbiamo una sorgente che vibra in qualche modo, e anche se, per esempio, il vento incomincia a soffiare parallelo alla superficie piana dell'acqua.

Come sempre avviene in Fisica, se non si può spiegare un fenomeno partendo da altri concetti, si invoca un "principio". Principio vuol dire che, semplicemente, lo si accetta e si incomincia di lì.

Un "principio" ragionevole è quello di ***Huygens (1678)-Fresnel (1818),*** applicabile – con qualche cautela - alla generazione di onde di ogni specie. Secondo questo principio, *applicato alle onde superficiali dell'acqua,* si ammette che ciascun elemento di una cresta d'onda circolare è sorgente di onde elementari circolari complete. Queste onde elementari interferiscono costruttivamente formando altre onde circolari complete che quindi dovrebbero andare in entrambe le direzioni, come mostrato in figura 6:

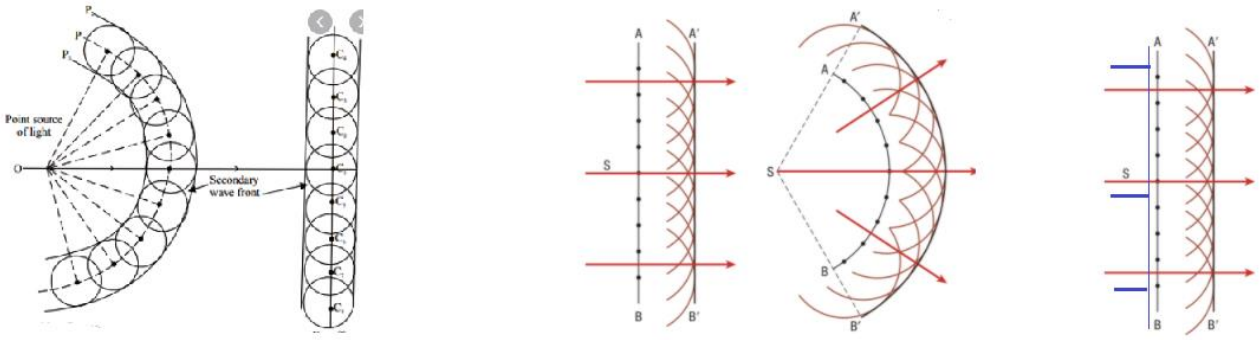


Fig.7

Principio di Huygens

Nalle prime due figure a sinistra si vede un'illustrazione del principio nella forma originale, con onde che si allargano in tutti i sensi da ogni punto delle cresta dell'onda, generando altre onde. Nel terzo e quarto diagramma vediamo il principio di Huygens applicato sopprimendo le onde che si propagano all'indietro (che non furono mai osservate). Nell'ultimo diagramma a destra ho voluto indicare che tuttavia ci dovrebbero essere anche onde superstiti, meno intense, che si propagano all'indietro (come da fig.7).

Tuttavia, Huygens era al corrente del fatto che non c'era evidenza di soluzioni delle equazioni d'onda che si propagassero all'indietro. Risolse il problema dicendo semplicemente che nel suo modello erano accettate solo le onde che si propagavano in avanti.

Non penso che questo problema sia mai stato risolto se non con aggiunte *ad hoc*, cioè giustificate a posteriori, dal fatto che spiegarono per la prima volta risultati sperimentali come la diffrazione. Un esempio è l'aggiunta ad hoc – da parte di Fresnel - di un "fattore di obliquità" f(θ):

$$f(\theta) = \frac{1 + \cos(\theta)}{2}$$

Questo fattore, ovviamente, proietta l'onda in avanti, ma rovina (o addirittura distrugge) la semplice ed elegante idea iniziale di Huygens. Inoltre non ha giustificazione fisica, per quanto ne so.

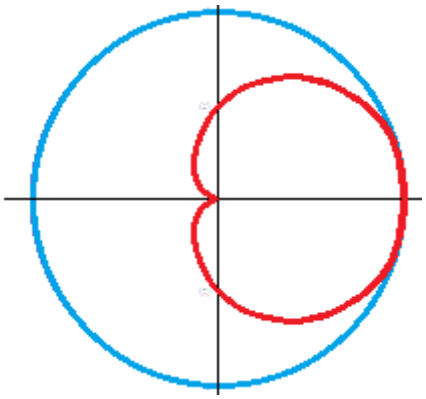


Fig.7
Il diagramma $f(\theta) = \frac{1+\cos(\theta)}{2}$ paragonato al cerchio originale di Huygens.

In realtà, anche con questo sotterfugio, un piccolo fronte d'onda con lunghezza d'onda e ampiezza circa un decimo dell'originale dovrebbe formarsi e procedere all'indietro, come già notato nella spiegazione della Fig.6. Non credo sia mai stato osservato. In conclusione, non conosco teorie o principi generali che spieghino intuitivamente come le onde siano originate, a meno di considerare casi particolari, come sorgenti oscillanti con una determinata frequenza o instabilità create dall'interfaccia fra due fluidi di diversa viscosità scorrenti l'uno sull'altro e simili. Il problema non è soltanto mio. Sono molti i fisici che direbbero che "*il principio di Huygens dà i risultati giusti per i motivi sbagliati.*"

Anche risolvendo correttamente l'equazione delle onde circolari, con mezzi matematici avanzati, ma disponibili, si impone che all'infinito esistano solo "onde uscenti", perché solo esse sono osservate.

III.2. La matematica in soccorso (troppa grazia!).

Lo studio di una corda vibrante può essere fatto usando l'equazione di Newton (invitabilmente) e trasformandola senza trucchi né invenzioni ad hoc nella cosiddetta "equazione di d'Alembert" o equazione delle onde. Si tratta di un'equazione di secondo ordine alle derivate parziali, che ai miei tempi veniva insegnata alla fine del corso di Analisi II. La grandezza di cui si voleva conoscere l'evoluzione in funzione del tempo e della distanza era lo spostamento della corda vibrante dalla posizione orizzontale di riposo. Le equazioni alle derivate parziali in genere danno delle soluzioni assai generali. Nel caso dell'equazione di d'Alembert, reperibile in rete, ma che mi propongo di dimostrar(mi) nella futura II parte, matematica, di questo lavoro (se mai ci sarà), le soluzioni sono date da una coppia di funzioni *arbitrarie* della forma:

$$f(x + ct) + g(x - ct)$$

Così come sono scritte, la f(x+ ct) sembra essere un'onda in anticipo, nel senso che x = - ct, cioè, l'onda arriva in x un certo tempo -t prima di essere emessa. Sarebbe, cioè, una soluzione avanzata, e giustificarne la soppressione causa numerosi grattacapi ai fisici, soprattutto nella questione delle *equazioni del campo elettromagnetico e delle onde elettromagnetiche.* In effetti, non vi è alcuna ragione apparente per la rottura della simmetria dell'inversione temporale, che individua una direzione temporale preferenziale e quindi fa una distinzione tra passato e futuro. Una teoria invariante dell'inversione temporale è più logica ed elegante. Nonostante questa simmetria, un segnale che si propaga all'indietro nel tempo, cioè prima di essere emesso, non fu mai visto, e violerebbe il principio di causalità. Illustri fisici si sono sprecati per spiegare questa impossibilità fisica davanti a una soluzione matematica, senza convincere l'intera comunità matematica-fisica.

J. A. Wheeler ae R.P. Feynman: "Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation" , *Reviews of Modern Physics*. **17** (2–3): 157–181. (Attenzione: lungo e non facile).

Fortunatamente, per quanto ci riguarda, è funzione di (x + ct) anche una funzione del tipo di G[-(x+ct)] = G(-x -ct), che nel nostro esempio porge ct = -x, cioè un'onda che va *verso sinistra* col procedere del tempo. Naturalmente, ciò vale soprattutto per un'onda piana. Tutto rientra nell'ordine, ed è soprattutto in elettromagnetismo che il problema dei potenziali e delle soluzioni dell'equazione d'onda avanzate che muovono all'indietro *nel tempo* è stato discusso.

A parte questo (non piccolo) problema, la legge di Newton produce, per le corde vibranti, almeno una funzione che avanza nel tempo. La funzione può diventare stazionaria fissando un estremo della corda, ma questi sono casi particolari, oltre che i più interessanti. La forza responsabile di questo progresso è la tensione della corda vibrante.

Una simile equazione delle onde vale in tre variabili, x,y, e t, e spiega quello che succede alle membrane vibranti. Qui, la forza responsabile della propagazione è la tensione superficiale, che, come per le corde vibranti, dipende dal materiale.

