VELOCITÀ TERMINALE:

UOMINI, GRANDINE, GATTI, PERSONE FORTUNATE.

Risposta a una domanda comparsa su Quora, a cui ho risposto in data 22 ottobre 2020.

Fa differenza cadere da un'altezza di 2 km o 20 m, o l'impatto con il terreno sarà lo stesso se cadi con la stessa velocità?

Ammetto che non mi è chiara la postilla "se cadi con la stessa velocità". La possibilità di arrivare con la stessa velocità cadendo da altezze diverse si realizza naturalmente se il corpo ha raggiunto in entrambi i casi la velocità limite o velocità terminale di caduta.

Avevo scritto "Si realizza soltanto", ma si possono costruire situazioni artificiali ad hoc in cui la velocità di arrivo è la stessa, pur cadendo da altezze diverse.

In quanto all'impatto sul terreno, un allievo di seconda liceo classico (ai miei tempi) avrebbe potuto rispondere: "L'effetto dell'impatto col terreno è dato dall'energia cinetica del corpo che cade. Ma la velocità è la stessa (per ipotesi) e, assumendo che l'oggetto che cade, cioè la persona che fa la domanda, sia lo stesso, l'energia cinetica è la stessa, e l'effetto dell'impatto è lo stesso."

Naturalmente, se si lanciano due oggetti di massa diversa, si vede che, pur arrivando con la stessa velocità, l'energia cinetica

$$T = \left(\frac{1}{2}\right) m\, v^2$$

è proporzionale alla massa, e quindi l'oggetto di massa maggiore farà la buca più profonda, *da cui si deduce che l'impatto con il terreno sarà diverso*. Come esperimento consiglio caldamente di lasciarsi cadere su un piede una biglia di quelle con cui giocavano i bambini prima dell'avvento dei telefoni cellulari, e contemporaneamente, sull'altro piede, un vecchio ferro da stiro modello 1850 (un pezzo di ferro spesso un paio di cm e sagomato): da un metro di altezza arriveranno a fine corsa praticamente insieme, cioè con velocità di poco differenti, ma l'effetto sul piede sarà diverso, specie se si avrà l'accortezza di far cadere il ferro da stiro di punta.

Fig.1

Antico ferro da stiro

In altre parole, la domanda, così come è posta, non è la meglio formulata tra quelle che ho letto su Quora.

Ma supponiamo che chi fa la domanda sia sincero e abbia una vaga conoscenza dell'esistenza di una *velocità terminale* in caso di caduta nell'aria. La domanda dovrebbe quindi essere: "***Uno stesso corpo, cadendo verticalmente in aria da 20 m o 2 km, raggiungerebbe in entrambi i casi la velocità terminale, il che produrrebbe lo stesso impatto sul terreno?"*** Forse chi ha fatto la domanda ha pensato che occorresse nascondere un poco l'obiettivo, tanto per dare da pensare a chi ha la presunzione di rispondere.

Si tratta dunque di calcolare a quanti metri dal punto di inizio della caduta (che immagineremo verticale, nell'aria, con velocità iniziale zero) verrebbe raggiunta la velocità terminale.

La risposta esatta, naturalmente, è "mai". La velocità terminale è raggiunta "asintoticamente", con un tempo di caduta infinito, da un'altezza infinita. Tuttavia, vediamo un caratteristico diagramma della velocità di caduta rispetto al tempo, calcolato con tutti i crismi dell'analisi matematica, con velocità terminale di circa 52 m/s. Anche se la velocità terminale, matematicamente parlando, non viene mai raggiunta, si vede che a tutti gli effetti pratici lo è dopo circa 15-20 secondi.

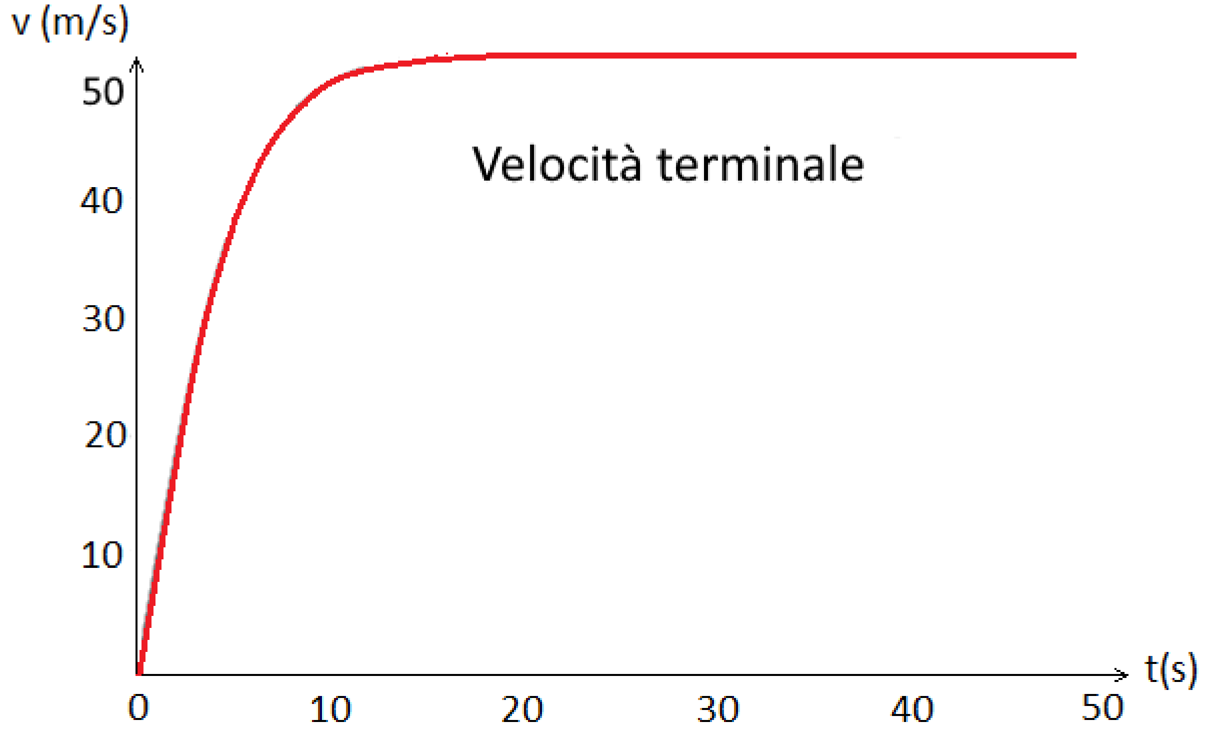


Fig.2

Dal diagramma si vede che la velocità terminale in pratica è raggiunta all'incirca a t = 15 s. Si vede anche che nel tratto iniziale la velocità è data da v = gt, una retta sul diagramma fin verso i trenta m/s.

