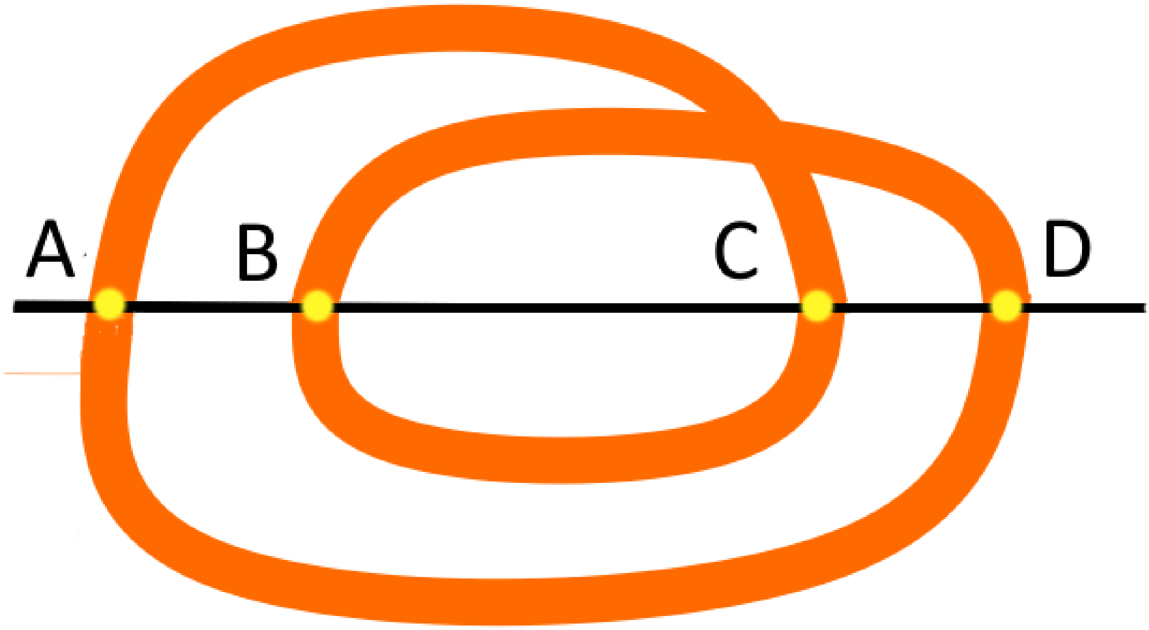


IL BIRAPPORTO

da un altro punto di vista

I. Il BIRAPPORTO come doppio rapporto delle distanze di quattro punti appartenenti a una retta.

Quanto scriverò nella "Postfazione" sarà solo una magra introduzione al soggetto, largamente trattato nei testi di geometria proiettiva, alla base della quale, come dirò più avanti, sta il birapporto. Ma nel "gioco" che propongo in questo saggio, la geometria proiettiva non è il mio principale soggetto. Ho solo il modesto scopo di dare un aiuto un po' più che mnemonico a chi ha avuto le mie stesse difficoltà.

Dunque un birapporto non si forma con qualsiasi quattro punti su una retta e facendo rapporti qualsiasi tra le lunghezze di quattro segmenti che li hanno per estremi. No. I punti possono essere scelti a caso, e questo è vero, ma i rapporti fra segmenti vanno fatti in un certo ordine ben definito e devono essere tutti *orientati* in un modo ben definito.

Prendiamo l'esempio dato da Wikipedia (Birapporto - Wikipedia). Siano A, B, C, D quattro punti equidistanti posti su una retta nel modo seguente (Fig. 1), e A sia preso come origine.

Fig.1

Come pattuito, si suppone che la distanza tra due punti successivi sia 1. Il punto A ha ascissa zero, il punto B ha ascissa b=1, il punto C ha ascissa c =2 e il punto D ha ascissa d= 3. Orientiamo la retta , in modo che AB= +1 mentre BA= -1. Il birapporto è allora **definito** da:

$$(1) \qquad \frac{\frac{CA}{CB}}{\frac{DA}{DB}} = \frac{CA\ DB}{CB\ DA} = \frac{\frac{c-a}{c-b}}{\frac{d-a}{d-b}} = \frac{(2)/(1)}{(3)/(2)} = \frac{4}{3}$$

La forma (1) può essere chiamata "forma classica", perché è la più comune nei libri di testo quando viene introdotto il birapporto.

Si noti che in (1) i quattro segmenti che entrano nel birapporto, sono scritti *mettendo sempre per prima l'ascissa del punto finale del segmento e sottraendo l'ascissa del punto iniziale.* Facendo la scelta opposta (come fa Wikipedia) , di *mettere sempre per prima l'ascissa del punto iniziale del segmento e sottraendo l'ascissa del punto finale,* il risultato numerico è lo stesso. Le due scelte differiscono principalmente per aver orientato la retta in uno dei due modi possibili.

Inoltre, nella formula non si richiede che i punti si susseguano sulla retta nell'ordine "naturale", A,B,C,D. Non è escluso che le rette che proiettano i quattro punti si scambino fra loro, e i punti si seguano in altro ordine, come ad esempio A,C,B,D. Noi possiamo definire il birapporto esattamente allo stesso modo. Si noti soltanto che se i punti si seguono nell'ordine a,b,c,d e l'origine è A, o un punto alla sua sinistra, tutti i termini del terzo rapporto in (1) sono positivi. Nei nostri esempi che seguono, noi faremo l'ipotesi che i numeri si seguano nell'ordine naturale, ma solo per maggior chiarezza.

Tra l'altro, guardando la definizione (1) , vediamo che effettivamente il "birapporto" è un "doppio rapporto", o rapporto di due rapporti. Questa costruzione non è propriamente intuitiva, e, come vedremo in fine, dovrebbe essere oggetto di meraviglia notare che il nostro occhio in qualche modo sia in grado di distinguerla nella realtà, – così come il nostro orecchio ha una particolare sensibilità per gli intervalli musicali.

Ad ogni modo, il birapporto può essere semplificato trasformando i due rapporti in un unico rapporto, secondo le elementari regole del calcolo della divisione di frazioni. Noi ci riferiremo d'ora in avanti a questa forma, la seconda in (1).

Mi trovai subito nei guai col birapporto. La formula del rapporto, anzitutto, mi sembrava arbitraria e non facile da ricordarsi. L'apparente arbitrarietà della scelta dei quattro segmenti e della loro posizione a numeratore o denominatore, e, infine la confusione dei segni mi creò sempre un problema nel ricordare il birapporto senza dovermelo ricavare ogni volta (Nota 1). Troppe cose da ricordare *a prima vista senza alcuna giustificazione.* Si poteva mettere un po' di ordine in questo concetto base della geometria proiettiva?

Su queste basi poco stabili rimasi per decenni, mentre, nel retro della mia mente, una parte di me cercava di trovare senso in questo strano animale geometrico.

Alla fine credo di esserci arrivato. Quanto sto per esporre è certo noto a generazioni di geometri, ma io me lo sono dovuto trovare da solo, e ho pure notato che in una ricerca affrettata su vari testi introduttivi non si trova parola del metodo da me usato (può pensarsi che non sia considerato utile). Ho solo trovato in alcuni testi di geometria proiettiva del secolo XIX la raccomandazione di ricordare la relazione (ovvia):

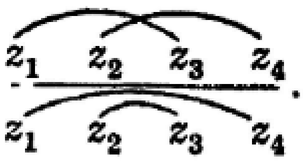


Fig.2

Da: *An introduction to projective geometry,* by C.W. O'Hara (1937)

Vediamo di fare di meglio (e chi lo ha già fatto mi perdoni). Noi partiremo da una retta a piacere l su cui sono segnati quattro punti a piacere.