Si potrebbe quindi pensare che le onde superficiali dell'acqua procedano allo stesso modo. Sappiamo che c'è una tensione superficiale (l'abbiamo appreso fin da bambini giocando con le bolle di sapone) e sospettiamo che possa propagare un impulso. Il problema è che, se si mettono i numeri giusti, le onde dovute alla tensione superficiale dell'acqua, dette "*onde capillari*", sono onde cortissime, anche se possono essere assai veloci. Le onde capillari prevalgono fino a circa λ = 1.73 cm, che sono le onde più lente possibili in acqua, e procedono alla velocità di 23 cm/s, 0.828 km/h. E questa esistenza di una *velocità minima* è un'altra stranezza delle onde superficiali in acqua, che vale la pena ricordare. *Ma come spiegare come onde capillari anche solo le regolari onde oceaniche, lasciando stare gli eccezionali trsunami?* Le onde oceaniche generate dal vento possono avere lunghezza d'onda di 100-200 m e velocità di 40 -50 km/h.

Si studiarono quindi gli effetti di altri fenomeni, tra il quale il più ovvio era la ***gravità.*** Quando passa un'onda generata in qualche modo, un particella d'acqua in superficie sale per l'incompressibilità dell'acqua, non avendo altro luogo in cui andare, e scende per effetto della gravità. Per questa ragione le onde che studieremo (e che sono le più comuni) sono dette ***"onde di gravità" (gravity waves)*** assolutamente da non confondersi con le ***"onde gravitazionali" (gravitational waves)*** della Relatività Generale.

A questo punto, però, era difficile trovare una funzione trattabile che portasse a un'equazione d'onda. Il Sommerfeld, nel suo testo citato, utilizza una non immediatamente intuitiva funzione detta "gradiente della velocità", che però si presta a una brillante trattazione matematica della lunghezza d'onda, della velocità di propagazione, dell'orbita delle particelle d'acqua, che rimangono in prima

approssimazione localizzate, come vedremo più avanti. Ma in questo mio saggio voglio mantenere la matematica al minimo e faremo a meno del gradiente della velocità.

III. 3. La propagazione delle onde in acqua profonda.

Come già notato, se mettiamo sull'acqua un oggetto che galleggi, per esempio un turacciolo di sughero, vediamo che, al passare delle once provocate dalla caduta del sasso, il turacciolo va su e giù, si muove di poco, avanti e indietro nella direzione dell'onda, ma, quando l'onda è passata, in pratica è tornato al punto di partenza. Non diversamente il passaggio di un'onda in una corda vibrante non sposta le particelle dal sito in cui si trovano.

Che le onde procedano senza spostare acqua, dunque, è un fatto sperimentale che più rigorose osservazioni di laboratorio confermarono. Forse, come si usava ai miei tempi, qualche ragazzino si dilettò a galleggiare in mare stando seduto in una camera d'aria di un camion, e notò che sostanzialmente le onde non lo trascinavano. Però si accorgeva di avanzare verso la riva quando era al culmine dell'onda e di essere riportato indietro quando era nel cavo dell'onda.

Lavorando su una bella animazione Surface Wave | CK-12 Foundation ho costruito due serie di "fotogrammi", che descrivono il moto di un galleggiante, che potrebbe essere una particella d'acqua in superficie, al passaggio di un'onda. Si assume che l'acqua sia profonda, perché la teoria rigorosa dimostra che in acqua (infinitamente) profonda le orbite delle particelle d'acqua sono circolari, di diametro sempre più piccolo con la profondità. In acqua poco profonda, invece, le orbite sono ellissi sempre più schiacciate, che diventano segmenti rettilinei a contatto col fondo, ove le particelle eseguono un moto di avanti-indietro.

Come si vede, su acqua profonda la particella d'acqua (o un galleggiante – rosso - di eguale densità) che sta sulla superficie dell'onda, in prima approssimazione resta sempre sulla superficie dell'onda, e compie un'orbita circolare sul piano verticale, col centro fisso sul piano ideale dell'acqua tranquilla**, e diametro eguale alla differenza di altezza tra il massimo (la cresta) e il minimo (il cavo) dell'onda.**

Come si può intuire, finché l'altezza dell'onda è tale che il cavo dell'onda resta abbastanza lontano dal fondo dell'acqua, possiamo utilizzare l'epprossimazione che le particelle d'acqua superficiali si muovano su orbite circolari.

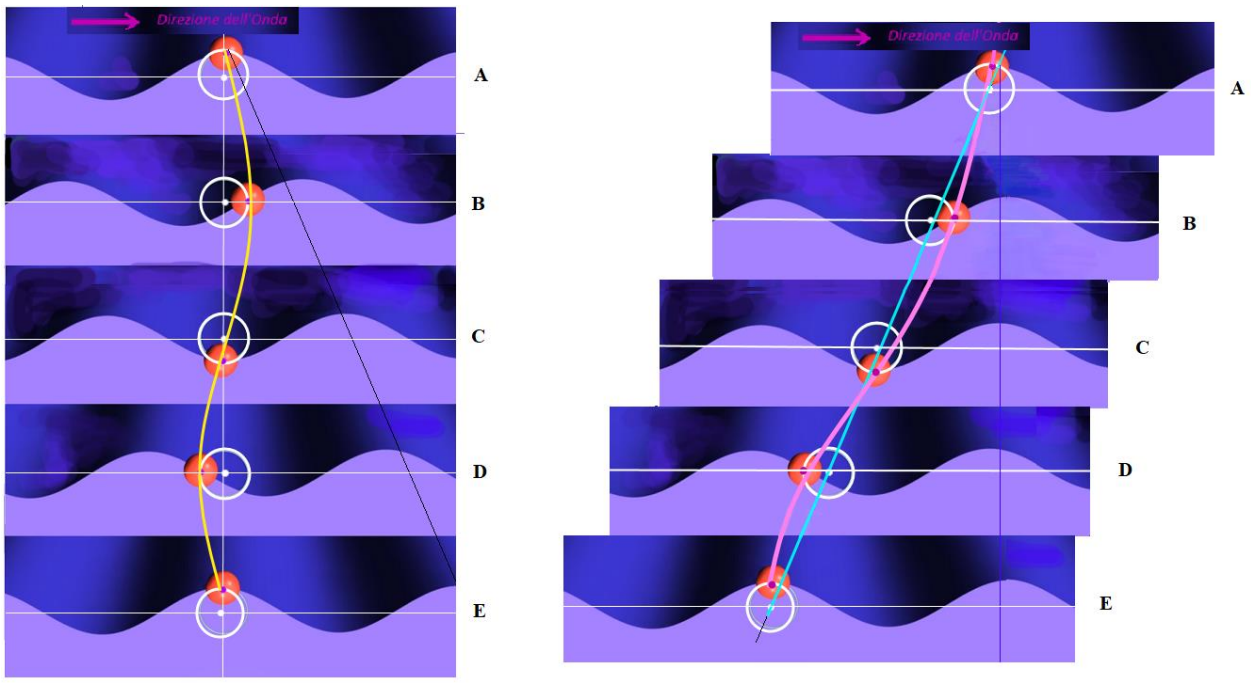


Fig.8

Il moto di un galleggiante, o di una particella d'acqua superficiale, visto in due sistemi di riferimento.

L'onda procede da sinistra a destra, e se lo specchio d'acqua fosse tranquillo, la sua superficie sarebbe all'altezza della linea bianca orizzontale. Noi dobbiamo seguire il moto del galleggiante rosso in superficie. Il punto color porpora indica il suo baricentro. Si noterà che esso è sempre sulla superficie dell'onda.

Ho scelto due sistemi di riferimento: il primo, a sinistra, in cui il centro dell'orbita (circolare) della particella è fisso; il secondo, in cui è fissa la cresta dell'onda. Il primo sistema è fisso se l'onda è alla superficie di uno stagno, ma sarebbe mobile se l'acqua su cui osserviamo le onde fosse acqua di un fiume che scorre tranquillo, indipendentemente dalle onde.

Si vede quindi che, mentre in prima approssimazione l'orbita è fissa nello spazio (a parte mie imprecisioni di disegno), con il centro fisso sulla linea orizzontale dell'acqua tranquilla, il baricentro porpora del galleggiante la percorre in senso orario, con velocità che al culmine dell'onda (Fotogrammi D, E=A, B) è diretta in avanti, e nel cavo dell'onda è diretta all'indietro rispetto al moto dell'onda.

Ad esempio, coll'avanzare dell'onda da D a E, il baricentro del galleggiante non può far altro che salire ed avanzare, perché sotto di lui e dietro di lui ci sarà acqua incompressibile, che non gli permetterà altri movimenti.