La velocità terminale è prodotta dalla resistenza che il fluido (qui l'aria) oppone al corpo che cade. Assumo che si parli di caduta in aria perché si parla di impatto sul terreno. Essa dipende sia dal fluido che dal corpo. Per fluidi densi e basse velocità, la forza di resistenza avrebbe una dipendenza proporzionale a v, la velocità del corpo che cade; per fluidi poco densi, come l'aria, e velocità inferiori a quella del suono, la forza resistente è proporzionale a v^2. *Si tratta di due risultati empirici, il secondo dei quali, quello che ci interessa, è dovuto a*

Newton. Se poi la velocità è superiore a quella del suono possono entrare in gioco termini con esponenti maggiori e coefficienti anch'essi trovati empiricamente.

Quindi, l'equazione del moto di un grave di massa m in caduta verticale in un fluido poco denso non è più

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = mg$$

Cioè:

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

Bensì:

(1)
$$m\frac{dv}{dt} = mg - Kv^2$$

Il segno meno indica che la forza resistente si oppone all'effetto della gravità. *Qui si suppone che l'asse x sia orientato dall'alto verso il basso.*

Poche illusioni: tanto la dipendenza funzionale da v quanto il coefficiente K sono risultati empirici. Quindi, i risultati esatti che si otterranno da un calcolo con tutto l'armamentario dell'analisi matematica avranno magari quattro cifre decimali matematicamente corrette, ma un'incertezza assai maggiore dovuta all'empiricità dell'equazione usata, costanti comprese. Comunque, la (1) ci permette di dichiarare subito che velocità del grave in caduta verticale in aria non cambierà, cioè la derivata della velocità si annullerà, quando il membro di destra sarà eguale a zero, cioè

$$V = \sqrt[2]{\frac{mg}{K}}$$

Che, una volta noto il coefficiente K, ci dà la **velocità terminale V**. Il diagramma di Fig. 2 dimostra che da un certo tempo in avanti la velocità di caduta resta praticamente costante.

Ora si è trovato (vedi Appendice III) che empiricamente il coefficiente K può essere scritto come il prodotto di tre termini e mezzo, cioè:

$$K = \frac{1}{2}\,C\,\rho\,A$$

Dove C è il *coefficiente di resistenza aerodinamica*, ρ è la densità dell'aria, A (area di riferimento) è la proiezione dell'area dell'oggetto che cade su un piano perpendicolare alla verticale.

Ne risulta che:

$$K = \sqrt[2]{\frac{2mg}{C\rho A}} \cong 4 * \sqrt[2]{\frac{m}{CA}}$$

usando i dati fissi di g = 9.8 m/s² e ρ = 1.21 kg/m (sistema MKS: m in kg, e A in m²; C è adimensionale).

Sfortunatmente, il coefficiente K non è noto con esattezza: oltre alla densità dell'aria, entrano in esso altri effetti. Ad esempio, il vento in genere non è considerato. Per qualche breve osservazione sulla caduta della grandine con vento, si veda l'Appendice I. Ha qualche importanza? Sulla pioggia e sulla grandine certo ne ha molta, ma immagino che chi fa la domanda e il suo interlocutore non siano gocce d'acqua.

Ma torniamo ad una caduta senza vento.

Ebbene, in 20 m la velocità di caduta nell'aria o nel vuoto è più o meno la stessa, cioè, dopo 20 m di caduta, circa 20 m/s. **La velocità terminale nell'aria, invece, è circa 100 m/s per uno skydiver che si lancia a testa prima, e 44 m/s per uno skydiver che cada a gambe e braccia larghe (in inglese *spread-eagled*), la resistenza dell'aria essendo diversa nei due casi.**

Fig.2 (con velocità terminale di circa 52 m/s) quindi si può riferire a una persona che cada senza paracadute non a testa prima (cosa da evitare) né con braccia e gambe allargate (cosa che eviterei comunque), oppure che non riesca a cadere mantenendo una posizione stabile.

Altre velocità terminali V, da prendersi *"cum kilogranu salis"* sono date nella tabella sottostante:

Oggetto	Massa(kg)	Area di rif. (m^2)	V(m/s)
Skydiver	75	0.70	60
Baseball (raggio 3.7 cm)	0.145	4.2×10^{-3}	43
Pallina da Golf (raggio 2,1 cm)	0.046	1.4×10^{-3}	44
Chicco di grandine (raggio 0.5 cm)	4.8×10^{-4}	7.9×10^{-5}	14
Goccia di pioggia (raggio 0.20 cm)	3.4×10^{-5}	1.3×10^{-5}	9.0

Tav.1 (i valori di C sono = 0.45-0.47 per una sfera e 0.7 per lo skydiver)

A questo punto noi possiamo rispondere a una domanda più generale: ***"un corpo in caduta nell'aria, con velocità iniziale zero, dopo quanti metri di caduta, H, raggiunge la velocità terminale?"***

*Per un uomo, se **H** è abbastanza superiore a 20 m, ciò vuol dire che chi cade da 20 m non raggiunge la velocità terminale. Se **H** è abbastanza inferiore a 2 km, ciò vuol dire chi cade da 2 km raggiunge la velocità terminale.*

Chiameremo **H "altezza caratteristica".**

E' possibile fare un calcolo approssimato o anche un calcolo preciso dell'altezza a cui la velocità di caduta libera supera la velocità terminale. Da questo punto in avanti i due corpi procedono approssimativamente con la stessa velocità e, nell'ipotesi che la massa sia la stessa, arriverebbero entrambi a terra con la stessa velocità e con lo stesso impatto. Ma, appunto, occorre vedere se entrambi raggiungano la velocità terminale.