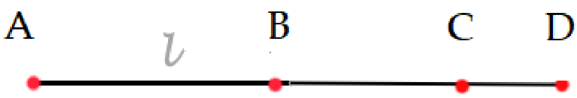


Fig.3

Uniamo ora i quattro punti con una **linea curva chiusa**, percorsa in una sola direzione (senza arrestarsi e tornare indietro) iniziando da uno qualsiasi di essi, che **per incominciare sarà per noi A**, e terminando, quindi, in A. La linea curva chiusa **deve *attraversare* la retta** (o il suo ideale prolungamento) una sola volta in ciascuno dei quattro punti da noi scelti. Quindi l'ultimo punto deve coincidere col primo. Il risultato è che la curva sarà composta di quattro archi congiunti.

Se consideriamo la linea l come divisione fra semipiano Nord e semipiano Sud, vediamo che effettivamente le curve sono necessariamente costituite da quattro archi, due a Nord e due a Sud della retta di riferimento. Questo perché agli estremi di un arco, la retta di riferimento viene attraversata, e quindi l'arco successivo sarà dalla banda opposta della retta di riferimento. Inoltre, poiché gli archi sono quattro e l'ultimo deve chiudere la curva, esso sarà dalla banda opposta dell'arco iniziale, e terminerà nel punto iniziale della curva chiusa.

Partendo da A a Nord (segno ↑), i quattro archi potranno solo succedersi nei **sei modi seguenti**, tenendo presente che il segno ↑ o ↓ è un contrassegno dell'arco, che ci dice se esso si trova a Nord o a Sud:

1) (↑AB)(↓ BC)(↑CD)(↓ DA)
2) (↑AB)(↓BD)(↑DC)(↓CA)
3) (↑AC)(↓CB)(↑BD)(↓DA)
4) (↑AC)(↓CD)(↑DB)(↓BA)
5) (↑AD)(↓DC)(↑CB)(↓BA)
6) (↑AD)(↓DB)(↑BC)(↓CA)

La costruzione di queste sei curve è semplice se si ricorda (i) che gli archi devono essere congiunti in modo che l'ultima lettera di un arco sia eguale alla prima dell'arco successivo, (ii) che due archi contigui devono avere "segno" diverso, e che (iii) ogni lettera deve apparire due e solo due volte essendoci quattro archi, con otto estremi. Necessariamente, queste due "apparizioni" sono *contigue*.

Ad esempio, se il primo arco è (↑AC), il secondo deve essere negativo e incominciare per C, quindi ↓C ..). Con questo, non ci saranno altre C. Inoltre, al posto dei due puntini, ci possono essere solo B o D, perché al secondo A è riservato l'ultimo posto, la curva essendo chiusa. **Scegliamo B**. Avremo così (↑AC) (↓CB). Ma ora il gioco è fatto: il terzo arco, come risulta da una breve riflessione, può essere solo (↑BD), perché D è l'unica lettera ancora da sistemare, di modo che il quarto arco è (↓DA). **Scegliendo D** invece di B, avremmo la curva (2).

Ma anche incominciando con (↑.. ..)(↓AC)(↑.. ..)(↓BD) la scelta è forzata: il terzo arco è necessariamente (↑ CB), perché gli estremi sono già definiti, e il primo è (↑DA), per la stessa ragione, ricordando che la curva è chiusa.

Quindi, se cerchiamo di costruire una curva come costituita da quattro archi (su dodici possibili, considerando i sensi di percorrenza) vediamo che, una volta scelti due archi, gli altri due sono fissati.

Non ci sono ovviamente altre curve che abbiano il primo arco nel semipiano Nord e inizino con A, in quanto i tre archi AB, AC, AD, possono avere solo due continuazioni ciascuno.

Tuttavia, si potrebbe dire, ci dovrebbero essere anche sei curve in cui l'arco iniziale, con primo estremo A, è situato nel semipiano Sud, cioè con segno ↓, con che il senso di lettura "naturale" della curva diventa antiorario (senza conseguenze sul valore numerico del birapporto). Seguendo le regole date sopra, abbiamo:

7) (↓AB)(↑BC)(↓CD)(↑DA)
8) (↓AB)(↑BD)(↓DC)(↑CA)
9) (↓AC)(↑CB)(↓BD)(↑DA)
10) (↓AC)(↑CD)(↓DB)(↑BA)
11) (↓AD)(↑DB)(↓BC)(↑CA)
12) (↓AD)(↑DC)(↓CB)(↑BA)

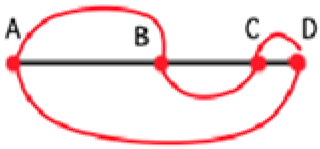
Ma la curva (1) a pag.3 , che è (↑AB)(↓BC)(↑CD)(↓DA) diventa, leggendola da destra a sinistra ↓AD)(↑DC)(↓CB)(↑BA), che è la curva (12) qui sopra. Ricordo che il segno, che indica la posizione Nord o Sud dell'arco, è parte fissa dell'arco.
Si può fare lo stesso esercizio con qualsiasi curva di una delle due serie (1-6) e (7-12), e si troverà sempre una curva nell'altra serie, che differisce dalla prima solo per essere letta in senso inverso.

Chiarito che le curve che hanno A come punto di partenza e di arrivo sono 6 (per esempio quelle da 1 a 6), si nota che ognuna di esse, essendo una curva chiusa, può essere iniziata da uno qualunque dei quattro punti, con permutazione circolare degli archi, producendo quattro curve equivalenti, per un totale di 6 x 4 = 24 curve.

Proviamo dunque a disegnare le curve (1)-(6) seguendo le regole date.

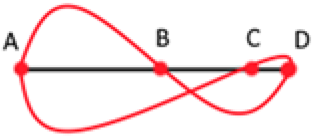
Coppia AB

I



AB CD

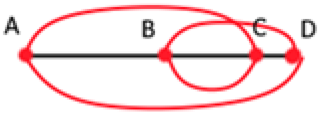
II



AB DC

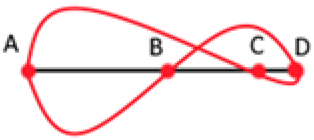
Coppia AC

III



AC BD

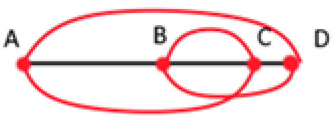
IV



AC DB

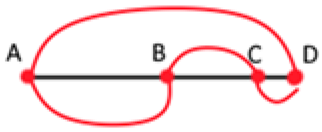
Coppia AD

V



AD BC

VI



AD CB

Alcune proprietà già notate risultano evidenti dai disegni. Notiamo che la I è la VI capovolta; la II è la IV capovolta, la III è la V capovolta. Quindi, partendo da A verso il semipiano Sud troveremmo le stesse sei curve chiuse, percorse in senso antiorario.. **Per convenzione, tutte le curve saranno percorse in senso orario**, (con la conseguenza che, ad esempio, quando introdurremo le ascisse dei punti, l'ascissa dell'estremo di partenza sarà sottratta dall'ascissa dell'estremo di arrivo.)

Inoltre, è evidente che le curve non cambiano la loro geometria partendo non da A, ma da uno qualunque degli altri tre punti. Quindi, come annunciato, per ognuna delle sei curve, ce ne sono quattro equivalenti. Totale, 24 curve in tutto, suddivise in quartetti che non sono altro che le permutazioni **circolari** (nell'uno o nell'altro senso) di quattro elementi qualsiasi A,B,C,D.

In calcolo combinatorio, i quattro elementi qualsiasi possono essere qualsiasi cosa. Per noi sono punti ordinati su una retta, ciascuno però con la sua carta d'identità, cioè l'ascissa o distanza dall'origine.

Come possiamo trasformare queste curve in birapporti? Magicamente.