Teniamo intanto presente che la gravità, se possibile, fa scendere il baricentro.

Quindi, tra B e C il punto porpora avanzerà ancora, ma non potrà andare in avanti, perché l'acqua incompressibile avrà occupato il posto che lui occuperebbe, aiutata dalla gravità che richiama il baricentro in basso. Quindi esso scenderà all'indietro tra C e D.

Prima che le onde arrivino, le particelle d'acqua sono in quiete e non hanno energia cinetica. Invece, al passare dell'onda, le particelle entrano in moto sulla loro orbita ed acquistano energia cinetica, pur senza che l'orbita si sposti. Abbiamo quindi un'ulteriore conferma di quanto si è detto, che le onde sono un modo di spostare energia, non materia.

Dalla seconda figura, si vede che nel sistema di riferimento in cui l'onda, che procederebbe a velocità v_f, è tenuta fissa, quando il baricentro del galleggiante coincide con la cresta dell'onda, esso arretra rispetto all'onda con velocità (- v_f + v), mentre nel cavo dell'onda, ruotando in senso orario, esso arretra con velocità –(v_f +v). In quanto a v, velocità , che supporremo uniforme, del galleggiante nella sua orbita circolare, essa è data da $v = \frac{2\pi r}{T}$, dove T è il periodo di rotazione sull'orbita e r è il raggio dell'orbita in cui supporremo che 2r sia eguale alla differenza di altezza tra cresta e cavo dell'onda.

Si può quindi scrivere l'equazione dell'energia: la differenza fra l'energia cinetica alla cresta dell'onda e l'energia cinetica nel cavo sarà data dalla differenza di energia potenziale gravitazionale. Supponendo che il galleggiante sia una particella d'acqua, o abbia comunque la stessa densità, ed abbia massa m, abbiamo:

1) al cavo dell'onda: $\frac{m}{2}v(cavo)^2 = \frac{m}{2}(v_f + 2\pi r/T)^2$

2) alla cresta dell'onda: $\frac{m}{2}v(cresta)^2 = \frac{m}{2}(v_f - 2\pi r/T)^2$

La differenza delle due energie cinetiche, eguagliata al potenziale, è

$$\frac{m}{2}v(cavo)^2 - \frac{m}{2}v(cresta)^2 = \frac{4\pi r v_f m}{T} = 2rmg \text{ , da cui}$$

$$\frac{2\pi}{T}v_f = g$$

Ma, per un'onda che ammettiamo approssimativamente sinusoidale, $\lambda = v_f\, T \rightarrow v_f = \frac{\lambda}{T}$

$$v_f = \frac{\lambda g}{2\pi v_f}$$

Da cui discendono gli importanti risultati:

(2) $$\boldsymbol{v_f = \sqrt[2]{\frac{\lambda g}{2\pi}} \rightarrow \lambda = 2\pi\frac{v_f^2}{g}}$$

Il risultato può essere ottenuto rigorosamente, ma, per quanto ci concerne, il calcolo presentato qui sopra, almeno come "pro-memoria", può bastare. In effetti, nei testi che ho consultato, non ho trovato motivi sufficienti per eseguire il calcolo nel sistema di

riferimento dell'onda in moto, a parte il fatto che la non banale dipendenza della velocità di fase dalla radice quadrata della lunghezza d'onda risulta corretta, con tutti i necessari fattori pigreco. Ad ogni modo, mi riserbo di eseguire il calcolo corretto in altra pagina di questo stesso sito.

III.4 Velocità di fase e velocità di gruppo.

Alle onde di superficie (fino a un certo punto) dell'acqua si attribuiscono non una, ma due velocità, la velocità di fase, che si riferisce a un'onda di una sola frequenza, e la velocità di gruppo, che si riferisce a pacchetti di onde di varie frequenze. Entrambe le velocità nella forma completa (non approssimata) dipendono dalla lunghezza d'onda. Se la velocità di fase è indipendente dalla lunghezza d'onda, essa diventa eguale alla velocità di gruppo, e noi diciamo che il mezzo in cui si propagano è "non dispersivo". Se invece le due velocità sono differenti, il mezzo è detto dispersivo. Ma, e questo è forse una sorpresa, se osserviamo un modo ondoso, noi vediamo sempre che le onde si spostano alla velocità di gruppo. Esse appaiono spostarsi alla velocità di fase solo se le due velocità sono eguali, cioè il mezzo non è dispersivo, o intervengono altri fenomeni, che raggruppano di preferenza onde che hanno eguale velocità di fase.

Supponiamo per semplicità che le nostre onde siano sinusoidali. Non è quasi mai vero: l'onda ha una cresta più aguzza e un cavo più piatto. Ma in prima approssimazione una sinusoide va bene.

Come si definisce una velocità di fase?

Sebbene un'onda no abbia quasi mai un profilo sinusoidale, ne è in genenre una buona approssimazione, per cui il suo profilo η (o l'altezza misurata dal livello dell'acqua tranquilla) è normalmente descrittto da una sinusoide

$$\eta = a\ \sin(kx - \omega t + \varphi_0)$$

La fase dell'onda, cioè l'argomento della funzione seno, che ci dà l'ampiezza dell'onda e comprende spazio e tempo, come già richiesto dalle citate soluzioni dell'equazione di d'Alembert o delle onde.

Il problema è che in un disegno noi vediamo qualcosa di statico, e, ad esempio, la velocità non può essere valutata.

La fase, sia che usiamo una notazione trigonometrica o esponenziale, è data da

$$Fase = (kx - \omega t + \varphi_0)$$

in cui possiamo mettere per semplicità una fase iniziale $\varphi_0 = 0$.

Ricordiamo che λ è detta lunghezza d'onda; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ è detto numero d'onda; ν è detto frequenza; $T = \frac{1}{\nu}$ è il periodo, e $\omega = 2\pi\nu$ è la frequenza angolare. Come si vede, tra k, λ, ν, T, esistono varie ovvie relazioni, che si arricchiranno introducendo la velocità di fase, che viene calcolata osservando dopo quanto tempo la stessa fase si riproduce.

Perché la fase sia la stessa, deve essere

$$(kx - \omega t) = \big(k(x + \Delta x) - \omega(t + \Delta t)\big) = (kx - \omega t + k\Delta x - \omega\Delta t)$$

Ma questo significa che $(k\Delta x - \omega\Delta t) = 0$. La fase dell'onda è quindi immutata dopo uno spazio Δx corrispondente a un tempo Δt , il che ci permette di affermare che la velocità con cui la fase si propaga, o, più brevemente, **la velocità di fase, v_f, sovente chiamata c,** vale:

$$c \equiv v_f = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$$

con segno positivo. Questo ci spiega anche perché per un'onda progressiva la fase è scritta $Fase = (kx - \omega t)$ e non $Fase = (kx + \omega t)$ o anche $Fase = -(kx + \omega t)$, in altre parole, le onde sono progressive se k e ω hanno segno opposto, e retrograde se hanno segno uguale.

Come si è detto, in un mezzo "non dispersivo", con locuzione che proviene dall'ottica, abbiamo che c è indipendente da k ovvero da λ , e $\omega = c\,k$, semplice relazione. In un mezzo "dispersivo", invece, la velocità di fase dipende dalla lunghezza d'onda di una data onda, e la relazione tra frequenza e lunghezza d'onda è più complicata.

Le onde di frequenze assai diverse, in genere interferiscono distruttivamente. Se però hanno frequenze simili, possono interferire costruttivamente, producendo onde maggiori, che si propagano con una loro velocità, che è appunto la velocità di gruppo, la cui espressione in termini di ω e k è la **"relazione di dispersione":**

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Una dimostrazione classica di tale relazione, che è dovuta a Stokes e non mancò di essere criticata, è data da due onde di frequenze ω_1 e ω_2 di poco differenti, diciamo ω_1 e $\omega_1 + \Delta\omega$. Dato che λ dipende da ω, avremo anche due diverse λ e due diverse k. Le onde si sovrappongono per semplice addizione e producono un'altezza η dal piano dell'acqua ad equilibrio data da:

$$\eta = a\,[\sin(k_1 x - \omega_1 t) + \sin(k_2 x - \omega_2 t)]$$

dove per semplicità si è posto che le due onde abbiano la stessa ampiezza. Il gruppo d'onde così prodotto ha il carattere di un battimento, con interferenza costruttiva quando la diffferenza delle due fasi è data da 2nπ e distruttiva quando la differenza è data da (2n+1)π. Applicando le note formule di prostaferesi, e introducendo ovvie notazioni,

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = k_0, \qquad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_0, \qquad k_1 - k_2 = \Delta k, \qquad \omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$$

si ottiene la formula

$$\eta = C\left[\sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\ x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)\right],$$

dove l'ampiezza C è data da

$$C = 2a\cos\frac{1}{2}\,(x\,\Delta k - t\,\Delta\omega\,)$$

Abbiamo quindi delle **onde** che si propagano con una velocità di fase media

$$v_f = \frac{\omega_0}{k_0}$$

mentre l'**ampiezza** C si propaga con velocità di gruppo data da:

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

che, al limite per lunghezze d'onda molto vicine diventa la relazione differenziale citata. Se si osserva il gruppo di quattro "fotogrammi" presi da un'animazione tratta da Wikipedia edizione inglese), si nota che i punti verdi sono fissi su un'ampiezza costante, e quindi si muovono con velocità di gruppo, come il resto del gruppo d'onde, mentre il punto rosso si muove con la velocità di fase su un'onda.