L'equazione differenziale che regola il "moto di un grave in aria", non lineare del primo ordine, è facilmente integrabile, e la soluzione (nella maggior parte dei casi limitata a una velocità iniziale nulla) si trova in innumeri siti di Internet. Di rado, però, l'ho trovata completa a mio gusto. La riporto, quindi, un po' più completa, in Appendice III. Essa richiede qualche funzione iperbolica (e chi non ama le funzioni iperboliche, come è ben noto a chi è noto, le può esprimere in termini di funzioni esponenziali ad argomento reale). Quindi, niente di straordinario, se non il nome delle funzioni. Ma ne vale la pena? Il calcolo approssimato, con le cifre da me date, è immediato, considerando che i vari coefficienti che vi entrano sono noti con scarsa precisione, e quindi usare le funzioni iperboliche (che risultano da un calcolo esatto) è come andare per farfalle col cannone. Dalla nota formula

$$v = \sqrt[2]{2gh}$$

si ottiene che l'altezza h è data da

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

Quindi, ***cadendo nel vuoto da 20 m, la velocità con cui si arriva al suolo è 20 m/s.***

Le formule date si assume siano valide anche ponendo v = V, **velocità terminale,** che ci porge la lunghezza della caduta necessaria a raggiungerla. Questa, utilizzando la relazione *v = gt,* può anche essere calcolata dal tempo impiegato per raggiungere la velocità terminale, iniziando la caduta con velocità nulla, il cosiddetto **tempo caratteristico:**

$$T = \frac{V}{g}$$

Da cui **l'altezza caratteristica**:

$$H = \frac{1}{2} g\, T^2 = \frac{V^2}{2g}$$

Quindi, nel caso del tuffatore *skydiver* a testa prima, la velocità terminale di circa 100 m/s, indicata più sopra, è raggiunta in circa 10 s, dopo un volo di circa

H = 10000/20 = 500 m

Mentre nel caso del tuffatore *skydiver spread-eagled*, basta un volo di

$$H = 96.8\ \text{m}\ (\approx 100\ \text{m})$$

Ovviamente, lo skydiver incomincia a rallentare assai prima di raggiungere la velocità terminale. Ma in ogni caso **si tratta di altezze sempre superiori a 20 m, e allo stesso tempo inferiori a 2 km.**

Si vede quindi come si può fare, per far arrivare chi cade da 20 m alla velocità di 60 m/s, invece dei 20 m/s della caduta libera: basta imprimergli una **velocità iniziale** verso il basso di circa 60 m/s (i calcoli esatti, chi vorrà, li potrà fare in base all'Appendice III).

Se però la **velocità iniziale è nulla**, la velocità terminale è raggiunta lanciandosi a capofitto da almeno 500 m (si prenda magari un piccolo margine), o *spread-eagled* da almeno 100 m. Per lanci da altezze superiori a quelle indicate, la velocità di impatto sarà la velocità terminale. Per altezze inferiori, la velocità di impatto sarà poco diversa da quella di caduta nel vuoto ed inferiore alla velocità terminale. In particolare, per lanci da 20 m la velocità sarà sempre inferiore alla velocità terminale.

Si vede quindi che, per un essere umano, la velocità di arrivo da una caduta in aria di 20 m è inferiore alla velocità di arrivo da una caduta di 2 km. Quindi le due velocità non sono le stesse, e la domanda, com'è formulata, lasciando supporre che la caduta avvenga in aria, non regge.

Noto comunque che una caduta da trenta piani, circa 100 m, ucciderebbe qualunque essere umano, a meno di cadere su terreni speciali, magari inclinati, coperti di neve profonda. In Appendice II dò qualche indicazione sulle statistiche della caduta da venti m (circa sei piani). (Spoiler): statistiche fatte per cadute dai grattacieli di New York indicano una percentuale di sopravvivenza del 20% (uno su cinque) per cadute da sei piani. Ma non so se i dati si riferiscano all'impatto su un terreno standard e le modalità di caduta siano le stesse.

Naturalmente si potrebbe avere la fortuna di **Vesna Vulović** hostess delle aerolinee jugoslave, volo JAT 367, che si salvò pur cadendo da un aereo in volo a 10160 m il 26 gennaio 1972. Ma non è un caso frequente, se si fa l'esperimento è saggio non contarci troppo (Appendice IV).

I tuffatori alla Quebrada di Acapulco si tuffano da circa 35-40 m – in acqua. La velocità di arrivo è circa 27 m/s. Come si vede, è poco più della metà della più bassa velocità terminale, e avviene in acqua. I tuffi, benché fatti sporadicamente nel passato lontano, incominciarono ad essere notati a partire dal 1934, quando si lanciò il tredicenne Enrique Apac Rios. Nonostante la pericolosità del sito, sembra che in ottant'anni non sia perito un solo tuffatore (pare che su di loro vegli la Vergine di Guadalupe, alla quale è dedicata una cappelletta in cima alla scogliera).

Per altri esseri viventi in caduta nell'aria, la sopravvivenza dipende dalla massa e dalla *superficie di riferimento* del corpo che cade:

A questo proposito, il biologo J. B. S. Haldane scrisse:

> Per il topolino e qualsiasi animale più piccolo [la gravità] non presenta praticamente alcun pericolo. Si può far cadere un topolino giù da un pozzo di miniera di mille metri; arrivando in fondo, resta un po' intontito e poi se ne va. Un grosso ratto viene ucciso, un uomo va in pezzi, un cavallo si spiaccica.
>
> **Ma il maestro delle cadute, il Gatto? Vedi Appendice II: Paragone delle cadute gatto-uomo adulto.**

Con un saluto al Gatto, chiudo qui la mia risposta.

APPENDICE I: Vuoti d’aria. Grandine e vento:

Forse controintuitivamente, poiché la velocità dovuta al vento e la velocità terminale si sommano vettorialmente, l’impatto *su una superficie perpendicolare alla direzione di caduta* è più violento se c’è vento.