Si prenda la linea l come **linea di frazione**. I due archi (orientati) di curva che stanno sopra la linea , *ciascuno iniziante e terminante in due punti (E,F) sulla linea,* sono i fattori del numeratore (orientati secondo la lettura della curva intera in senso orario), e gli archi al di sotto della linea saranno i fattori del denominatore. Come si è detto, la linea si ritiene percorsa in un solo senso. Si veda l'esempio seguente

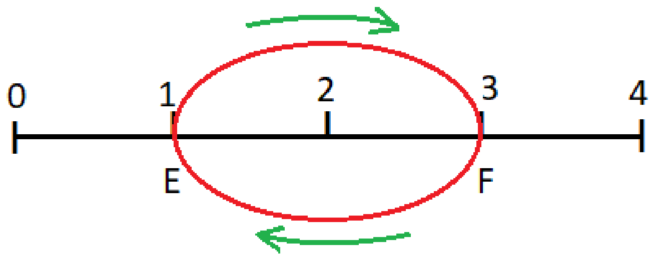


Fig. 5

Se l'ellisse è percorsa in senso orario, il "rapporto" dà come risultato $\frac{EF}{FE} = \frac{3-1}{1-3} = -1$. Ma questo è lo stesso risultato che si ottiene se l'ellisse è percorsa in senso antiorario, perché tanto il numeratore quanto il denominatore cambiano segno. Il birapporto avrà un vantaggio, perché è sufficiente che i quattro archi siano letti a due a due nello stesso senso, dal momento che, essendoci in tutto quattro archi, il segno viene cambiato due volte, e il risultato è lo stesso.

Torniamo al fatto che, se cerchiamo di costruire una curva come costituita da quattro archi, **una volta scelti due archi, gli altri due sono fissati. Letta la curva come un birapporto, in cui gli archi si trasformano in segmenti, e la linea di riferimento diviene la linea di frazione, ne segue che, scelto il numeratore (prodotto di due segmenti) della frazione a cui si riduce il birapporto, il denominatore è unico.**

Alla stessa conclusione si giunge usando la regola della figura 2, che ci dice che il birapporto è definito come in figura 2, che qui riproduco:

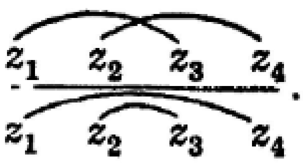


Fig.2

Vale a dire, qui si conferma che ad ogni numeratore $(z_1z_3)(z_2z_4)$ corrisponde uno e un solo denominatore, $(z_1z_4)(z_2z_3)$. Quindi, poiché i numeratori possibili sono 24, i birapporti sono ventiquattro , suddivisi in sei classi di quattro birapporti di valore eguale ciascuna.

A prima vista ci si potrebbe aspettare che, se anche i denominatori possibili fossero ventiquattro, allora sarebbe possibile un totale di 24 x 24 = 576 birapporti, un numero sterminato, anche se già sappiamo che i birapporti non sono affatto tutti distinti. Ma la soluzione al quesito non è questa, perché il birapporto deve seguire la definizione data in Fig.2. Tanto la definizione di Fig.2 quanto la considerazione geometricamente intuitiva delle nostre curve, ci dicono che i birapporti possibili sono in tutto 24.

Qui ci si può chiedere "come si scelgono i punti (o meglio, i quattro segmenti) per calcolare il birapporto?".

Da quanto precede, segue che a numeratore possiamo mettere una qualunque delle 24 permutazioni di A,B,C,D, ma, una volta fissato il numeratore, resta fissato il denominatore.

Dunque uno qualunque dei ventiquattro numeratori va bene. In genere si preferisce sceglierne uno che incomincia con A, ma non c'è alcun obbligo di farlo. In effetti, la più ovvia permutazione identifica z_1 con A, z_2 con B, z_3 con C, z_4 con D, e riproduce il birapporto classico dato in (1).

Riordiniamo le nostre curve, ricordando che, in base a quanto precede, capovolgendo la curva il numeratore si scambia col denominatore e il valore della curva diviene il suo inverso.

Otteniamo così:

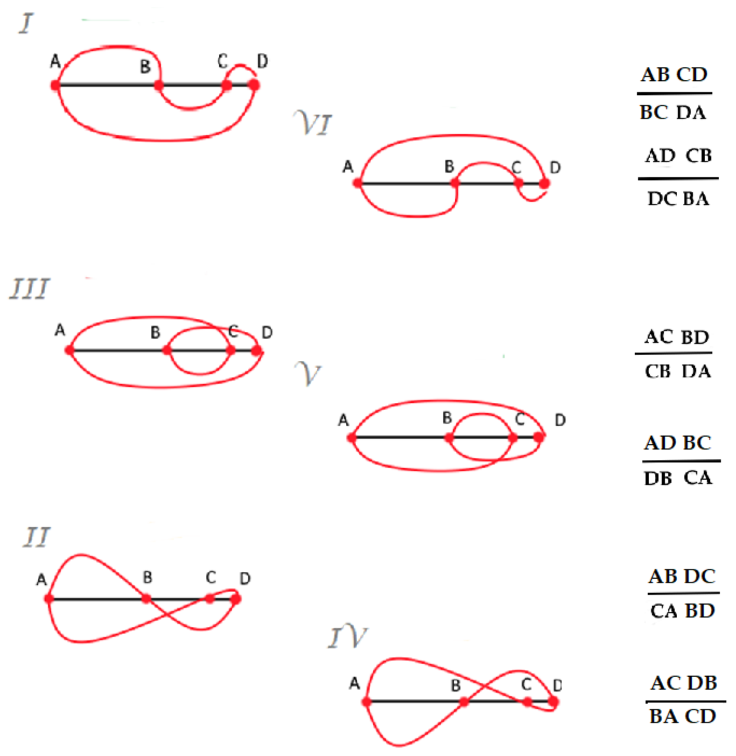


Fig.5

Come si è già più volte notato, le direzioni degli archi (qual è la prima e quale la seconda lettera) possono scambiarsi purché lo scambio avvenga a coppie, in quanto uno scambio di estremi cambia il segno dell'arco, ma il cambiamento di due segni lascia immutato il risultato.

Nel libro di testo seguito nella mia università, i birapporti erano tutti costruiti secondo la regola di Fig.2 o 2b. Se manteniamo i punti originali nell'ordine tradizionale A, B, C, D, i birapporti riescono anche nell'ordine tradizionale, che non è quello da me proposto (vedi Tavola I).

TAVOLA I, dei birapporti "tradizionali"

(tra parentesi tonde)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{b}(A,B;C,D)=\mathrm{b}(B,A;D,C)=\mathrm{b}(C,D;A,B)=\mathrm{b}(D,C;B,A)=k,\\
&\mathrm{b}(A,B;D,C)=\mathrm{b}(C,D;B,A)=\mathrm{b}(B,A;C,D)=\mathrm{b}(D,C;A,B)=\frac{1}{k},\\
&\mathrm{b}(A,C;B,D)=\mathrm{b}(D,B;C,A)=\mathrm{b}(C,A;D,B)=\mathrm{b}(B,D;A,C)=1-k,\\
&\mathrm{b}(A,D;B,C)=\mathrm{b}(C,B;D,A)=\mathrm{b}(D,A;C,B)=\mathrm{b}(B,C;A,D)=\frac{k-1}{k},\\
&\mathrm{b}(A,D;C,B)=\mathrm{b}(B,C;D,A)=\mathrm{b}(D,A;B,C)=\mathrm{b}(C,B;A,D)=\frac{k}{k-1},\\
&\mathrm{b}(A,C;D,B)=\mathrm{b}(B,D;C,A)=\mathrm{b}(C,A;B,D)=\mathrm{b}(D,B;A,C)=\frac{1}{1-k}.
\end{aligned}
$$

In questa tavola, i birapporti sono identificati dai numeratori delle frazioni che costituiscono il birapporto, e i due segmenti che costituiscono il prodotto sono separati da punto e virgola.