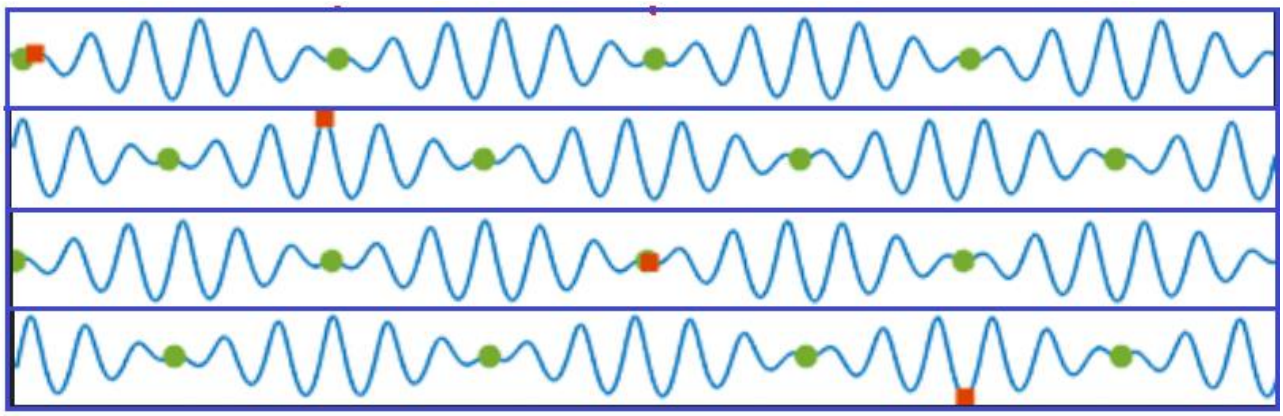


Fig.9

https://en.wikipedia.org/wiki/Group_velocity

In questa serie di fotogrammi vediamo quattro gruppi di onde, in cui coppie di punti verdi ne delimitano i confini, e procedono con la velocità di gruppo, e un punto rosso che invece procede a velocità di fase. Tale velocità di fase, come si può subito verificare, è doppia della velocità di gruppo (relazione valida per l'acqua profonda). Se si guarda **direttamente all'animazione** da cui sono tratti i quattro "fotogrammi" si vede che

nuove onde entrano nel "gruppo" dalla sinistra, al procedere del punto rosso, la loro ampiezza cresce e poi decresce fino ad uscire dal gruppo dalla parte destra. Il gruppo, per conto suo, ha sempre la stessa forma.

Un risultato evidente dell'equazione

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

è che la velocità di gruppo è eguale alla velocità di fase se ω= ck, e c è costante indipendente da k. Non è il caso della nostra velocità di fase in acqua profonda

$$v_f = \sqrt[2]{\frac{\lambda g}{2\pi}}$$

IV. Approssimazione della "scia di Kelvin".

IV.1 Il programma.

Lo schema (pattern) della scia è stato già qualitativamente descritto nelle pagine 3 e seguenti, in cui si parla di due sistemi di onde, il primo, (i), costituito da piccole onde trasversali rispetto dalla direzione del natante; il secondo, (ii), perpendicolare alla direzione del natante.

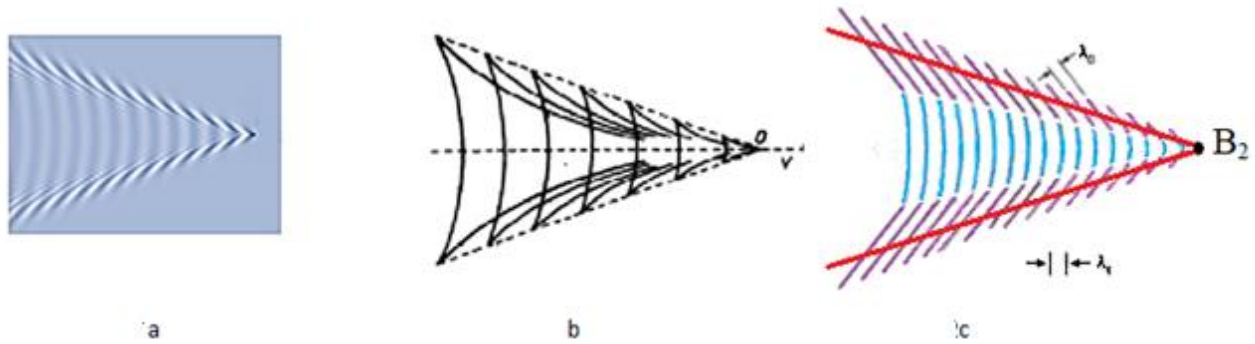


Fig.10

Il nostro programma è abbastanza semplice. Nella figura 11a abbiamo il caso ideale, simulato in laboratorio, che noi vorremmo riprodurre matematicamente. Nella figura 11b abbiamo il calcolo matematico rigoroso *("Kelvin wake")* fatto nella seconda metà del secolo XIX. Nella figura 11c abbiamo il risultato approssimato, ottenuto con più modesti mezzi matematici, del quale noi ci vogliamo accontentare. Le onde del sistema (i), di colore violetto, risultano rettilinee invece che ricurve. Ma non mi pare che il progresso della 11b

rispetto alla 11c sia sostanziale. In effetti, ad esempio, la connessione fra le onde del sistema (i) e quelle del sistema (ii) non è visibile né in fig 11a, né in fig. 11c.

Francamente, mi pare che il metodo "elementare", dovuto a **Frank. S. Crawford della UCB (Am.J.Phys, 52(9),p.782)),** sia geniale, e illustrativo quanto basta. Le formule che dovrebbero essere utilizzate per arrivare rigorosamente alla fig. 11b sono abbastanza raccapriccianti, anche se non impossibili, ma, paragonando le tre figure 11, non giustificano lo sforzo matematico, a meno che esso non diventi fine a sé stesso.

Riassumo ora che cosa vogliamo mostrare.

I. La prima cosa da notare è che il natante e i due sistemi di onde formano uno schema (*pattern*) che che si muove tutto insieme, quindi alla velocità del natante. Visto dall'alto, senza punti di riferimento, potrebbe sembrare fermo. Le onde del sistema (ii) sembrano fisse rispetto al natante, il che vuol dire che procedono alla stessa velocità. Sembra un'osservazione da poco, ma, notando che la velocità di fase di un'onda primaria è la velocità del natante, l'impressione che abbiamo è che le onde della scia, che dovrebbero procedere alla velocità di gruppo (che, come vedremo, è metà della velocità di fase, e quindi metà della velocità del natante) dovrebbero in qualche modo restare indietro.

(i) Sistema (i) – piccole onde divergenti, a V, rispetto alla direzione del moto.

II. In secondo luogo vogliamo dimostrare che indipendentemente dalla velocità del natante (purché non sia né troppo alta né troppo bassa, diciamo di almeno qualche nodo), l'angolo di apertura della V del sistema (ii) è costante, circa 40°. Possiamo anche essere più precisi.

III. In terzo luogo vogliamo dimostrare che le onde del sistema (i) hanno creste che formano un angolo di circa 55° rispetto allla direzione del natante e quindi si propagano formando un angolo di 35° rispetto alla medesima direzione.

IV. In quarto luogo, ricordiamo che la lunghezza d'onda λ_0 (la distanza tra le creste) del sistema (i) è proporzionale al quadrato della velocità del natante, circa 8.5 m per una velocità di 16 km/ora (circa 10 miglia per ora).

(ii) Sistema (ii) . grandi onde perpendicolari alla direzione del moto.