Naturalmente questa superficie è raramente quella orizzontale, perché il vento tende a soffiare parallelamente alla superficie terrestre. Tuttavia, in quota, ci possono essere pericolose correnti discensionali, che possono spingere un aereo verso il basso a velocità superiore a quella di caduta libera (esse arrivano a 140 km/h, 40 m/s). Si tratta di una forma di “turbolenza”, che viene sovente interpretata erroneamente dai viaggiatori come “vuoto d’aria” (“air pocket” in inglese, termine quasi altrettanto sbagliato). Essa è particolarmente preoccupante perché l’aereo non è soltanto sballottato, ma dà l’impressione di precipitare. È stato osservato che il viaggiatore ha l’impressione di precipitare per un tempo assai lungo, per centinaia di metri. Non è esatto: si tratta piuttosto di decine di m. In un caso il pilota misurò una caduta di 16 m, mentre i viaggiatori parlavano di 900 m. Il fatto è che i secondi di caduta sembrano eterni. Nondimeno, il resoconto della turbolenza incontrata da un Boeing 747, ancora nelle vicinanze del Giappone (Volo UA 826, 28 dicembre 1997) è impressionante quanto basta, anche se l’aereo discese al massimo in sol balzo di circa 30 m, provocando 18 feriti, uno dei quali, con cintura non allacciata, perì in volo.

Tuttavia, in un vero vuoto d’aria l’aereo cadrebbe con accelerazione circa g, e velocità gt, e le hostess cadrebbero con lui, sentendosi senza peso. Sarebbe una versione moderna dell’”ascensore di Einstein”. Non si avrebbe quindi l’impressione di precipitare, ma ci si sentirebbe senza peso.

Le correnti discendenti nella massima parte dei casi non arrivano al suolo, e non c’è impatto: altri tipi di turbolenze sono più frequenti vicino al suolo, e possono provocare disastri. Particolarmente pericolosi sono i vortici della scia di un grande aereo al decollo. Le turbolenze provocate possono far perdere il controllo di un aereo leggero che decolli o atterri subito dopo.

Le correnti discendenti sono sgradevoli, ma in genere non eccessivamente dannose. In casi gravi possono provocare ferite e fratture (**tenere sempre le cinture allacciate!**). Inoltre, assai frequentemente le correnti sono assai localizzate, e l’aereo le attraversa in pochi secondi: un aereo a velocità di crociera va a circa 250 m/s.   In una regione temporalesca, tuttavia, ce ne possono essere diverse abbastanza vicine.

Nel corso di un cinquantennio conosco solo tre casi di aerei di linea probabilmente mandati in pezzi da una turbolenza dovuta a correnti discendenti, in cui perirono tutti i passeggeri e l’intero equipaggio:

1) 5 marzo 1966, Volo BOAC 919, Boeing 707-436, in Giappone. Turbolenza di aria limpida, con forte corrente discendente.

2) 7 ottobre 1981; Volo 431, NLM CityHopper Fokker 28-4000; Moerdijk, Netherlands. Un'ala si staccò nel corso di una violenta turbolenza con *downburst* (forte ed improvvisa corrente discendente).

4) 12 November 2001; American Airlines A300-600; New York, NY: Volo 587. Qui contribuirono, a quanto pare, alcune manovre sbagliate del copilota. L'aereo, però probabilmente non era in caduta verticale.

Tra il 1980 e il 2012 ci furono altri quattro incidenti aerei dovuti alla turbolenza con morte di almeno un passeggero.

Tutto sommato, non sono molti incidenti, tenendo conto del fatto che in tempi normali volano circa 26000 aerei al giorno. Soprattutto, **si tengano le cinture di sicurezza sempre allacciate** e si ricordi: ***non si ha a che fare con vuoti d'aria.***

Tornando alla grandine, si può osservare un caso tipico: raffiche di vento orizzontale che urtano chicchi di grandine in discesa verticale. Calcoliamo l'energia di impatto su una **superficie normale al vettore velocità di caduta** del chicco di grandine sotto gli effetti congiunti del vento (orizzontale) e della gravità, supponendo che il chicco abbia raggiunto la velocità terminale di caduta. Anche qui, l'energia dell'impatto è data dall'energia cinetica del chicco di grandine.

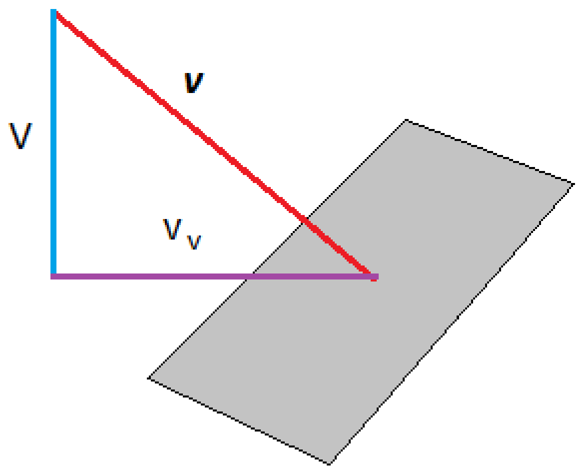


Fig. A1

L'energia cinetica dell'impatto in questo caso semplice, con vento orizzontale, è data dal teorema di Pitagora applicato alle velocità:

$$T_v = \frac{1}{2}\, m\, |v|^2 = \frac{1}{2} m\, (V^2 + v_v^2)$$

Dove V è la velocità terminale, verticale, del chicco di grandine (che, in omaggio alla Tav 1, porremo a 14 m/s, circa 50 km/h) e v_v è la velocità dovuta al vento. Come si vede, finché $|V| > v_v$ la velocità di caduta domina. Poi la velocità dovuta al vento domina, e l'energia dell'impatto dipende quadraticamente dalla velocità dovuta al vento. Come velocità massima del vento possiamo prendere la velocità massima considerata in un tornado, per cui vale la "scala Fujita", che contempla un massimo di 318 mph, pari a 511 km/h, 142 m/s!

Sebbene si possa pensare che la componente della velocità del chicco di grandine dovuta al vento non sia necessariamente eguale alla velocità del vento stesso, in tutti i calcoli che ho trovato su internet non si fa distinzione fra le due velocità. Ad esempio, nell'articolo alquanto tecnico http://docserver.nrca.net/technical/374.pdf, pag 206, una velocità verticale (terminale) di 32 m/s si compone con una velocità del vento di 18 m/s producendo una velocità risultante di 54 m/s. Il calcolo è fatto usando il Teorema di Pitagora come se la velocità del chicco di grandine dovuta al vento e la velocità del vento fossero la stessa cosa (curiosamente, proprio nella conversione (piedi al secondo) in (metri al secondo) c'è un errore).