Noi invece ci accontenteremo della seguente Tavola II (leggendo i punti in senso orario e chiudendo fra parentesi quadre i nostri birapporti). L'ordine delle righe di Tav.1 è così scompigliato (come si vede dai valori dei birapporti, che calcoleremo, riportati a destra in rosso).

TAVOLA II (dalla lettura delle nostre curve chiuse in senso orario)

(In parentesi quadre)

(I) [ABCD] = [DABC] = [CDAB] = [BCDA] = **m** (per ora incognito) **1-k**

(VI) [ADCB] = [BADC] = [CBAD] = [DCBA] = **1/m** (in quanto la figura è semplicemente capovolta.) $\frac{1}{1-k}$

(II) [ABDC] = [CABD] = [DCAB] = [BDCA] = **n** (o 1/n, per ora incognito) $\frac{k-1}{k}$

(IV) [ACDB] = [BACD] = [DBAC] = [CDBA] = **1/n** (o n, vedi sopra) = $\frac{k}{k-1}$

(III) [ACBD] = [DACB] = [BDAC] = [CBDA]= **1-m**, o k (classico nome di questo birapporto)

(V) [ADBC] = [DBCA] = [BCAD] = [CADB] = $\frac{1}{1-m}$ o $1/k$

Per costruire la Tav.I è piuttosto laborioso elencare i quattro birapporti che hanno lo stesso valore. Invece, nella Tavola II, data sopra, le permutazioni entro ciascuna riga sono cicliche (come risulta leggendo una stessa curva nello stesso senso), a partire da quella iniziale, che inizia con la lettera A. Nell'insieme, la Tav.II mi sembra più facile da costruire. Ma la differenza non è drammatica, e in fondo è questione di gusti.

In ogni caso, se abbiamo una data permutazione fornita dalla lettura in senso orario di una curva, partendo dal punto C, per esempio [CDBA], noi possiamo ricostruire immediatamente la curva (chiusa e partente da A) da noi considerata, e direttamente le quattro permutazioni possibili.

II. NUMERI

II.1 IL BIRAPPORTO È UN INVARIANTE PROIETTIVO (METODO ALGEBRICO)

Il mio venerabile libro di testo diceva che per costruzione il birapporto "ha carattere proiettivo".
Questa locuzione non è più usata, e definire il carattere proiettivo di una forma geometrica richiede qualche spiegazione in più, perché, parer mio, non si può dare in poche parole la spiegazione di cosa sia la geometria proiettiva.

Ora, esistono (almeno) due modi, uno geometrico e uno algebrico, di mostrare che il birapporto ha carattere proiettivo, o meglio, è un invariante proiettivo. I due modi sono basati su due definizioni equivalenti di geometria proiettiva.

1) Metodo geometrico (vedi Nota 1), usato in Wikipedia Francese e Italiana: "la **geometria proiettiva** è la parte della geometria che modellizza i concetti intuitivi di *prospettiva* e *orizzonte*." Questa definizione discende direttamente dall'arte quattro-cinquecentesca della prospettiva.
2) Metodo algebrico (in questa sezione e in Nota 2) , usato specialmente in Wikipedia Inglese: "la geometria proiettiva è lo studio delle proprietà geometriche che sono invarianti rispetto alle trasformazioni proiettive." Questa illustrazione discende direttamente dal "programma di Erlangen di F. Klein " (vedi Postfazione).

Supponendo di essere in questo secondo caso, con pazienza o con un buon programma di calcolo formale, io uso Mathematica, si può dimostrare che il birapporto è un invariante rispetto alle trasformazioni proiettive.

Per essere generali diamo i valori x[1], x[2], x[3], x[4] alle ascisse dei quattro punti, e scriviamo il birapporto nel modo tradizionale,

$$i) \qquad \frac{(x[1]-x[3])(x[2]-x[4])}{(x[2]-\ x[3])(x[1]-x[4])}$$

Applichiamo ora la **classica trasformazione proiettiva** (razionale fratta):

$$\text{ii)} \qquad \mathrm{y[i]} = \frac{(\mathrm{a}+\mathrm{bx[i]})}{(\mathrm{c}+\mathrm{dx[i]})}$$

e dimostriamo che il birapporto in termini di x[i] è eguale al birapporto in termini di y[i], cioè:

$$\frac{(y[1]-y[3])(y[2]-y[4])}{(y[2]-y[3])(y[1]-y[4])} = \frac{(x[1]-x[3])(x[2]-x[4])}{(x[2]-x[3])(x[1]-x[4])}$$

Trascriviamo il **membro di sinistra eseguendo le sostituzioni (ii),** il che ci porge:

$$\frac{(-\frac{a+bx[1]}{c+dx[1]}+\frac{a+bx[3]}{c+dx[3]})(-\frac{a+bx[2]}{c+dx[2]}+\frac{a+bx[4]}{c+dx[4]})}{(-\frac{a+bx[2]}{c+dx[2]}+\frac{a+bx[3]}{c+dx[3]})(-\frac{a+bx[1]}{c+dx[1]}+\frac{a+bx[4]}{c+dx[4]})}$$

Si semplifica (esistono vari programmi che lo possono fare per noi), e si ottiene magicamente (*Veda Nota 2 chi lo vuol fare in proprio*):

$$\frac{(x[1]-x[3])(x[2]-x[4])}{(x[2]-\ x[3])(x[1]-x[4])}$$

Questo ci assicura sul fatto che il birapporto è un invariante proiettivo. In realtà taluni ritengono che sia l'unico, mentre altri dissentono. Se fosse l'unico, ciò significherebbe che in ultima analisi esso è l'unica colonna portante della geometria proiettiva.

Probabilmente, se il birapporto fosse nato come rappresentazione del gruppo anarmonico di quattro elementi, si sarebbe preferito un ordinamento come quello che io utilizzerò. Il fatto è che il birapporto è nato da considerazioni geometriche, e le varie permutazioni furono studiate solo in seguito.

In questo caso, come già notato a pag.7, è logico battezzare x1 come A, x2 come B etc, trovando che il birapporto di partenza è **il classico:**

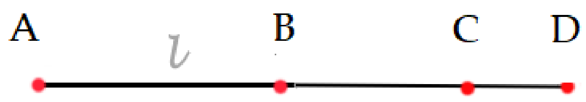
$$(1c) \qquad \frac{\frac{CA}{CB}}{\frac{DA}{DB}} = \frac{CA\ DB}{CB\ DA} = \frac{\frac{c-a}{c-b}}{\frac{d-a}{d-b}} = \mathrm{k}$$

O altra sua versione ottenuta scambiando i punti terminali dei segmenti in modo coerente.

II.2 IL GRUPPO ANARMONICO

Per noi si tratta in pratica di calcolare i valori di m e n nella nostra tavola, in funzione di k, per *verificare* la nostra Tavola II.

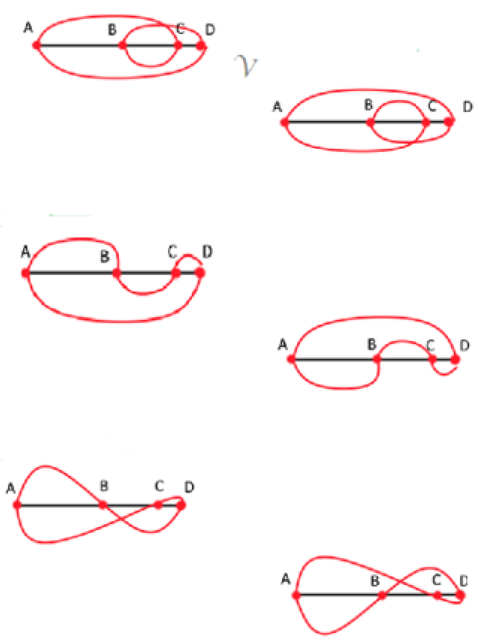
Prendiamo la Fig.3 come punto di partenza:



Per riconoscere le relazioni che intercorrono tra le 6 permutazioni, è utile trasformare in espressioni algebriche i rapporti di segmenti.

