CHE COSA SONO I SIMBOLI DI CHRISTOFFEL?

Ovvero:"I simboli di Christoffel del poveruomo"

Seconda Edizione.

Con cenni sulle equazioni di Lagrange, le geodetiche, le derivate covarianti)

Le mie conoscenze di matematica sono ancora più modeste che al tempo della prima edizione, e mi obbligano a dare un'idea ancora più elementare, spero non troppo fuorviante, di che cosa sono i simboli di Christoffel, con una necessaria divagazione sulle equazioni di Lagrange, sulle geodetiche e sulle derivate covarianti.

Quattro nozioni preliminari.

1) Elwin Bruno Christoffel introdusse i simboli che portano il suo nome nel 1869, prima che fosse divulgato il calcolo tensoriale (Gregorio Ricci-Curbastro, anni 1887-1896.) D'altronde, Gauss, nel suo trattato sulle superfici curve (DISQUISITIONES GENERALES CIRCA SUPERFICIES CURVAS, 1827, precedute da un articolo in tedesco del 1825) non si servì di concetti riconducibili ai simboli di Christoffel, pur ponendo le basi per il loro futuro sviluppo.

2) Essi compaiono assai presto in qualsiasi testo di calcolo tensoriale, ma non sono tensori, e pertanto non godono della maggior parte delle proprietà dei tensori. La maggior ragione per cui non possiamo classificarli come tensori è che essi si applicano a (alcuni direbbero "sono a cavallo tra") due punti diversi, mentre i tensori, in particolare i vettori, sono di solito applicati a un solo punto. In coordinate cartesiane la restrizione è irrilevante, perché qui i simboli di Christoffel sono tutti nulli, e il loro contributo è per così dire, solo virtuale.

4) I simboli di Christoffel sono una questione di coordinate, non delle proprietà instrinseche degli enti a cui si applicano, come la curvatura di una superficie. Tuttavia, la loro proprietà di connettere vettori e tensori più generali, definiti in punti differenti di una superficie, li rende assai comodi, ad esempio per trattare la curvatura di una superficie curva. Nondimeno – sorpresa! - *possono essere introdotti anche nel caso di una superficie piana.* Ciò che faremo.

5) E' assai probabile che chi ha studiato un corso di cinematica sul piano in coordinate polari abbia già incontrato i simboli di Christoffel senza saperlo.

Utilizzerò un cammino euristico e mi servirò di quelli che credo siano gli esempi più semplici. Tuttavia, nessuno si deve fare troppe illusioni, perché non sapendo nulla per

incominciare, non si può imparare nulla. ***Non userò il calcolo tensoriale, e non introdurrò quindi il concetto di varianza e covarianza (nel senso del formalismo tensoriale)***, ma mi aspetto che si sappia che cosa sono i vettori e che si conosca un minimo di calcolo differenziale e integrale, pronti ad imparare quel poco in più che occorrerà conoscere.

1. Esempio semplicissimo

Sebbene i Simboli di Christoffel trovino gloriosa applicazione ad esempio sulle superfici curve, essi possono essere definiti anche sul piano euclideo. Qui abbiamo il più semplice esempio che si possa immaginare, in cui essi trovano posto, purché non ci si limiti alle coordinate cartesiane, ma si introducano le **coordinate polari (r, θ).** E' un po' strano usare il cannone per sparare alle farfalle, ma intanto, con buona pace delle farfalle, si impara a usare il cannone. Questo esercizio però dimostra che i Simboli di Christoffel *possono esistere anche in uno spazio piatto.* ***Ciò avviene perché essi sono legati al sistema di coordinate scelto*** *(o forzato) più che alla natura dell'oggetto che descrivono.* La sorpresa è che nel piano magari servono poco, e sono insolentemente semplici, ma esistono, e permettono di presentare i concetti più elementari, però sovente estensibili a più complicati problemi.