V. Il sistema (ii), come si è detto, è costituito da fronti d'onda perpendicolari al moto del natante. Ciascuno può essere approssimato con un arco di cerchio. Il raggio di curvatura, R, di ogni onda, è dato dalla distanza dal punto di origine al punto in cui il fronte dell'onda incrocia la traiettoria del natante al natante stesso (ma ovviamente, il centro di curvatura è a distanza 2R dal punto in cui l'onda incrocia la scia). Il disegno sembra dare

l'impressione che la cresta più vicina al natante sia quasi rettilinea, e quindi si parte d'un'onda con centro più lontano. Non è così: l'arco sembra più rettilineo perché ne vediamo una porzione più piccola, in quanto è ristretta dalla V del sistema (i) e dalle onde stesse del sistema (i).

VI. La lunghezza d'onda di questo sistema è **$\lambda_1 = (3/2)\ \lambda_0$,** circa 13 m per una velocità 16 km/h (10 mph). Questo *pattern* procede anch'esso alla stessa velocità della barca.

IV.2 Relazione tra velocità di gruppo e velocità di fase in acqua profonda.

Come sappiamo, la velocità di fase v_f è data da:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{1/2}$$

Da cui discende che

(2) $$\lambda = \frac{2\pi\, v_f^2}{g}$$

Possiamo ora partire dalle due relazioni:

$$\boldsymbol{v_g = \frac{d\omega}{dk}} \quad \text{e} \quad v_f = \frac{\omega}{k}\text{, da cui: } \omega = k\, v_f$$

Abbiamo allora:

$$\frac{d\omega}{dk} = v_f + k\,\frac{dv_f}{dk} = v_f + \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{dv_f}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk} = v_f - \lambda\,\frac{dv_f}{d\lambda}$$

Ogni lunghezza d'onda ha la sua velocità (in acqua profonda), che abbiamo dato sopra come:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{1/2}$$

$\lambda\,\frac{dv_f}{d\lambda} = \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{g}{2\pi\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}v_f,\ con\ v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_f - \frac{1}{2}v_f,$ che ciporta al risultato chiave, già annunciato:

$$\boldsymbol{v_g = \frac{1}{2}v_f}$$

IV.1 Le "piccole" onde trasversali (sistema (i))

Per incominciare ragioniamo sulle velocità di fase.

Il coraggioso lettore vedrà che la dimostrazione geometrica delle piccole onde trasversali e del famoso (semi) angolo di apertura della V della scia (19.46° circa) ruotano su un solo teorema di gometria classica, che tutti i triangoli inscritti in una semicirconferenza che hanno per base il diametro, sono triangoli rettangoli con un vertice sulla circonferenza, e il diametro del semicerchio è la loro ipotenusa. Dimostrarlo è immediato, perché così è stato costruito il cerchio, ad esempio C_1, sulla base del concetto di angolo di Mach. Il tratto OW si tracci il cerchio passante per il vertice sulla circonferenza, con centro in un estremo del diametro. La sua tangente dall'altro estremo del diametro al cerchio in quel punto forma un angolo retto con il raggio.

Si consideri la Fig. 11. Mentre nel caso della Fig.5 avevamo una sola onda che aveva una sola velocità di fase inferiore alla velocità della sorgente o natante, ora si consideri che in un punto generico B_1 della traiettoria percorsa, fisso, la sorgente B_2(mobile) , perturbando l'acqua tranquilla (o quasi) ha emesso onde *che hanno diverse velocità di fase*, tra cui una (la C_0) che ha la stessa velocità della sorgente e quindi le resterà attaccata. In più ci saranno altre onde con altre velocità di fase, e per ognuna di esse potremo disegnare un diagramma del tipo della Fig.5, in cui le onde più veloci sono quelle che inseguono più da vicino il punto B_2 e la tangente più vicina alla verticale (vedi Fig.3). Onde molto lunghe potranno anche superare in velocità il natante, ma non ce ne occuperemo. Ciò sarà vero per ogni punto della rotta, che supporremo rettilinea, del natante. Ho disegnato (la metà superiore) di sette cerchi estremi prodotti da queste onde nel tempo in cui il natante B_2 percorre la distanza B_1 - B_2 . Ognuno di loro possiede la sua brava copia del diagramma di Fig. 5, le varie onde **emesse in B_1** raggiungono i punti W_i, che, come si vede dalle Fig.5 e 11, giacciono tutti su una semicirconferenza. Questo è dovuto al teorema accennato: tutti i triangoli inscritti in una circonferenza, la cui ipotenusa è il diametro, sono rettangoli.

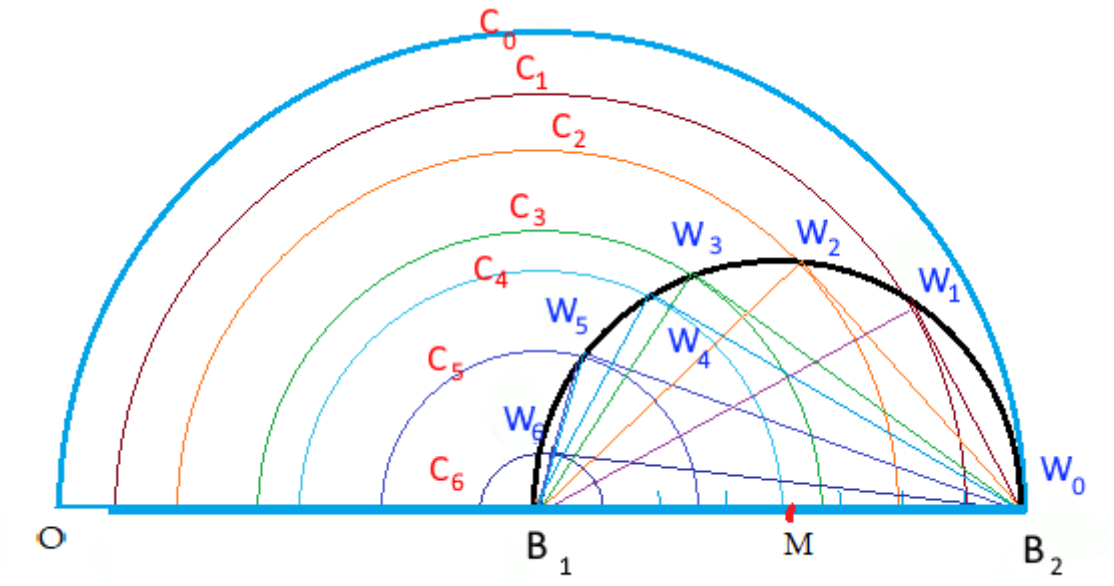


Fig.11

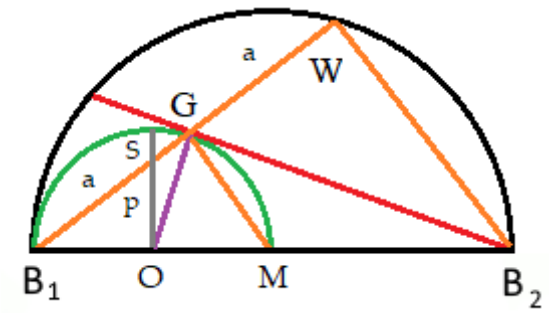


Fig. 12

La (semi) circonferenza azzurra ha per raggio la distanza B_1B_2 ,la circonferenza nera è quella raggiunta dalle onde originate allo stesso istante e luogo da B_1. La circonferenza verde è quella dei punti medi raggiunti da pacchetti d'onda che si muovono con velocità di gruppo eguale a metà della velocità di fase di tutte le onde. Le loro creste sono perpendicolari alla linea di propagazione principale B_1W.

Possiamo tuttavia supporre che tutte queste onde viaggino in gruppi di onde di frequenze affini. Questi gruppuscoli procederanno ciascuno con la sua velocità di gruppo, che è metà della velocità di fase dell'onda predominante (da individuarsi in seguito). Essi raggiungeranno quindi i punti G_i. Ma una semplice ispezione della Figura 13, che è stata disegnata punto per punto, ci dice che mentre i punti W sono distribuiti su un'ampia circonferenza, i punti medi G sono distribuiti su una curva che, anch'essa disegnata punto per punto, assomiglia nondimeno a una semicirconferenza con raggio metà di quella descritta dai punti W. In effetti, si può dimostrare che i punti che uniscono le mediane di qualsiasi cateto opposto a B_2 di tutti i triangoli rettangoli che hanno il diametro del cerchio delle W per ipotenusa, disegnano un semicerchio (verde) di raggio metà (Fig.12).