Come una breve riflessione rivela subito, noi abbiamo la libertà di scegliere uno dei punti (qui A) come origine, che chiameremo O, e assegnare l'ascissa 1 to B, che d'ora in poi chiameremo "1", in modo che la sua ascissa (AB = O1) definisca l'unità di lunghezza del nostro sistema. Restano due punti, a cui daremo nomi di X e Y, con ascisse x e y. Con questo approccio semialgebrico, vediamo che tutte le proprietà generali che troveremo sfruttando la scelta 0,1,x,y varranno per qualsiasi gruppo di quattro punti su una retta.

Se noi assegnassimo valore diverso da 1 al segmento AB, dovremmo naturalmente scalare le altre ascisse in modo da renderle coerenti con AB, ma si tratterebbe di complicazioni che a questo punto non porterebbero, spero, a nulla di nuovo.



$$\frac{AC\ BD}{CB\ DA} = \frac{x(y-1)}{(1-x)(-y)} = \frac{x(y-1)}{y(x-1)} = k$$

$$\frac{AD\ BC}{DB\ CA} = \frac{y(x-1)}{x(y-1)} = \frac{1}{k}$$

$$\frac{AB\ CD}{BC\ DA} = \frac{1\,(y-x)}{(x-1)\,(-y)} = \frac{1\,(y-x)}{y(1-x)} = 1-k$$

$$\frac{AD\ CB}{DC\ BA} = \frac{y(1-x)}{1\,(y-x)} = \frac{1}{1-k}$$

$$\frac{AB\ DC}{CA\ BD} = \frac{(-1)(y-x)}{x(1-y)} = \frac{1(x-y)}{x(1-y)} = \frac{k-1}{k}$$

$$\frac{AC\ DB}{CD\ BA} = \frac{x(1-y)}{1(x-y)} = \frac{k}{k-1}$$

Fig.6

Poiché si tratta di frazioni semplici, possiamo cercare quelle che hanno lo stesso denominatore. La somma dei numeratori diventa allora la scelta più ovvia per trovare relazioni semplici. Ed è un altro fatto notevole che i denominatori siano eguali a due a due.

Si sommino per esempio la (I) e la (III). La somma dei numeratori è : $x(y-1)+x-y = xy-y = y(x-1)$ Ma così il numeratore risulta eguale al denominatore, per cui abbiamo (I) +(III) = 1, o meglio (III)= 1-(k). Di qui m = 1-k, come avevamo indicato senza giustificazione in Tav.II. La (VI) ne è l'inverso, cioè (VI) = 1/(1-k).

La (VI), cambiando di segno a numeratore e denominatore, assume lo stesso denominatore della (IV). La somma dei numeratori è ora: $y(x-1)+x(1-y) = xy-y+x-xy = x-y$. Anche qui il numeratore diviene eguale al denominatore, per cui abbiamo 1-(VI) = (IV). La (IV) ha quindi valore 1 – 1/(1-k) = k/(k-1)

Infine la (V) ne è l'inverso, cioè = (k-1)/k = 1-1/k.

Abbiamo quindi trovato sei valori k, 1/k, 1-1/k, k/(k-1), 1-k, 1/(1-k). Se si effettuano su questi sei valori solo le due operazioni "fare l'inverso" e "sottrarre da 1", una dietro l'altra, quante volte si vuole, il risultato è ancora e sempre uno dei sei membri del gruppo, il gruppo del birapporto, di cui si occuperanno i cultori di teoria dei gruppi.

Qui vorrei fare un'osservazione: di rado viene sottolineato che, dati quattro punti appartenenti a una stessa retta, noi possiamo mutare solo o il senso di percorrenza o la scala delle distanze dei segmenti che ne derivano e occorrono per calcolare il birapporto.

Mutare il senso di percorrenza , come si è più volte detto, non cambierebbe nulla**; ma neanche mutando la scala delle lunghezze le cose cambierebbero.**

Guardando ai risultati in Fig-6, si direbbe che x(x-1)/(x-y) cambia valore cambiando la scala delle lunghezze. Ma non bisogna dimenticare i fattori 1 che sono stati eliminati. Se sostituissimo il valore 1, che definisce la scala delle lunghezze, con s, il rapporto citato sarebbe $sx(sx-s)/s(sx-sy)= s^2\, x(x-1)/ s^2(x-y) = x(x-1)/(x-y)$. In altre parole, se non vogliamo perderci nei cambiamenti di scala, è meglio fare riferimento alla terzultima colonna di Fig.6, e ricordare che il numero 1 rappresenta la lunghezza unitaria.

E' come se quattro punti collineari si portassero nel loro bagaglio certi sei numeri (adimensionali e derivabili gli uni dagli altri), che non abbandonerebbero mai.

Un'altra osservazione è che mentre il birapporto classico (1c) è sempre positivo, se i punti A,B,C,D sono alfabeticamente ordinati, i sei birapporti che risultano dagli stessi quattro punti (come da tavola I o tavola II) possono anche avere valori negativi. In effetti dando a k il valore di 4/3, come nel caso di Fig.1, già 1-k = -1/3 (birapporto 3 di Tav I o birapporto 1 di Tav.II) , è negativo, e lo stesso accade per altri valori.

Ancora più importante, non è scritto da nessuna parte che i quattro punti devono essere alfabeticamente ordinati sulla retta di riferimento.

Cenno sulla quaterna armonica

Se una quaterna A, B, C, D ordinata in modo tradizionale ha birapporto k= - 1, essa è detta **quaterna armonica**, dove il birapporto è quello classico (il primo di Tav. I e quinto di Tav. II) cioè

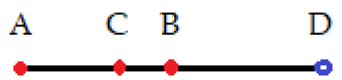
$$\frac{CA\;DB}{CB\;DA} \equiv \frac{AC\;BD}{CB\;DA} = -1$$

Le quattro quaterne della prima riga hanno quindi lo stesso birapporto k= -1. Ma, dato che le quaterne della seconda riga in Tav.I, (o della sesta riga in Tav.II) hanno valore 1/k, ciò significa che anche il loro birapporto vale 1/k = -1, cioè sono anch'esse quaterne armoniche. *Possono quindi esistere in tutto otto quaterne armoniche (su ventiquattro).* Le altre sedici avranno valore 2, oppure ½,

Che particolarità ha una quaterna armonica?

La risposta ufficiale è che C e D dividono il segmento AB internamente ed esternamente nello stesso rapporto. Come nel caso delle permutazioni che ci danno i 24 birapporti, in cui non è chiaro che cosa si permuta, ma quasi nessun testo a me noto si sofferma a spiegarlo, (perché per l'autore è ovvio), anche in questo caso pochi testi si fermano a spiegare che cosa significhi la frase "dividono esternamente".

Notando però che il birapporto $\frac{AC\ BD}{CB\ DA} = -1$ ci dice che $\frac{AC}{CB} = \frac{-DA}{BD}$ e osservando la figura



con ascisse $x_A = 0$, $x_C = 2/3$, $x_B = 1$, $x_D = 2$, vediamo che AC/CB= 2, e AD/BD =2 (dove AD ha sostituito – DA.) Per essere così, l'ascissa di D deve valere 2. A parte l'uso della formula accompagnata dal diagramma, non vedo molti modi di spiegare ciò che significa "dividere esternamente".