APPENDICE II: Storie di Gatti. Paragone delle cadute Gatto-Uomo.

IL Gatto è forse il vertebrato che, pur non essendo un volatile né equipaggiato per il volo planato, riesce a subire meno danni in caso di caduta, rispetto a vertebrati di massa eguale (o maggiore).

Il grafico che segue è tratto da "How Cats Survive Falls from New York Skyscrapers." e riporta la percentuale di esseri umani e gatti adulti uccisi da una caduta rispetto al piano da cui i due cadono. Per un uomo adulto la percentuale di cadute mortali sale "praticamente" al 100% verso i nove piani (ma si veda in Appendice IV il caso di **Vesna Vulović**). Invece, il grafico di cadute fatali per il gatto aumenta fino a circa il 10% verso il 5° piano, e quindi diminuisce a circa il 5% per le cadute da 7 a 9 piani. Sebbene il grafico non lo mostri, il tasso di sopravvivenza rimane stabile al 95% da 9 a 32 piani (circa 100 m). Come è possibile?

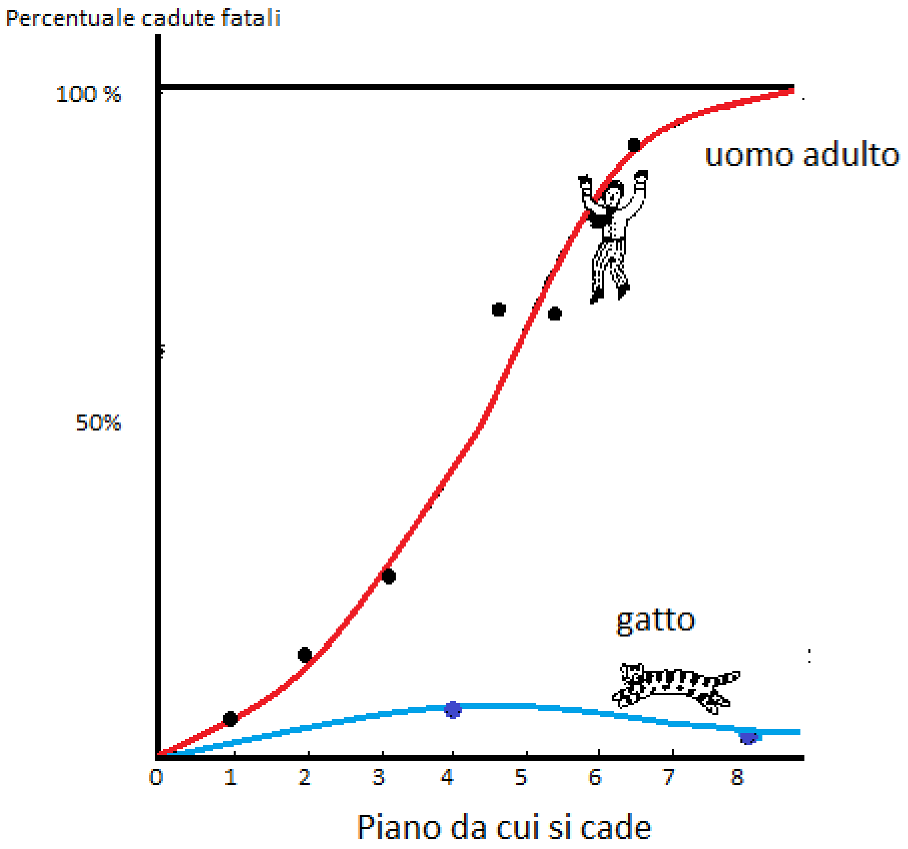


Fig.A2

La velocità "terminale", un termine piuttosto agghiacciante, descrive la velocità alla quale la forza di resistenza dell'aria diventa uguale alla forza del peso di un oggetto, e quindi l'oggetto non accelera più e di conseguenza la velocità rimane costante. Maggiore è l'area della sezione trasversale di un oggetto e minore è la sua massa, minore è la velocità terminale e ***prima viene raggiunta***. Un gatto raggiunge la sua velocità terminale di 60 mph

(100 km/h, 28 m/s) entro circa 5 piani (15 m) di caduta libera. Per confronto, la velocità terminale di una persona è circa il doppio: di 120 mph (200 km/h, 55 m/s), raggiunta in 33 piani (100m) in condizioni ottimali.

Una volta che un gatto raggiunge la sua velocità terminale, però, inizia a rallentare. Questo perché il gatto si rilassa, cambiando posizione dalla schiena arcuata, a testa in giù e con le zampe tirate strettamente sotto il corpo, per diventare un gatto "spread eagled", che cade di pancia, con le quattro zampe tese. Questo aumenta la sua area di riferimento e rallenta il gatto. La ragione è che i nostri corpi sono sensibili solo all'accelerazione, e il gatto, non più accelerato, si rilassa (anche se le foto del gatto i caduta spread-eagled non danno l'impressione che il gatto sia molto rilassato).

Comunque, il rilassamento, oltre a rallentare il gatto, fa sì che la forza dell'impatto si diffonda su un'area maggiore quando il gatto atterra, con conseguente diminuzione delle lesioni agli arti dei gatti quando cadono da sette o più piani.

E non solo i gatti sembrano "capire" come l'aumento della loro area possa portare a un atterraggio meno doloroso, ma sembrano anche conoscere bene la conservazione del momento angolare (meno nota agli studenti delle medie superiori), che usano abilmente per atterrare sui loro piedi quando è necessario (e possibile).

Da: http://ffden-2.phys.uaf.edu/211.web.stuff/Kuhns/terminal_velocity.htm

APPENDICE III

SOLUZIONE COMPLETA DELL'EQUAZIONE DEL MOTO PER UN CORPO IN CADUTA NELL'ARIA.

(Con qualche piccolo tecnicismo, tanto per ricordare che senza tecnicismi si possono solo avere idee confuse, e la confusione è "la terra di nessuno" fra la verità e l'errore).

III:1 Generalità. Excursus sui coefficienti di resistenza idraulica K, e aerodinamica C.