Questo avviene perché i triangoli B_1WB_2 e B_1GM, dove M è il centro del cerchio delle W, avendo un angolo in comune e due lati in proporzione, sono simili, il che comporta che l'angolo in G sia retto come l'angolo in W, e quindi giaccia su una semicirconferenza di diametro R, come mostrato in Fig.12. Questo significa che i fronti delle onde di gruppo formeranno in G delle creste (brevi per l'interferenza con le onde vicine) perpendicolari alla direzione B_1W.

Veniamo ora alla Fig. 13. Tracciando le congiungenti B_2G_i, vediamo che anche nella regione di lunghezze d'onda non vicinissime a λ_0 , che è l'onda "predominante" che raggiunge G, il punto di tangenza del cerchio dei punti medi con la linea della scia, da identificarsi, come si vede dalla figura, gli angoli delle varie scie saranno assai vicini a 20 gradi (linea rossa). In particolare i punti G_4 , G_5 , G_6 , G_7 sono quasi allineati. Questo spiega il formarsi di una scia (ancorché non troppo netta) intorno a una retta che forma un angolo di circa 20° colla traiettoria del natante.

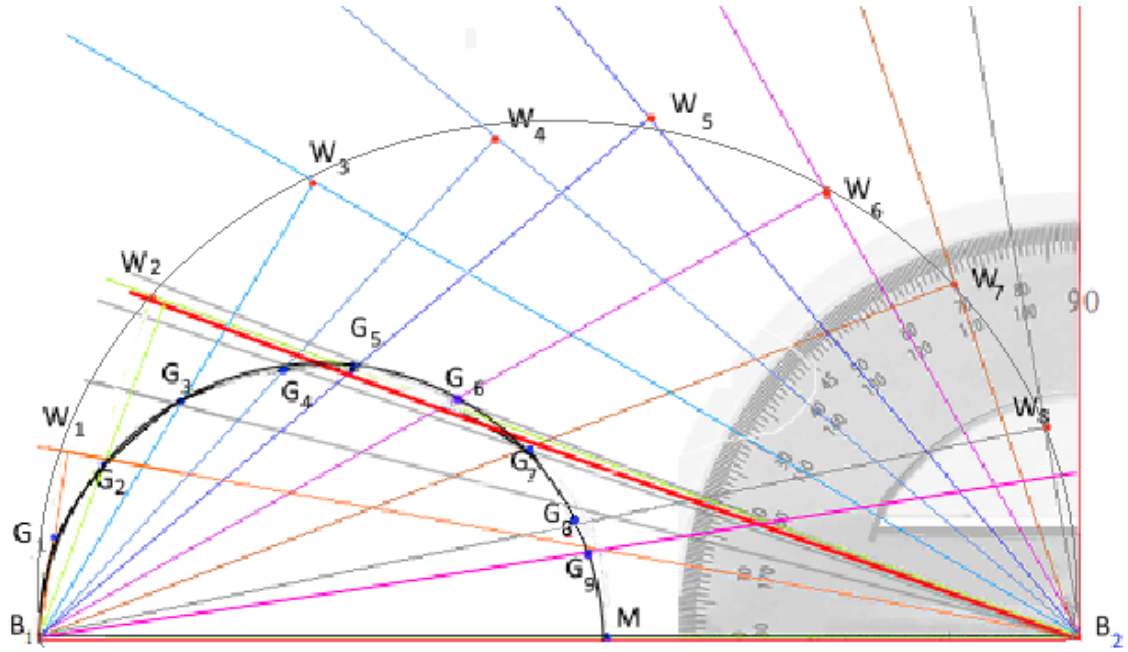


Fig.13

L'arco che congiunge B_1 e M è un semi-cerchio, come dimostrato in base alle figure 11, 12, 13. Ma, ciò che più conta, sono le sue proporzioni: il suo raggio è ¼ della distanza tra B_1 e B_2. Il suo massimo S, che può anche essere trovato analiticamente, è però ovvio, ed è tra G_4 e G_5 in figura 13, essendo dato dalla perpendicolare t (= SO) attraverso il centro del cerchio B_1 - M. Inoltre, è alto ¼ del diametro B_1B_2. Infine, si trova a 3/4 della distanza da B_2. .

Ciò significa che i cateti dei triangoli che hanno per ipotenusa S B_2 stanno tutti nella proporzione 1: 3 . A questo punto, però, diversi autori commettono un errore, individuando G con S, il massimo del cerchio B_1 - M, **il che non è.** G è il punto di tangenza della linea di scia con il cerchio B_1 - M, ed è maggiore dell'angolo SB_2B_1.

Infatti, quest'ultimo angolo è Atan (1/3) = 0.321751 = 18.44°. La differenza dall'angolo vero è minima, e quasi invisibile in una scia che non è formata da una retta perfetta, ma da un sia pure ristretto ventaglio di rette. Tuttavia, per trovare il vero angolo, occorre considerare che la congiungente, lunga R, di O con G, forma un angolo retto con la congiungente GB_2, e quindi l'angolo non è dato da Atan(1/3) ma da ArcSin(1/3) = **19.48°.** Questo è metà dell'angolo di apertura della scia. In altre parole, il risultato principale lo abbiamo potuto ricavare senza ricorrere al calcolo differenziale, ma solo alla trigonometria elementare e a pochi teoremi di geometria elementare.

Utilizzando qualche concetto e formula di matematica in più, si può ovviamente ottenere di più.

Trovare l'angolo di apertura della scia ed altri valori interessanti in modo esatto non è difficile, usando un po' di trigonometria e una derivata.

Siano $B_2W = 1$ e $B_1G = GW = a$

Sia $\theta = \text{Atan } 2a - \text{Atan } a$

Ricordando la Figura 12 ricavata più sopra, in forma schematica, *vediamo che si tratta di massimizzare θ.* Ma il calcolo differenziale fu inventato proprio per questo: occorre porre eguale a zero la derivata prima di

$$\theta = \text{Atan } 2a - \text{Atan } a$$

Otteniamo:

$$\frac{d\theta}{da} = \frac{2}{1+4a^2} - \frac{1}{1+a^2} = \frac{2+2a^2-1-4a^2}{1+5a^2+4a^4} = \frac{1-2a^2}{1+5a^2+4a^4} = 0$$

La soluzione dipende solo dal numeratore, perché il denominatore non è mai nullo. Inoltre, delle due radici ci interessa solo la radice positiva. Quindi:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Inserendo questo valore di a nell'equazione θ = Arctg 2a – Arctg a, otteniamo

$$\theta = \text{Atan } 2a - \text{Atan } a = \text{Atan } \sqrt{2} - \text{Atan } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Ora, abbiamo due vie. O trovare separatamente i valori di Atan $\sqrt{2}$ e di Atan $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, che si trovano sulle tavole o in rete (facilissimo), oppure trovarne uno solo e utilizzare un teorema di trigonometria che dice che in generale

$$Atan\ x - Atan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

In effetti, cercando sulle tavole o in rete, troviamo che $\text{Atan } 2a = \text{Atan } \sqrt{2} = 54.74\,°$; $\text{Atan } a = \text{Atan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 35.26°$, la cui somma è 90°, mentre la differenza è il nostro risultato principale:

$$\boldsymbol{\theta_0 = 19.48°}$$

Ma per lo stesso prezzo abbiamo appreso qualcosa di più: cioè che le incomplete onde che tendono ad arrivare a W si propagano in una direzione che rispetto alla rotta del natante forma l'angolo

$$\theta_1 = \text{Atan } \sqrt{2} = 54.74°$$

Per qualche motivo, questo angolo non è ignoto né in geometria né in fisica, anche se non proprio elementare, e viene chiamato "angolo magico". Se ne può cercare il motivo su en.wikipedia, alla voce "Magic angle".

L'angolo perpendicolare alla linea di propagazione delle creste di queste onde secondarie, è l'angolo che esse formano con la direzione della sorgente, e vale 90°-54.74° = 35.26°.

Ma il punto B_1 è un punto "qualsiasi" della rotta del natante. Ogni punto produrrà un disturbo, a cui saranno collegate alla stessa maniera gruppi di onde che avanzano nella medesima direzione, e formano con la direzione del natante lo stesso angolo. Tuttavia, non tutte le onde sopravviveranno: la maggior parte saranno cancellate da interferenza distruttiva con le onde generate in punti precedenti della rotta. Solo quelle che hanno la giusta relazione di fase con la maggioranza delle onde precedentemente emesse continueranno ad esistere. Vedremo meglio questa situazione trattando le onde del sistema (ii).

Inoltrre, i "pacchetti" di onde generati dai punti della rotta, diventano visibili solo quando attraversano la linea di scia, a circa 19.5° di inclinazione rispetto alla rotta, producendo per un breve tempo un'interferenza costruttiva.