Questione di nomenclatura: le due coppie sono dette *coniugate armoniche*, ovvero i due punti C, D sono *coniugati armonici* di A, B, o finalmente D è il *quarto armonico* dopo A,B. C. Le nostre ascisse (0,1,x,y), come si è detto, sono utili per trovare immediatamente relazioni fra i valori dei birapporti. Per lo studio del birapporto armonico è però più comodo tornare ad ascisse più generiche, cioè $x_A = 0$, $x_C = c$, $x_B = b$, $x_D = d$, da cui abbiamo $\frac{(c-0)(d-b)}{(d-0)(c-b)} = -1$ cioè $dc - bc = -cd + db$ o meglio $2cd = b(d + c)$, o anche

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\ ; \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$$

forma che illustra la simmetria della quaterna, in quanto b va inteso come b-a e così c e d.

Nel nostro caso, c = 2/3, d = 2, e la nostra formula dice che ***1/b* = (1/2) (3/2+1/2) = 1 e *b*=1.** Abbiamo dunque che 1/b è a mezza via tra 1/c e 1/d. Ma questa proprietà si verifica in tutte le successioni **a(n)** in progressione aritmetica, tali cioè che la differenza tra due termini consecutivi è costante. Infatti, se ***a*(*n*+1) = *a*(*n*) +*r* e *a*(*n*+2) = *a*(*n*) + 2*r***, abbiamo allora ***a*(*n*+1) = *a*(*n*) +*r*,** dove **r = (1/2 (*a*(*n*+2)-*a*(*n*)).** Quindi a(n+1) = (1/2)(a(n)+a(n+2)). Cdd.

Ma intanto abbiamo anche mostrato che gli **inversi dei termini in una successione armonica** sono in **successione aritmetica** (e viceversa).
Una tipica successione aritmetica è costituita dai numeri naturali, 1,2,3,…. I loro inversi costituiscono pertanto la serie armonica. In questa serie, qualsiasi tre termini consecutivi più l'origine, cioè quartetti del tipo 0, 1/n, 1/(n+1), 1/(n+2) sono in successione armonica, in quanto i loro inversi sono in successione aritmetica.

Ma da dove piove questo termine di "armonica"? Il fatto è che nella musica tonale (che ha dominato la musica occidentale dal XVII al XIX secolo, per ottenere l'accordo perfetto, ad esempio **do, mi, sol** nella scala naturale (non Pitagorica!), con uno strumento a corda, si devono usar corde le cui lunghezze sono proporzionali ai numeri 1 (tonica), 4/5 (terza maggiore), 2/3 (quinta giusta). Prendiamo gli inversi di questi tre numeri e otteniamo 1, 5/4,

3/2. La differenza tra due termini successivi è costante: 5/4-1 = ¼; 3/2-5/4 = 6/4-5/4 = 1/4.
Poiché gli inversi delle lunghezze delle corde nell'accordo perfetto differiscono l'uno dall'altro per un valore costante, cioè sono in successione aritmetica, le lunghezze delle corde che formano l'accordo perfetto sono in successione armonica e formano un birapporto di valore -1 includendo l'origine. Questo lo si può verificare ponendo $a=x_A=0$, $b=x_B=4/5$, $c=x_C=2/3$, $d=x_D=1$ (dove abbiamo avuto cura di separare le due coppie A,B e C,D) e inserendoli nella $\frac{(c-0)(d-b)}{(d-0)(c-b)}$:

$$\frac{(2/3)(1-4/5)}{1(\frac{2}{3}-\frac{4}{5})} = \frac{2/15}{-2/15} = -1$$

Ma si dà il caso che nella musica occidentale **l'accordo perfetto maggiore** sia chiamato anche **accordo armonico** perché rappresenta un tipo di accordo stabile e consonante che svolge un ruolo fondamentale nella creazione di armonia all'interno della musica occidentale. Esso darebbe, secondo la teoria musicale classica, una sensazione di "piacevolezza e di equilibrio musicale".
Dunque abbiamo il curioso risultato che l'orecchio distingue e gradisce accordi musicali, che sono in relazione con il birapporto di valore -1.

E l'occhio? Sorprendentemente, anche l'occhio (occidentale) gode del birapporto armonico. Infatti, mentre penso che gli architetti antichi arrivarono al birapporto armonico nelle loro costruzioni per caso, secondo il loro gusto, nel Rinascimento il birapporto armonico fu

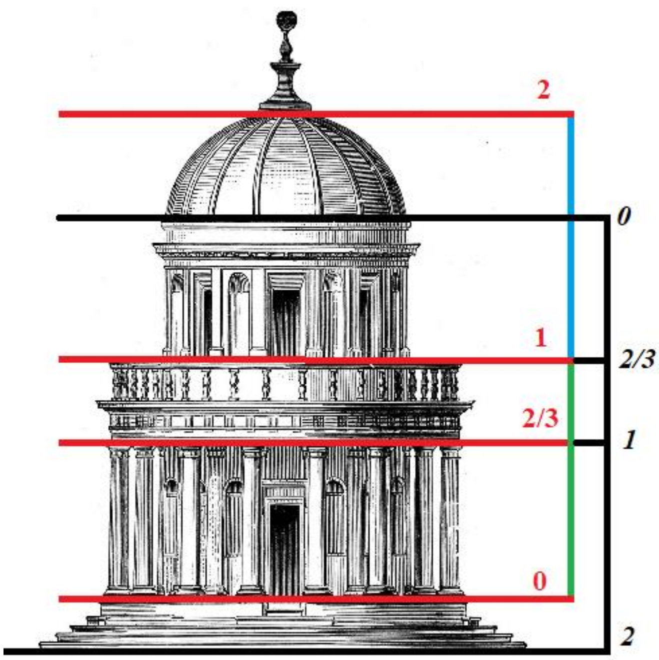


Fig.7

evidentemente ricercato di proposito. Il Bramante, nel suo tempietto di Sn Pietro in Montorio (Roma, 1502-1510), presenta due birapporti armonici principali del tipo da noi

trovato (0, 2/3, 1, 2). In Fig.7 vediamo che un birapporto (rosso) , parte dalla base delle colonne e dalla soglia (sopraelevata), e va verso l'alto (a 2/3 troviamo la sommità dei capitelli, a 1 troviamo la sommità della balconata, a 2 troviamo la sommità della cupola. Il secondo birapporto (nero) parte dalla base della cupola e scende verso il basso, condividendo due linee (2/3 e 1) con il birapporto rosso.
Ma questi due birapporti armonici non sono i soli. Infatti, con un po' di attenzione, si possono scoprire molti altri birapporti armonici che condividono linee orizzontali. Come si trovano? Tutte le volte che vediamo tre parellele di cui quella intermedia è ad eguale distanza ***d*** dalle altre due, abbiamo un birapporto armonico se troviamo una linea a 2/3(***d***) partendo da una delle due estreme, da una parte o dall'altra. E qui se ne vedono diversi. Mirabile costruzione! Non solo, ma poiché i birapporti hanno carattere proiettivo, il risultato è che le proporzioni stabilite dal Bramante si conservano da qualsiasi punto di vista si veda il tempietto.

Insomma, questo birapporto armonico (senza che la maggior parte del genere umano se ne renda conto), salta fuori nell'arte (classica), musica e architettura. A quanto pare, tanto l'occhio quanto l'orecchio godono del birapporto armonico, che potrebbe essere quasi usato come definizione matematica dell'arte classica.

III. POSTFAZIONE

La Geometria proiettiva fu lodata da molti, tra cui il fisico Dirac, come uno dei rami più eleganti della matematica. Si può essere d'accordo. Ma, all'Università di Torino, dove io giunsi per sbaglio paracadutato dal Liceo Classico, fu per me un mezzo incubo, anche perché la trattazione, relativamente intuitiva, della geometria analitica, era preceduta da un'introduzione assai più astratta basata sulla geometria proiettiva, anzi, sulla geometria affine.