1. I. La prima geodetica

Se vogliamo l'equazione di una retta in coordinate cartesiane, con un metodo estendibile ai casi che ci interesseranno, dobbiamo solo calcolare le componenti lungo gli assi x e y dell'equazione **F** = m**a,** con **F** = 0. Sappiamo infatti che **"un corpo non soggetto a forze in un sistema inerziale si muove di moto rettilineo uniforme".** In altre parole, le componenti dell'accelerazione eguagliate a zero ci devono dare le equazioni parametriche (parametro t, che qui è il tempo) della retta. Ora abbiamo:
$\frac{d^2x}{dt^2}$= 0, che porge $\frac{dx}{dt} = a$, e quindi $\boldsymbol{x = at + b}$ con *a, b* costanti-. Analogamente sarà $\boldsymbol{y = ct + d}$, con *c* e *d* costanti. Queste sono equazioni parametriche della retta nel piano. Si estrae t dalla prima equazione, e lo sostituisce nella seconda, con risultato
$y = c\frac{x-b}{a} + d$, cioè $\boldsymbol{ay - cx + bc - ad = 0}$, che, con facile cambiamento di simboli diventa

Ax + By + C = 0, l'equazione di una retta nel piano.

La retta, però, ha una proprietà nota da tempo immemorabile, che Kant immortalò come l'esempio per eccellenza del giudizio sintetico a priori, cioè: "**La retta è il cammino più breve tra due punti**", ovvero, con linguaggio moderno, la retta è la ***geodetica*** sul piano. *Ora, questo è vero qualunque sia il sistema di coordinate usato.*

1. II. Coordinate polari

Vediamo ora l'esempio delle equazioni parametriche della retta sul piano in coordinate polari. Ovviamente, la retta non smetterà di essere la geodetica, ma le sue equazioni saranno più complicate e tuttavia, a un prezzo stracciato, ci daranno alcune informazioni importanti. Vediamo anzitutto come si esprime il vettore posizione in coordinate polari (Fig.1, destra):

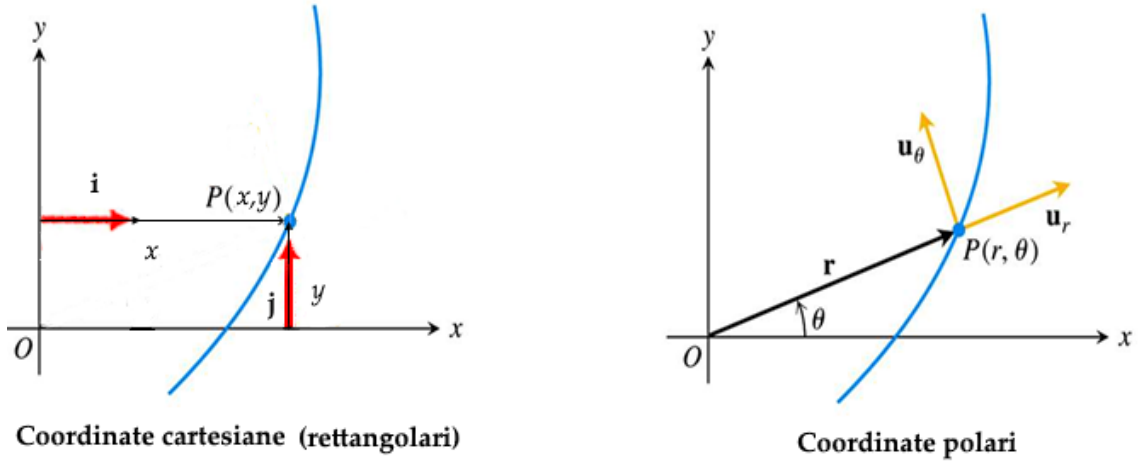


Fig.1

Basta per questo convertire i **vettori unitari** (versori) da P(**i**, **j**) a P($\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$), vedi Fig.1 se necessario. P(x,y) è il vettore posizione.

(1)
$$\boldsymbol{u}_r = (cos\theta)\boldsymbol{i} + (sin\theta)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{u}_\theta = -(sin\theta)\boldsymbol{i} + (cos\theta)\boldsymbol{j}$$

(La prima equazione è abbastanza ovvia. La seconda la si ottiene facilmente dalla prima sostituendo a θ l'angolo θ+ π/2, e svolgendo coseni e seni, mediante l'applicazione delle formule di addizione).