Nella figura 14, "simmetrizzata" , vediamo come le onde (violette) emesse da un secondo punto B'_1 abbiano la stessa direzione e inclinazione di quelle emesse dal punto B_1.

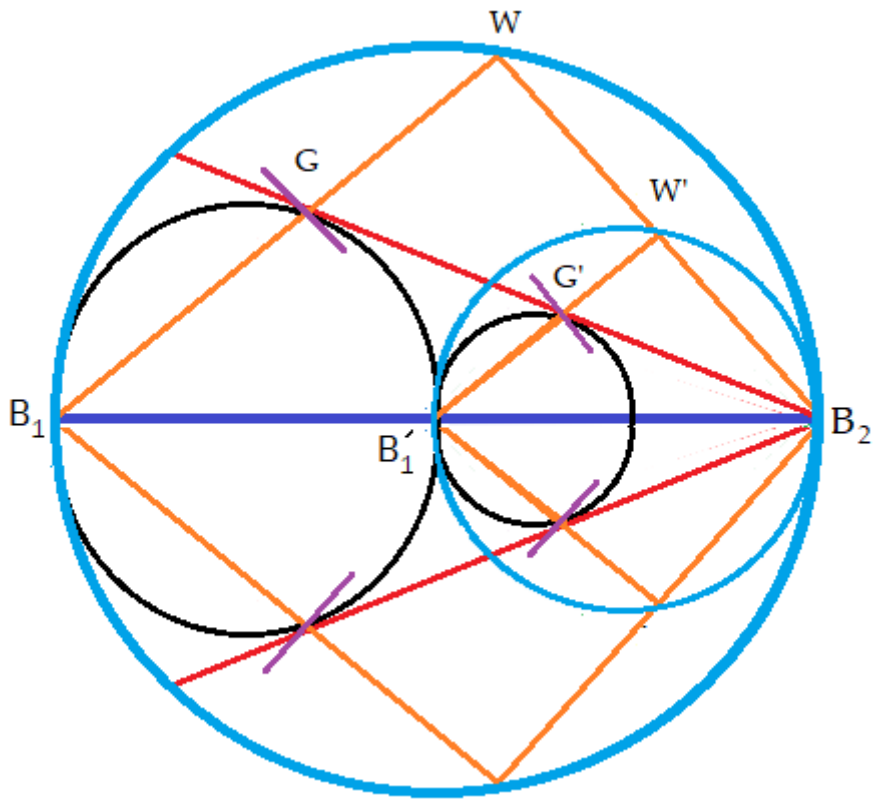


Fig.14

Per trovare la velocità di fase delle onde utilizziamo la (1), di pag7.

(3) $$v_f = v_0 \, sin \, \theta_1 = v_0 \sin (54.74°) = 0.816 \, v_0$$

La velocità di gruppo è la metà, cioè $v_g = 0.408 \, v_0$. Inoltre sappiamo dalla (2), pagg. (18 e 23) che

$$\lambda_0 = \frac{2\pi \, v_f^2}{g}$$

La quale, per una velocità del natante data in km/h, v_{0km}, porge il risultato

$$\lambda_0 = 0.033 \, v_{0km}^2 \text{ m.}$$

che, per una velocità di 10 km/h porge una lunghezza d'onda di 3.3 m, e per 10 mph (= 16 km/h) , 8.45 m cioè 28 piedi. L'anatra di figura 2a, con lunghezza d'onda delle onde trasverse di circa 20 cm (misurate ad occhio), sembra andare alla velocità di circa 2.5 km/h. Plausibile, se la prende comoda.

IV. Il sistema (ii) , onde perpendicolari alla direzione della sorgente.

Mentre la sorgente procede, onde circolari sono generate in ciascun punto della sua rotta. Esse incontrano la linea di rotta perpendicolarmente. Lontano dalla loro origine, all'incontro con la linea di rotta le onde si confondono con la tangente, apparendo quasi segmenti di linee rette. Come si è detto fin da principio, la semplice osservazione ci dice che il *pattern* procede come se fosse fissato alla sorgente, per cui la velocità di fase delle onde nel punto d'incrocio con la linea di rotta deve essere eguale in valore (e direzione) alla velocità v_0 della sorgente. Qui la velocità di gruppo (apparente) è forzata a coincidere con la velocità di fase. Questo determina la lunghezza d'onda delle onde che inseguono la sorgente, in base alla relazione:

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\, v_f^2}{g} = \frac{2\pi\, v_0^2}{g}$$

Che, nel caso delle 10 mph, 4.47 m/s, produce $\lambda_1 =$ 12.8 m (42 piedi). La frequenza di oscillazione corrispondente è $\nu_1 = v_0 / \lambda_1$ = 0.34 Hz, un'oscillazione ogni 2.94 secondi (periodo T).

Paragonando le relazioni utilizzate per ottenere le lunghezze d'onda dei due sistemi di onde, vediamo che esse sono proporzionali:

$$\lambda_1 = 1.502\, \lambda_0 \cong \frac{3}{2}\lambda_0$$

In ultima analisi è solo dalla distanza tra le creste delle onde di uno dei due sistemi, a scelta, che noi possiamo avere un'idea della velocità della sorgente sia essa un'anatra o una nave (meglio se a vela).

Il *Crawford* ci ha così portati a una abbastanza chiara visione dei due sistemi di onde che accompagnano il natante restando invariati. Se si accontentasse di dire che le onde perpendicolari alla scia sono delle rette (ciò che dalle Fig. 2 e dalla simulazione in Fig.11a appare più accettabile di quanto egli non sembri credere), ci potremmo anche accontentare noi. Tuttavia il Crawford preferisce tentare una qualitativa determinazione dei raggi di curvatura delle onde del sistema (ii), e ci abbandona addentrandosi in una derivazione a mio parere molto poco chiara dell'identificazione dei centri di cuvatura delle onde visibili sulla scia del natante. Io penso di poterla ricostruire come segue.

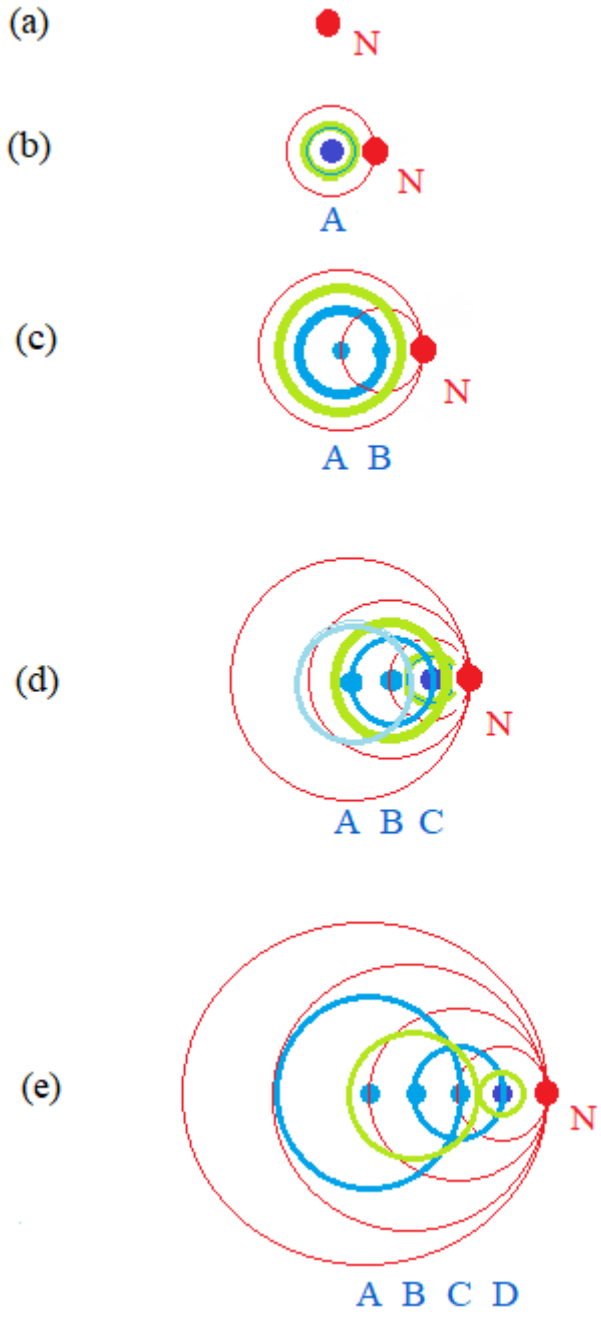


Fig.17

In figura 17 ho riprodotto cinque fotogrammi esplicativi (!), che rappresentano la situazione ad intervalli di tempo T. Il natante N, rappresentato del punto rosso, procede percorrendo una distanza λ_1 tra un fotogramma e l'altro. I punti azzurri sono le posizioni precedenti del natante, che entrano in oscillazione con lunghezza d'onda λ_1 e frequenza $\nu_1 = v_0 / \lambda_1$ giuste, incominciando da quando il natante li attraversa. Le onde rosse sono onde di un'unica frequenza che procedono con velocità di fase eguale alla velocità del natante, e quindi il loro fronte passa sempre per il punto rosso. Nei tempi intermedi il punto per cui passa il natante emetterebbe anche lui la sua onda principale, ma questa sarebbe più o

meno in controfase rispetto all'ultima onda eccitata: ad esempio, se il natante avesse emesso un'onda tra (a) e (b), questa in (b) si troverebbe nell'anello verde (controfase) e sarebbe cancellata.