L'introduzione iniziava con una breve discussione del "**Programma di Erlangen**", di Felix Klein (1872), che affermava che le varie branche della geometria, che si venivano sviluppando dalla fine del XVIII secolo, potevano essere classificate in base alla *geometria proiettiva* (come concetto unificante) e alla *teoria dei gruppi* (come strumento, in quanto le varie branche della geometria studiavano ciascuna un diverso *gruppo di trasformazioni* degli oggetti geometrici che trattavano.)

Per riassumere il programma in maggior dettaglio , è difficile fare meglio di Wikipedia, alla quale rimando: (https://it.wikipedia.org/wiki/Programma_di_Erlangen)

A livello più elementare vale ancora il testo di *Courant e Robbins "Che cosa è la matematica", Capo IV, edizione 1950*.

Tutte queste trasformazioni hanno in comune il fatto che esistono in ogni branca della geometria elementi invarianti ad essa specifici. Ad esempio le trasformazioni della **geometria euclidea** mantengono invarianti angoli e lunghezze degli oggetti che trattano, e quindi si limitano a "trasformazioni" che sono traslazioni e rotazioni. La **geometria "affine",** invece, non si cura di angoli e lunghezze, ma si limita a studiare allineamenti di punti, parallelismo, incidenza (anch'essi invarianti in geometria Euclidea) colmando lo spazio tra geometria euclidea e geometria proiettiva.

E la **geometria proiettiva**?

Ho già parlato della difficoltà di definire in breve la geometria proiettiva. Il nostro testo universitario metteva alla base della geometria proiettiva il temuto "**birapporto**" (in inglese *Cross-ratio*). Il birapporto, come abbiamo visto, si riferisce alle distanze fra quattro punti scelti a piacere sulla retta, e a un doppio rapporto di queste distanze fra coppie di punti presi in un certo ordine.

Storicamente, il birapporto fu studiato assai presto, ed è corredato da diversi teoremi di illustri matematici del passato, quali Girard Desargues (1591-1661), forse il fondatore della geometria proiettiva, che introdusse il concetto (ma non il nome) di birapporto. Colin MacLaurin (1698-1746) e Jean-Victor **Poncelet** (1788-1867) contribuirono largamente. Poncelet utilizzò il nome di "**birapport**", subito accolto dagli italiani.

Di fatto, la vera importanza del birapporto sta nel fatto che esso è invariante per proiezioni, ciò che lo rende un importante elemento base della geometria proiettiva: tale lo considerò per primo Lazare **Carnot** (1803), normalmente in tutt'altre faccende affaccendato, mentre ad August Ferdinand **Moebius** (1790-1868) è attribuita la dimostrazione che il birapporto può essere considerato l'unico invariante della geometria proiettiva. Möbius dimostrò che, indipendentemente da come i punti vengono proiettati o trasformati all'interno del piano proiettivo, finché rimangono collineari, il birapporto rimarrà lo stesso.

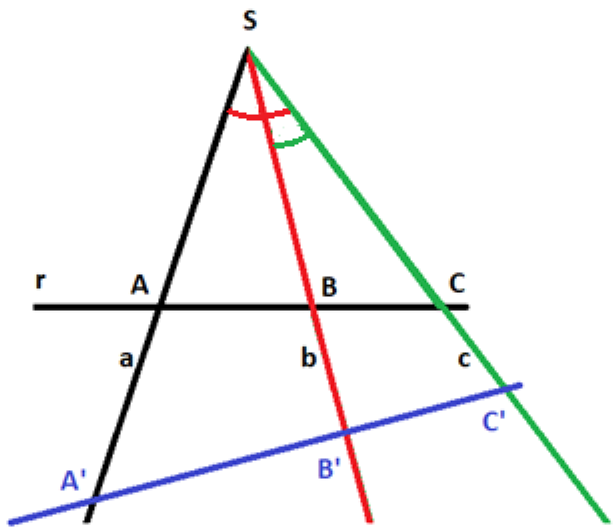
Ma, sorprendentemente, il birapporto non era ignoto neppure ai Greci.

L'invarianza del birapporto è in ultima analisi quello che permette di riconoscere corrispondenze fra fotografie e realtà. Ad esempio, il birapporto non varia se noi, scelta una strada rettilinea su cui sono piantati almeno quattro pali equidistanti, la paragoniamo ad una sua fotografia presa di scorcio. I pali raffigurati sulla fotografia sembrano esser sempre più vicini tra loro quanto più lontani sono dall'osservatore, e quanto più di scorcio è presa la fotografia. Questo avvicinarsi delle immagini dei pali, però, non è arbitrario, ma segue una legge che l'occhio umano riconosce. La legge è che il birapporto nelle immagini dei quattro pali (calcolate per esempio su una fotografia) è eguale al birapporto che si calcolerebbe con le distanze reali.

Questa non ovvia proprietà delle prospettive fu notata dai Greci, e il matematico **Pappo di Alessandria** la scoprì o quanto meno ne fece uso nel libro VII della sua *Collezione* (c.340 dC). Ma come e perché vi siano arrivati i Greci, che non avevano né camere oscure né macchine fotografiche e non conoscevano le regole della prospettiva, inventate nel Rinascimento italiano (citerei Filippo **Brunelleschi** come uno, se non il primo, degli inventori), resta un piccolo mistero.

NOTA 1. (dimostrazione del fatto che il birapporto è costante per proiezioni)

Introduciamo dapprima il rapporto semplice di due segmenti AC e BC, considerando i due triangoli SAC e SBC ed applicando il teorema dei seni della trigonometria.



TEOREMA DEI SENI

$$AC = \sin(ac)\,\frac{SA}{\sin(cr)}$$

$$BC = \sin(bc)\,\frac{SB}{\sin(cr)}$$

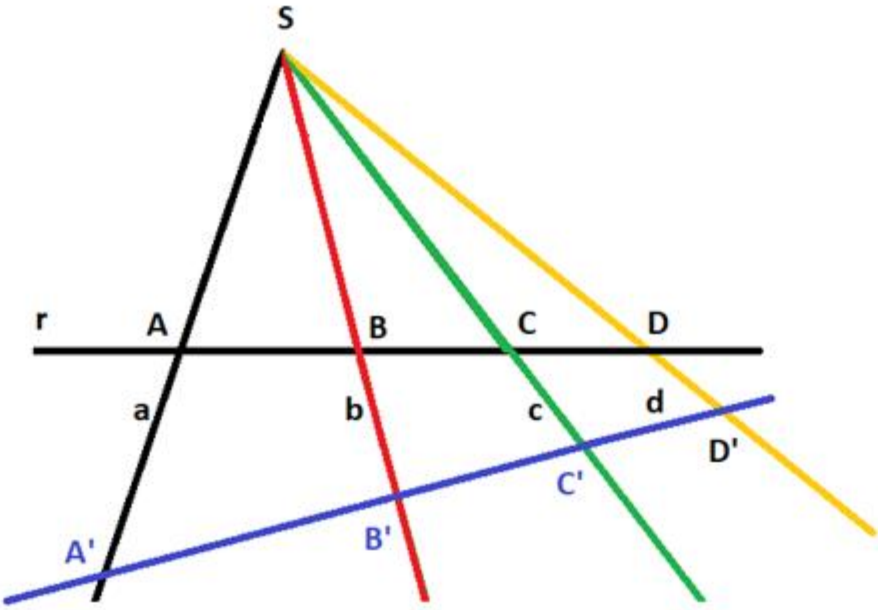
$$(ABC) = \frac{AC}{BC} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}\,\frac{SA}{SB}$$

$$(A'B'C') = \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}\,\frac{SA'}{SB'}$$

Come vediamo, proiettando da S il terzetto di punti (A,B,C) in (A′,B′,C′) non abbiamo alcuna garanzia che (ABC) = (A′B′C′) anche se gli angoli fra le rette sono gli stessi, perché SA/SB non è necessariamente eguale a SA′/SB′.