Le derivate rispetto all'unica variabile θ sono facili:

$(2a)$
$$\frac{d\boldsymbol{u}_r}{d\theta} = -(\sin\theta)\boldsymbol{i} + (cos\theta)\boldsymbol{j} = \boldsymbol{u}_\theta$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}_\theta}{d\theta} = -(cos\theta)\boldsymbol{i} - (sin\theta)\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{u}_r$$

In quanto alle derivate rispetto al tempo, esse sono:

$(2b)$
$$\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt} = \frac{d\boldsymbol{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \boldsymbol{u}_\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}_\theta}{dt} = \frac{d\boldsymbol{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\boldsymbol{u}_r\frac{d\theta}{dt}$$

Ora, la velocità v non è altro che il variare del vettore posizione OP = **r** = r$\boldsymbol{u}_r$ rispetto al tempo (Fig.3)

(3) $$\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}(r\boldsymbol{u}_r) = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{u}_r + r\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_\theta$$

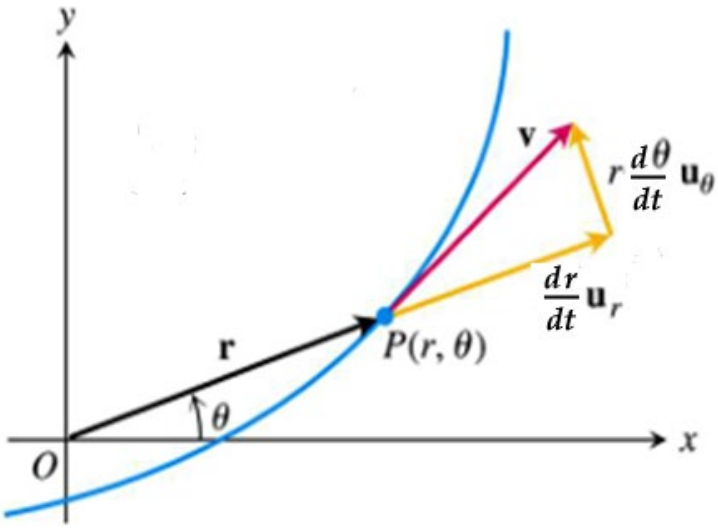


Fig.2

Qui, il vettore **v** è scomposto nelle componenti ortogonali sui versori $\boldsymbol{u}_r$ *e* $\boldsymbol{u}_\theta$.
(Per le Fig. 1 e 2, e in realtà per l'intera sezione, sono indebitato in gran parte a c13s6.DVI)

Restano ora da considerare le componenti dell'accelerazione a = $\frac{dv}{dt}$, cioè:

(4) $$\boldsymbol{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2}\boldsymbol{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\boldsymbol{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\boldsymbol{u}_\theta}{dt}\right)$$

Inserendo le derivate rispetto al tempo dei versori:

$$= \left(\frac{d^2r}{dt^2}\boldsymbol{u}_r - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\boldsymbol{u}_r{}^2\right) + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2}\boldsymbol{u}_\theta + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_\theta\right) = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\boldsymbol{u}_r + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{u}_\theta$$

Che, raccogliendo i fattori che moltiplicano i due versori ($\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$), porge le due componenti dell'accelerazione:

(5) $$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$

Ma vale anche qui la regola già data per le coordinate : se la Forza in ***F = ma*** è nulla, l'equazione a = 0 si scompone in due equazioni. Chiaramente, non importa in quali coordinate, le leggi della fisica sono sempre valide, e in assenza di forze il moto si svolge lungo una retta

(a velocità costante). Quindi, le due equazioni $a_r = 0 \; e \; a_\theta = 0$ sono le equazioni parametriche della retta, cioè della geodetica, nel piano.

1.III. Il primo (quasi) simbolo o coefficiente di Christoffel. Equazioni della linea geodetica nel caso più semplice.

Ma questo umilissimo esempio potrebbe anche essere scritto:

(6) $$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0$$

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \quad \textbf{\textit{o meglio}} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0$$

Notiamo che in coordinate polari, le derivate seconde delle variabili usate per descrivere la superficie sono eguagliate a una somma di prodotti di coppie di derivate prime, con opportuni coefficienti. Se a questi coefficienti diamo i nomi che essi hanno nei corsi di geometria differenziale, pur usando una forma graficamente più agevole, potremmo scrivere:

(7a) $$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{d^2r}{dt^2} + \Gamma\left(r; \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0$$

Dove $\Gamma\left(r; \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\theta}{dt}\right) = -r$ forse è la prima componente del primo Simbolo di Christoffel della vostra esistenza.