Oltre alla velocità di fase, con la quale si propagano le onde rosse, che sono gruppetti di onde speciali in quanto si muovono alla velocità di N, c'è anche la lunghezza d'onda visibile, quella del gruppetto d'onde, che procede con velocità di gruppo, che è metà della velocità di fase.

Non si vede quindi un'onda di gruppo in (b), perché il gruppetto cadrebbe proprio dove c'è l'onda verde, in controfase con le onde che compongono il gruppetto.

Si vede invece la prima onda di gruppo ben formata in (c). Essa ha raggiunto il punto medio tra A e N, come sappiamo fin da pagina 24.

Non si vede un'onda di gruppo in (d), (di colore azzurro chiaro) intermedia prodotta in A, perché il suo fronte cadrebbe in controfase, tra B e C, insieme al cavo di onda (verde) prodotta in C.

Si vede invece una seconda onda di gruppo in (e), con fronte in C, a mezza via tra A e N. Quindi, se osserviamo sulla direzione della rotta, a una distanza L da N un fronte d'onda di gruppo, che supponiamo sia porzione di un'onda circolare le cui parti non visibili sono state cancellate da varie interferenze, il **centro di curvatura** di tale onda sarebbe in un punto a distanza 2L da N, sempre sulla rotta rettilinea.

Come questo schema mostra, e continuandolo confermerebbe, il punto N è inseguito da fronti d'onda che incrociano la rotta rettilinea nei punti $n\lambda_1$, generati da punti dove il natante N è passato a distanze $2n\lambda_1$, e lo schema rimane costante, anche per il motivo che segue.

Apparentemente, poiché il pattern, formato da onde di gruppo, procede alla stessa velocità del natante, se ne dedurrebbe che in questo caso la velocità di gruppo è eguale alla velocità di fase, mentre dovrebbe essere la metà. Si noti però che si tratta di onde di gruppo partite da punti (fissi nell'acqua) diversi, e la loro velocità, misurata dal punto di emissione, è metà della velocità di fase delle onde rosse, come le figure mostrano e come deve essere.

Diventa allora semplice preparare il disegno delle onde perpendicolari alla direzione del natante:

1) si segnano sulla rotta (rettilinea) punti a distanza costante (che corrisponderenbbero ai fronti d'onda dei gruppi d'onde, la cui distanza è λ_1). Per ogni punto a distanza $n\lambda_1$ si cerca il centro del fronte a distanza $2n\lambda_1$ e si traccia il cerchio. Si aggiungono le due semirette ad angolo 19.48 e il primo disegno è pronto (Fig. 18a). Si noti il groviglio di interferenze al di fuori dell'angolo così descritto.

2) si cancellino tutte le linee inutili, lasciando solo i fronti d'onda compresi fra le due semirette. Si cancelli anche le parti delle onde ircolari che si propagano all'indietro (Fig.18b).

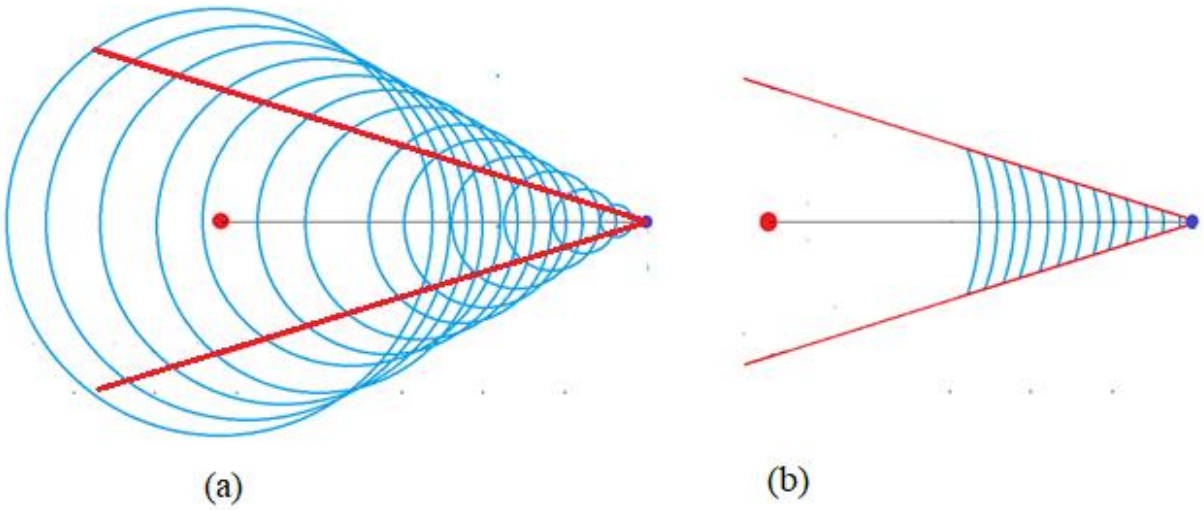


Fig.18

Completiamo in Fig. 19 infine il quadro aggiungendo le onde del sistema (i), e paragoniamo al nostro obiettivo, la Fig. 3 dell'articolo di F. S. Crawford.

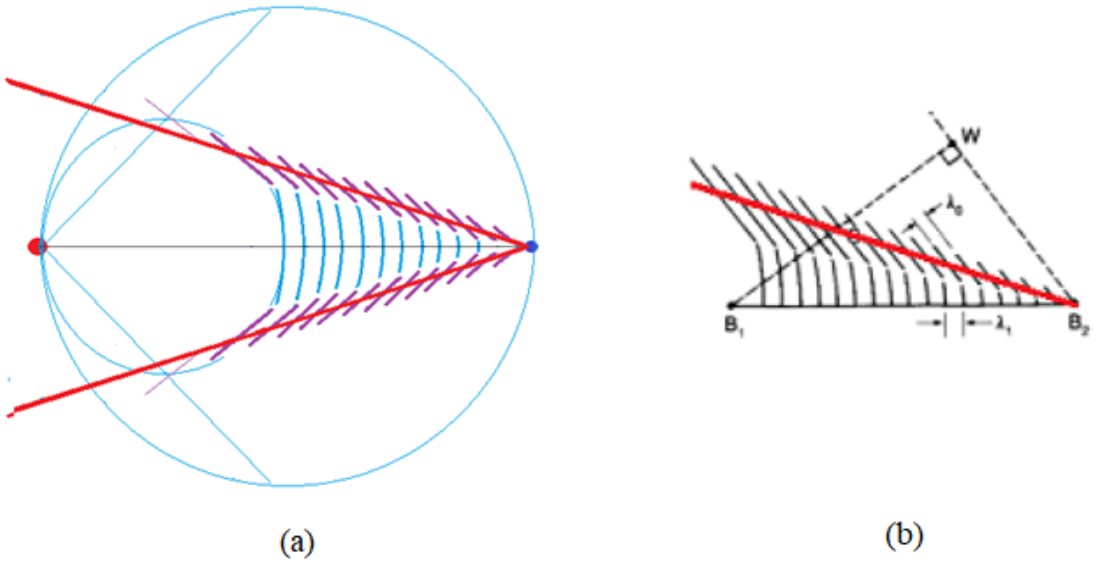


Fig. 19

A sinistra, il diagramma ricavato da noi, a destra la figura pubblicata da **Frank. S. Crawford (Am.J.Phys, 52(9),p.782), Fig.3.**

Così, con queste due figure quasi eguali, si conclude il mio saggio. Cercare di scriverlo è certamente stato per me un buon esercizio. Se qualche eventuale lettore ha cercato di capirlo, deve essere stato un buon esercizio anche per lui, specialmente se in seconda battuta vi cercherà gli immancabili errori ed imprecisioni.

Ma tanto, è sempre l'anatra ad aver ragione.