Il nostro scopo è quindi quello di trovare un'espressione che a secondo membro contenga solo i rapporti dei seni degli angoli fra le rette, **che non mutano in una proiezione.** Detto in altre parole, in qualche modo bisogna eliminare il rapporto SA/SB. Per ottenere ciò, osserviamo che in un rapporto semplice compaiono solo i segmenti SA e SB e non il segmento SC.

Quindi, se introduciamo una quarta retta d, e consideriamo i due rapporti semplici (ABC) e (ABD), vediamo che a secondo membro di entrambi appaiono soltanto i rapporti SA/SB, ma non compaiono né SC né SD. Quindi,



$$\frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC/BC}{AD/BD} = \frac{AC\ BD}{AD\ BC} = \frac{\sin(ac)\ /\sin\ (bc)(\frac{SA}{SB})}{\sin(ad)/\ \sin\ (bd)(\frac{SA}{SB})} = \frac{\sin(ac)\sin\ (bd)}{\sin(ad)\sin(bc)}$$

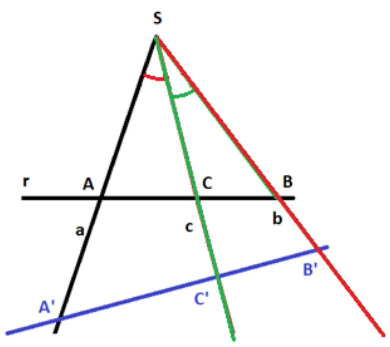
A questo punto il birapporto dipende unicamente dagli angoli tra le rette, e di conseguenza non varia al variare delle trasversali su cui le varie rette **proiettano** i quattro punti. È quindi un invariante proiettivo.

Cdd.

Ma la stessa forma da noi utilizzata per il birapporto vale anche se, ad esempio, la retta c si trova tra le rette a e b. Basta di mostrarlo per il rapporto semplice, poiché la sua forma non cambia con questo scambio tra b e c. (ABC) potrà ancora essere scritto come:

$$(ABC) = \frac{AC}{BC} = \frac{\sin\ (ac)}{\sin(bc)}\frac{SA}{SB}$$

Con la sola differenza che BC (come B′C′ eccetera) avrà un valore di segno diverso da quello degli altri segmenti.



TEOREMA DEI SENI

$$AC = \sin\ (ac)\ \frac{SA}{\sin(cr)}$$

$$BC = \sin(bc)\ \frac{SB}{\sin(cr)}$$

$$(ABC) = \frac{AC}{BC} = \frac{\sin\ (ac)}{\sin(bc)}\ \frac{SA}{SB}$$

$$(A'B'C') = \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{\sin\ (ac)}{\sin(bc)}\ \frac{SA'}{SB'}$$

La nostra dimostrazione può però dare l'idea che il birapporto dipenda dal punto S e dalle quattro rette che tagliano la retta di riferimento r nei quattro punti A,B,C,D. Ma il birapporto è unicamente un doppio rapporto di lunghezze di segmenti, e le quattro rette non sono altro che un'impalcatura che poi può essere tolta. Il birapporto è quindi una sorta di patrimonio che il quartetto porta con sé ovunque vaghi con la sua retta nello spazio, e, come si è visto, qualunque unità di misura si usino.

NOTA 2. (calcolo della sostituzione lineare fratta).

Continuando il calcolo che ci siamo proposti a pag.11, supponiamo di essere sulla classica isola deserta e di non avere a nostra disposizione mezzi di calcolo sofisticati. Osserviamo l'espressione:

$$\frac{(-\frac{a+bx[1]}{c+dx[1]}+\frac{a+bx[3]}{c+dx[3]})(-\frac{a+bx[2]}{c+dx[2]}+\frac{a+bx[4]}{c+dx[4]})}{(-\frac{a+bx[2]}{c+dx[2]}+\frac{a+bx[3]}{c+dx[3]})(-\frac{a+bx[1]}{c+dx[1]}+\frac{a+bx[4]}{c+dx[4]})}$$

Essa può essere scritta per maggior comodità:

$$\frac{(\frac{a+bx[3]}{c+dx[3]}-\frac{a+bx[1]}{c+dx[1]})(+\frac{a+bx[4]}{c+dx[4]}-\frac{a+bx[2]}{c+dx[2]})}{(\frac{a+bx[3]}{c+dx[3]}-\frac{a+bx[2]}{c+dx[2]})(\frac{a+bx[4]}{c+dx[4]}-\frac{a+bx[1]}{c+dx[1]})}$$

Vediamo che in essa compaiono quattro coppie di frazioni formalmente simili, a parte il valore degli indici delle variabili. Evidentemente tutte le manipolazioni possono essere ridotte a quelle di una coppia (per esempio quella in rosso), riservandoci di sostituire opportunamente gli indici per riprodurre le altre.

Inoltre, il prodotto dei denominatori comuni delle due coppie al numeratore varrà:

$$\mathrm{D} = (\mathrm{c} + \mathrm{dx}[1])(\mathrm{c} + \mathrm{dx}[2])(\mathrm{c} + \mathrm{dx}[3])(\mathrm{c} + \mathrm{dx}[4])$$

che è lo stesso prodotto dei denominatori comuni delle due coppie al denominatore. **Pur tenendone conto, possiamo evitarci il lavoro di scriverlo per disteso.**

A numeratore della prima coppia a numeratore (in rosso) possiamo scrivere

$$(\mathrm{c} + \mathrm{dx}[1])(\mathrm{a} + \mathrm{bx}[3]) - (\mathrm{c} + \mathrm{dx}[3])(\mathrm{a} + \mathrm{bx}[1]) =$$

$$\mathrm{ac} + \mathrm{bcx}[3] + \mathrm{adx}[1] + \mathrm{dbx}[1]\mathrm{x}[3] - \mathrm{ac} - \mathrm{bcx}[1] - \mathrm{adx}[3] - \mathrm{dbx}[1]\mathrm{x}[3]$$

Qui la parte negativa è quella positiva in cui gli indici 1 e 3 sono scambiati.

Ma i termini in rosso si cancellano e il numeratore resta:

$$\mathrm{ad}(x[1] - x[3]) - \mathrm{bc}(x[1] - x[3]) = (\mathrm{ad} - \mathrm{bc})\ (\mathrm{x}[1] - \mathrm{x}[3])$$

Ora, la seconda coppia al numeratore non differisce dalla prima che ponendo x[2] al posto di x[1] e x[4] al posto di x[3].

Il prodotto dei numeratori diventa quindi

$$\mathbf{(ad\text{-}bc)^2\ (x[1]\text{-}x[3])\ (x[2]\text{-}x[4])}$$

Il prodotto dei numeratori a denominatore sarà lo stesso, ma effettuando lo scambio (1,2,3,4) in (2,1,3,4), mentre il fattor comune $(ad\text{-}bc)^2$ resterà invariato. Avremo cioè:

$$\mathbf{(ad\text{-}bc)^2\ (x[2]\text{-}x[3])\ (x[1]\text{-}x[4])}$$

Facendo il rapporto, che, oltre al fattore comune, eliminerà anche i denominatori D (che non abbiamo mai scritto) otterremo quindi:

$$\frac{(\mathbf{x}[\mathbf{1}] - \mathbf{x}[\mathbf{3}])\ (\mathbf{x}[\mathbf{2}] - \mathbf{x}[\mathbf{4}])}{(\mathbf{x}[\mathbf{2}] - \mathbf{x}[\mathbf{3}])\ (\mathbf{x}[\mathbf{1}] - \mathbf{x}[\mathbf{4}])}$$

Cdd.