In verità abbiamo appreso un "quasi coefficiente di Christoffel" , in quanto la sua forma assomiglia solo un poco alla più comune forma dei simboli usati attualmente, per definire i quali occorrerebbe l'armamentario del calcolo tensoriale . Tuttavia, indipendentemente dalla forma, il valore è lo stsso. Mi si permetta di chiamarlo d'ora in avanti "coefficiente di Christoffel", salvo opposta indicazione.

L'equazione che ci dà la dipendenza temporale della seconda variabile (due dimensioni - due variabili), è:

(7b) $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \Gamma\left(\theta; \frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt}\right)\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \Gamma\left(\theta; \frac{d\theta}{dt}, \frac{dr}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} = 0$$

Dove $\Gamma\left(\theta; \frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt}\right) = \Gamma\left(\theta; \frac{d\theta}{dt}, \frac{dr}{dt}\right) = +\frac{1}{r}$. Da questa eguaglianza proviene il 2 nel primo membro a sinistra. Per futuro uso, abbiamo spezzato in due coefficenti identici il coefficiente che compare nella Eq. 7(a) (vedi oltre).

Per pura e semplice rapidità di notazione, nei simboli si possono indicare solo le variabili interessate, anziché le loro derivate prime, ma, per scrivere per bene il prodotto, occorre ricordare che si parla di prodotti di coppie di **derivate prime.**

Abbiamo quindi:

$$(7c) \qquad \frac{d^2r}{dt^2} + \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{r};\ \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta})\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \mathbf{0}\,, \quad \text{con } \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{r};\ \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}) = -\boldsymbol{r}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta};\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta};\ \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{r}\ )\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} = \mathbf{0},$$

$$\text{con } \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta};\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta};\ \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{r}\ ) = +\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}$$

Un lettore che ha qualche disposizione per la matematica potrebbe insospettirsi e chiedere perché nella prima equazione (della 7c) abbiamo solo un coefficiente che si interessa alla coppia $\theta,\ \theta$, mentre nella seconda equazione una coppia di coefficienti si interessa alla coppia r , θ.

La risposta è racchiusa nella domanda "quante componenti del Simbolo di Christoffel ci aspettiamo"? – tenendo conto del fatto che il nostro spazio (il piano euclideo) ha due dimensioni. Ogni dimensione corrisponde a una variabile, per cui nello spazio che stiamo esplorando, abbiamo sempre due variabili, che in generale chiameremo 1 e 2. I coefficienti per l'equazione che riguarda la variabile $\boldsymbol{i}$ (dove i = 1 o 2) hanno tutti come primo indice "$\boldsymbol{i}$". Gli altri due indici possono costituire una delle coppie (1,1; 1,2; 2,1; 2,2). **In conclusione, ognuna delle due equazioni contiene quattro termini, ciascuno dei quali è costituito da una componente del Simbolo di Christoffel, moltiplicata per la corrispondente coppia di derivate temporali.** Nel nostro caso ci aspetteremmo quindi otto coefficienti in tutto, e la prima equazione in (7c) dovrebbe essere scritta

$$(8) \qquad \frac{d^2r}{dt^2} + \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{r};\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r})\frac{dr}{dt}\frac{dr}{dt} + \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{r};\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \Gamma(r;\ \theta,r)\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} + \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{r};\ \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta})\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0$$

A questo punto, la nostra sete di simmetria sarebbe soddisfatta, assegnando valore 0 ai termini (rossi) che non compaiono nella (8).

Anche la seconda equazione dovrebbe contenere quattro termini, di cui tre eguali a zero. Inoltre, $\Gamma(\theta;\ r,\theta) = \Gamma(\theta;\ \theta,r) = 1/r$, perché il prodotto delle due derivate prime dθ/dt e dr/dt può essere preso in qualsiasi ordine, ed esse non saprebbero a quale dei due coefficienti riferirsi, se questi fossero diversi. Perché il problema non si ponga, i due coefficienti devono essere eguali. Tuttavia occorre ricordarsi di **sommare i due coefficienti** per ottenere il nostro risultato, che è corretto, come si potrà vedere con un metodo più generale.