Già si disse che la (1) diventa:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{K}{m}\, v^2$$

Con il problema di determinare K, il ***coefficiente di resistenza idraulica.***

Ora si è trovato empiricamente che il coefficiente K può essere scritto come il prodotto di tre termini e mezzo, cioè:

$$K = \frac{1}{2}\, C\, \rho\, A$$

Dove C è il ***coefficiente di resistenza aerodinamica***, ρ è la densità dell'aria, A (area di riferimento) è la proiezione dell'area dell'oggetto che cade su un piano perpendicolare alla verticale.

E da dove salta fuori il termine ½ ? Salta fuori dal fatto che A e ρ sono entrambi misurabili e hanno un valore non arbitrario. Ma anche C è misurabile con metodi standard. Fu un parto laborioso. Riporta fr.wikipedia (https://fr.wikipedia.org/wiki/Tra%C3%AEn%C3%A9e)

"Il coefficiente 1/2, necessariamente arbitrario, fu istituito nel marzo 1923 dopo una comune riflessione di tutti gli aerodinamici dell'epoca2, su proposta di Richard Knoller," appunto per avere un unico valore di C applicabile al maggior numero possibile di problemi.

Per pochi solidi semplici, C è calcolabile; per solidi complicati come un'auto o un aereo risulta da esperimenti, in genere fatti in una galleria a vento. Per taluni corpi che in caduta mutano forma (per esempio un uomo non allenato allo skydiving) in pratica si prende un valore medio. Esso è definito come

$$C = \frac{F_D}{q_0 A}$$

dove A è l'area di riferimento, F_D è la forza di resistenza aerodinamica, q_0 è la cosiddetta "pressione dinamica", cioè l'incremento di pressione dovuto all'energia cinetica del moto relativo del fluido e del corpo considerato, che in genere vale

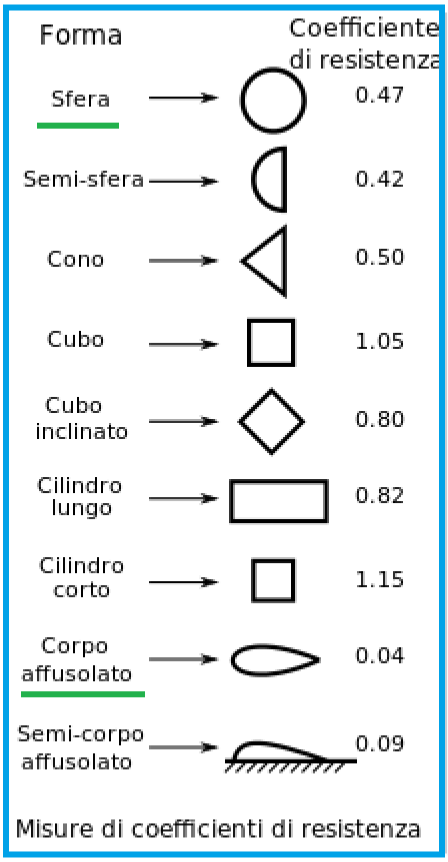
$$q = \frac{1}{2}\rho\, u^2$$

Dove u è la velocità del fluido rispetto al corpo. Il pedice "0" in q_0 indica che q va misurato abbastanza lontano dal profilo del corpo (troppo vicino ad esso si verificano altri fenomeni più complicati).

È già straordinario il fatto che K sia dato da un semplice prodotto di tre valori misurabili indipendentemente, e quindi non bisogna stupirsi che occorra un fattore 0.5 per rendere il risultato più preciso.

VALORI TIPICI DI C:

Profilo alare	0.05
Toyota Camry	0.28
Ford Focus	0.32
Honda Civic	0.36
Ferrari Testarossa	0.37
Dodge Ram Pickup	0.43
Sfera	0.45
Hummer H2 SUV	0.64
Skydiver (verticale, di piedi)	0.70
Bicicletta	0.90
Skydiver (Orizzontale)	1.0
disco piatto (di fronte)	1.12
Proiettile	0,295



Tav.A1

Valori del coefficiente di resistenza aerodinamica, presi de due fonti diverse: a sinistra "Physics libretexts", a destra https://it.wikipedia.org/wiki/Coefficiente_di_resistenza_aerodinamica
Come si vede, alcuni valori sono simili, ma non identici.

III.2 Soluzione dell'equazione del moto. Caso della velocità iniziale nulla

Ciò posto, veniamo alla soluzione dell'equazione del moto, la quale può essere più comodamente scritta come

$$(1b) \qquad \frac{dv}{dt} = g(\,1 - \frac{v^2}{V^2})$$

In cui la velocità terminale V è già stata data come:

$$2) \qquad V = \sqrt[2]{\frac{K}{mg}} = \sqrt[2]{\frac{2mg}{\rho SC}}$$

Separando le variabili e integrando dalla velocità iniziale v_0 a v:

$$3) \qquad t = \frac{V^2}{g}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{(V^2 - v^2)} = \frac{V^2}{g}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{(V+v)(V-v)} = \frac{V}{2g}(\ln\frac{V+v}{V-v} - ln\frac{V+v_0}{V-v_0})$$

Il termine costante a destra è nullo se si assume che la velocità iniziale v_0 sia nulla. In questo caso la soluzione è immediata:

$$\frac{2gt}{V} = \ln\frac{V+v}{V-v} = ln\frac{1+v/V}{1-v/V}$$

Esponenziando:

$$\frac{1+v/V}{1-v/V} = \exp\,(\frac{2gt}{V})$$

Risolvendo per v/V:

$$\frac{v}{V} = \frac{e^{\frac{2gt}{V}} - 1}{e^{\frac{2gt}{V}} + 1} = Tanh\left(\frac{gt}{V}\right) = Tanh\left(\frac{t}{T}\right)$$

Che ha il diagramma riportato in Fig.1, però "con unità normalizzate", Fig.A3.