In quanto all'equazione della retta in coordinate cartesiane , anch'essa dovrebbe includere le sue brave otto componenti del Simbolo di Christoffel *che si applica alle coordinate cartesiane,* ma esse sono tutte eguali a zero, perché le due equazioni per la geodetica nelle variabili x e y sarebbero

$$(8b) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

Qui non compaiono né $\frac{dx}{dt}$ né $\frac{dy}{dt}$ e quindi gli otto coefficienti $\Gamma(x;\ x,x),\ \Gamma(x;\ x,y)\ etc.$ virtualmente esistono, ma sono tutti nulli. Il fatto che essi siano tutti nulli in un sistema di coordinate e non tutti nulli in altro sistema di coordinate, indica che i Simboli di Christoffel non sono tensori. Perché? Dico solo, a mo' di esempio, che il cambiamento di base di un vettore (che, a parte lo scalare, è il tensore più elementare,) si esplicita in una matrice che moltiplica il vettore (per lo più in forma di vettore colonna i cui elementi sono le sue componenti). Se *tutte* le componenti del vettore sono nulle, il vettore trasformato sarà nullo qualunque sia la matrice che rappresenta il cambiamento di base. Una volta nullo, sempre nullo. Ma mi sono ripromesso di non parlare di tensori, e per il momento lasciamo le cose alle capacità del lettore.

Chi desidera avere un'idea immediata e minima di cosa siano i Simboli di Christoffel, può accontentarsi di quanto sopra: ***Il Simbolo di Christoffel è un'entità le cui componenti, nell'equazione di una geodetica, sono i coefficienti che moltiplicano tutte le possibili coppie di derivate prime delle variabili che definiscono la geodetica.*** Ma c'è altro da dire?

2. Le geodetiche sulla superficie sferica insegnano.

2. I Le equazioni di Lagrange, introduzione minimale.

A questo punto, come scrisse Virgilio in tutt'altro contesto nella sua più ermetica bucolica, "*Paulo maiora canamus*". Cerchiamo cioè le **geodetiche sulla superficie della sfera**. La sfera è il solido più semplice e più studiato, e **da millenni si sa che le geodetiche che cerchiamo sono sempre archi di cerchi massimi,** che si trovano rapidamente con metodi geometrici o addirittura tendendo un elastico tra i due estremi del percorso (Se si cerca la distanza fra due punti della sfera terrestre con Google Earth, il percorso che appare sulla sfera terrestre è una geodetica, e si vede subito che un *parallelo* può essere una geodetica solo se coincide con l'Equatore, se entrambi i punti vi si trovano. Perché?). Sfortunatamente, poche altre superficie presentano proprietà di simmetria che permettono semplici soluzioni. Ci sono allora (almeno) due modi prefeeriti di calcolare le *geodetiche*, ma in ultima analisi entrambi i modi devono ricorrere alle **equazioni di Eulero-Lagrange.**

Un tempo, le equazioni di Eulero-Lagrange comparivano verso la fine del secondo anno di corso, di Analisi, nel capitolo "Calcolo delle Variazioni". Se ne può dare una "pseudo-dimostrazione", usata nei più frettolosi libri di testo dei corsi di fisica, in cui si trascurano parti reputate inessenziali dai fisici e fondamentali dai matematici.

Ci si propone come scopo generico il trovare una curva q(t) che minimizzi l'integrale

(9) $$\int_{t_A}^{t_B} L(q,\frac{dq}{dt},t)dt$$

Questo è un numero, detto ***funzionale***, ma ciò che veramente cerchiamo nel nostro studio è la forma della funzione q(t) che minimizza l'integrale. In realtà noi scriviamo q(t) anche per indicare brevemente una collezione di N diverse $q_i(t)$, dove N è il numero minimo di

coordinate necessarie per identificare la "posizione" di un sistema. Le N coordinate, che corrispondono ai *gradi di libertà* del sistema, hanno oggi anche il nome di coordinate lagrangiane o coordinate generalizzate, ***e sono indipendenti le une dalle altre.***

IL fatto che siano indipendenti è importante. Ad esempio, in meccanica, se abbiamo un punto che circola su di una circonferenza fissa su un piano, possiamo dare le due coordinate x e y della sua posizione, prendendo per esempio il centro del cerchio come origine, ma in realtà basterebbe una sola coordinata, l'angolo di rotazione. Le due coordinate x e y sono legate dalla relazione $\sqrt{x^2 + y^2} = R(costante)$. A questo caso, non si applicano le equazioni di Lagrange nella forma da noi trovata, convenzionalmente chiamata la "seconda forma". Esiste però una "prima forma" delle equazioni di Lagrange, poco usata nei testi di fisica teorica, e più usata nei testi per ingegneri, che si occupa dei casi con vincoli espliciti, come quello dato, e in questo caso necessiterebbe due equazioni. Dunque, l'uso delle coordinate lagrangiane riduce il numero di equazioni.