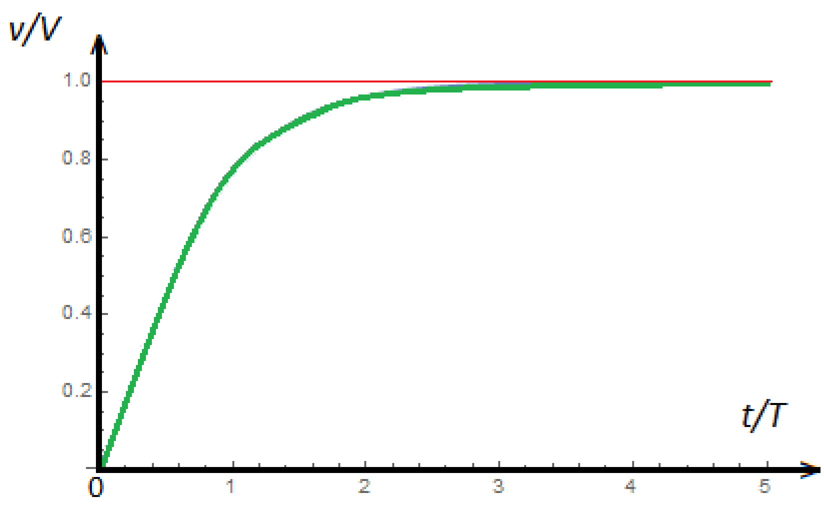


Fig.A3

Considerando che v = dx/dt, si ottiene x integrando rispetto a t. L'integrazione è facile, ricordando che

$$Tanh(x) = \frac{Sinh(x)}{Cosh(x)}$$

$$Sinh(x) = \frac{d(Cosh(x))}{dt}$$

In vena di ripasso, aggiungo che:

$$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x(e^x - e^{-x})}{e^x(e^x + e^{-x})} = Tanh(x)$$

Per cui:

$$x = VT\ Log[Cosh\left[\frac{t}{T}\right]]$$

Da questa equazione si ricava facilmente la x in funzione di t, ma anche la t in funzione di x, utile ed immediato esercizio, che richiede solo di ricordare le funzioni inverse, prima del logaritmo, poi del Cosh (*).

Il diagramma di x/(VT) = f(t/T) è:

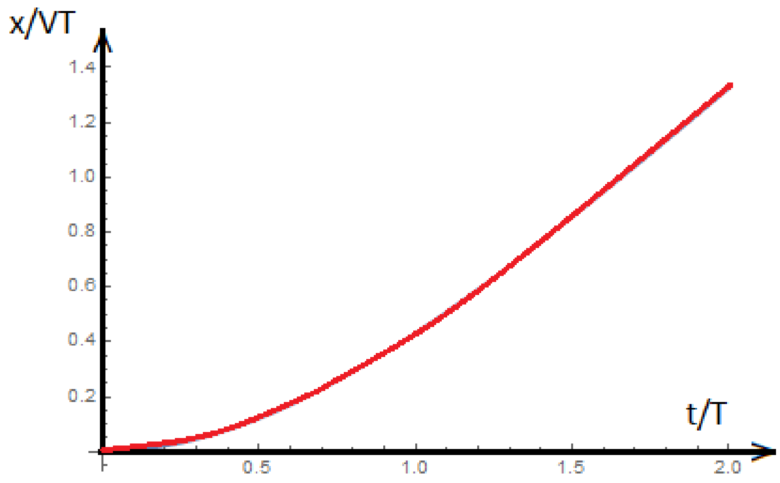


Fig. A4

III. 3 Casi della velocità iniziale non nulla (V > v_0 e V < v_0)

La soluzione è un po' più complicata se la velocità iniziale non è nulla. Si fa l'esponenziale della (3) moltiplicata per $\frac{2g}{V}$ e si ottiene:

4) $$\frac{V+v}{V-v} = \frac{V+v_0}{V-v_0}\exp\left(\frac{2gt}{V}\right)$$

Ricordando che la funzione esponenziale è sempre positiva e ponendo per semplicità le costanti :

$$\frac{V+v_0}{V-v_0} = +\exp\left(\frac{2g\tau}{V}\right) \text{ se } V > v_0 \quad \boldsymbol{oppure} \quad \frac{V+v_0}{V-v_0} = -\exp\left(\frac{2g\tau}{V}\right) \text{ se } V<v_0$$

Si può risolvere la (4) nei due casi, in cui v_0 sia minore o maggiore di V.

Possiamo interpretare τ, che ha le dimensioni di un tempo, come:

$$\tau = T\left(\frac{1}{2}ln\frac{V+v_0}{V-\ v_0}\right) \qquad se\ V > v_0$$

$$\tau = T\left(\frac{1}{2}ln\frac{v_0+\ V}{v_0-V}\right) \qquad se\ V < v_0$$

Se $v_0 > 0$, cioè la velocità iniziale è diretta verso il basso, si tratta di una costante positiva. Si noterà che la matematica è fedele: il caso $v_0 = 0$ l'abbiamo risolto a monte, e i formalisimi successivi sono oziosi. Nondimeno, applicando qui il valore $v_0 = 0$ si ottiene $\tau = 0$ per $V > v_0$, mentre il caso $V < v_0$ non ha senso, perché V è sempre positiva. Inoltre, applicando il valore V=v_0 si ottiene in entrambi i casi il valore infinito.

Proseguendo dalla (4) si ottiene con facili passaggi, che, se v_0< V:

$$\frac{v}{V} = \frac{\exp\left(\frac{2g(t+\tau)}{V}\right)-1}{\exp\left(\frac{2g(\tau+\tau)}{V}\right)+1} = Tanh\left(\frac{g(t+\tau)}{V}\right)$$

E, se V< v_0

$$\frac{v}{V} = \frac{\exp\left(\frac{2g(t+\tau)}{V}\right)+1}{\exp\left(\frac{2g(t+\tau)}{V}\right)-1} = Coth\left(\frac{g(t+\tau)}{V}\right)$$

Nel caso $V < v_0$, grazie al termine τ, positivo, la cotangente non può andare ad infinito per t=0.

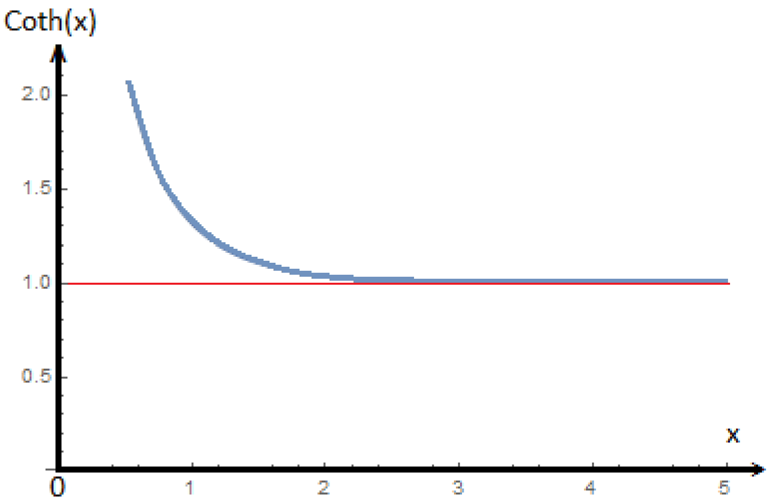


Fig. A5

La Cotangente iperbolica, che ci da v/V, andrebbe ad infinito per x= 0 . Tuttavia, nella nostra soluzione, x= t+τ, e τ è positivo, non nullo, quindi il caso x=0 non si applica.

Il diagramma dimostra che se la velocità iniziale è maggiore della velocità terminale, la velocità del corpo che cade **decresce** verso la velocità terminale, che però non viene mai raggiunta.

Poiché v = dx/dt, una ulteriore integrazione produce la distanza percorsa:

se $v_0 < V$:

$$x = \frac{V^2}{g}\, Log\left[Cosh\left[\frac{g(t+\tau)}{V}\right]\right]$$

E, se $V < v_0$

$$x = \frac{V^2}{g}\, Log\left[Sinh\left[\frac{g(t+\tau)}{V}\right]\right]$$

Con che, si ha più o meno tutto quel che si può desiderare, inclusi immancabili errori.

Caso III.4: Velocità iniziale eguale alla velocità terminale.

L'attento lettore può notare che non abbiamo trattato il caso V= v_0, cioè velocità terminale = velocità iniziale. Esso viene raramente considerato, oppure viene liquidato in un riga, in modo da sfuggire all'attenzione. Le formule che abbiamo più o meno faticosamente trovato ci abbandonano subito, per colpa dell'onnipresente denominatore

$$\pm (V - v_0)$$

In effetti, per trattare questo caso bisogna risalire assai a monte, ma qui ci aiuta il fatto che non stiamo studiando analisi matematica, ma piuttosto fisica matematica. In altre parole, noi sappiamo che la soluzione deve esistere e, intuitivamente, la velocità potrebbe mantenersi eguale alla velocità terminale.

Per dimostrarlo, supponiamo di partire dalla (1b) e di procedere numericamente.

$$\Delta v = g\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right)\Delta t$$

Ma, all'istante iniziale, v è la velocità iniziale, che è V. E quindi:

$\Delta v = g\ (1 - 1)\Delta t = \ 0$ da cui $v = V + \Delta v = V$

Cioè la velocità non muta.

Conclusione, se la velocità iniziale è eguale alla velocità terminale, il grave scenderà con velocità terminale costante. È l'unico caso (matematicamente parlando) in cui il grave cade con la velocità terminale. In ogni altro caso vi si avvicina asintoticamente, cioè cade a velocità costante solo dopo un tempo e un'altezza infiniti. E quindi, se vogliamo far arrivare a terra due corpi identici alla stessa velocità terminale, li possiamo far cadere da qualsiasi altezza, con velocità iniziale eguale alla velocità terminale. ***Questo completa la risposta al quesito posto su Quora.***

NOTA

(*) Aggiungo la risposta a una domanda (che mi sono) fatta in precedenza:

Se $v_0 = 0$,

$$\frac{t}{T} = Arcosh\left(exp\left(\frac{x}{VT}\right)\right)$$

Se $v_0 > 0$, $v_0 < V$,

$$\frac{t}{T} = -\frac{\tau}{T} + Arcosh(exp\left(\frac{x}{VT}\right))$$

E se $v_0 > V$? O se $v_0 < 0$?

(Nelle varie formule si ricordi sempre che: g = VT, e quindi V^2/g = VT. Inoltre H = VT., per cui la quartultima formula è resa adimensionale scrivendo:

$$\frac{x}{H} = \ Log[Cosh\left[\frac{(t+\tau)}{T}\right]]$$

E così le altre).

APPENDICE IV– Il caso di Vesna Vulović (1972).

Vesna Vulović (3 gennaio 1950 - 23 dicembre 2016), un'assistente di volo serba, detiene il record mondiale del Guinness World Records per essere sopravvissuta alla caduta senza paracadute dalla maggiore altezza: 10160 m. Fu l'unica superstite dopo che una bomba esplose nel compartimento bagagli del volo (a quel tempo jugoslavo) JAT 367 il 26 gennaio 1972, facendo precipitare l'aereo, un DC-9, vicino a Srbská Kamenice, in Cecoslovacchia.

Secondo gli investigatori, quando la cabina si depressurizzò, i passeggeri e gli altri membri dell'equipaggio, in tutto ventisette persone, furono risucchiati fuori dall'aereo e precipitarono, morendo tutti. Vesna Vulovic era però rimasta bloccata all'interno della fusoliera. Questa, secondo gli investigatori, avrebbe terminato la caduta inclinata, sul fianco di una montagna con un bosco fitto e coperto di neve, che attutì l'impatto.

Dopo ventisette giorni di coma seguiti da diversi mesi di degenza e convalescenza, Vesna Vulović recuperò quasi completamente. In seguito riferì che non avrebbe dovuto essere su quel volo, ma fu scambiata per errore con un'altra hostess dello stesso nome.

Noto comunque che essa cadde stando all'interno dell'aereo, e quindi non propriamente in caduta libera. Mentre l'aereo scivolava sulla montagna, Vesna cadeva con l'aereo. Quando l'aereo si arrestò, essa continuò a cadere all'interno dell'aereo. Cadde cioè in due tempi.

Esiste anche una teoria che la sua storia sia stata inventata dai servizi segreti Cecoslovacchi, e che l'aereo in realtà sia stato abbattuto per errore da un MIG cecoslovacco, e sia precipitato cadendo da poche centinaia di metri dal suolo. Tuttavia le due scatole nere dell'aereo furono ritrovate e i dati in esse contenuti non confermano questa teoria "complottistica".