Però, un "tenet" della meccanica dai tempi di Galileo, è che, una volta noti tutti i valori delle q in un istante t_0, non possiamo predire la posizione del sistema nell'istante successivo, a meno che, oltre alle coordinate q, non conosciamo le loro velocità. Anche le velocità sono arbitrarie e quindi anche le dq/dt acquistano il rango di variabili indipendenti. In quanto a t, essa potrebbe essere in pratica qualsiasi variabile, ma in meccanica, uno dei campi in cui, grazie a Lagrange, furono largamente usate le equazioni che troveremo, la variabile è il tempo. Per incominciare ci atterremo a questa regola.

Cerchiamo dunque tra i vari cammini possibili q(t) che vanno da t_A a t_B, quello che minimizza (un matematico direbbe piuttosto estremizza) il valore dell'integrale, marcato in rosso in Fig.3. Questo cammino è una funzione q(t), che, come abbiamo detto, è la parte più interessante della soluzione. Si noti che, poichè le varie q_i sono tra loro indipendenti, se il nostro sistema è identificato da venti coordinate q_i avremo comunque non un'unica complicata equazione contenente tutte le q_i e le dq_i/dt, ma venti equazioni, ciascuna delle quali contiene solo la coppia q_j, dq_j, il che semplifica terribilmente le cose.

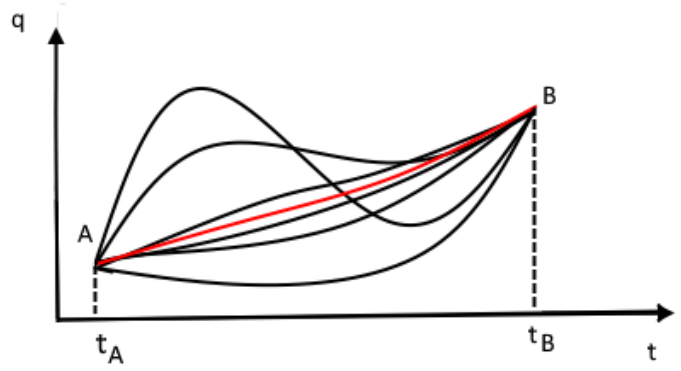


Fig.3

Varie funzioni q(t) che partono dallo stesso punto e arrivano nello stesso punto q(t_A) e arrivano nello stesso punto q(t_B). In rosso il cammino che minimizza l'integrale (9).

Come procedere per trovare le equazioni che ci servono?

Nella ricerca dei massimi e dei minimi di una funzione ordinaria, noi abbiamo appreso che occorre eguagliare a zero il valore della derivata prima. Al punto massimo, concetto più intuitivo della derivata, è nullo l'*incremento* (infinitesimo) della funzione. Al punto minimo è nullo il decremento della funzione. Possiamo in generale trattare il problema in modo imparziale dicendo che cerchiamo gli "estremi" (parola che include massimi e minimi) come i punti dove la "variazione " del funzionale (invece che l'incremento o il decremento) è nulla.

Quindi scriveremo (indicando con δ la variazione, incremento o decrmento):

(10) $$\delta \int_{t_A}^{t_B} L(q, \frac{dq}{dt}) dt = 0$$

(Ho eliminato la dipendenza diretta della funzione L dal tempo, perché non entrerà nel mio esempio, come non entra nella maggior parte dei problemi elementari di meccanica analitica).

Ora procediamo con un "metodo mnemonico", cioè con operazioni formalmente simili a quelle a noi già note dalle variabili ordinarie. Le variabili in L sono qui la q(t) e la sua derivata rispetto a t. Noi vogliamo trovare le "coordinate q(t) e dq/dt" dell'estremo.

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} L(q, \frac{dq}{dt}) dt = 0 \rightarrow \int_{t_A}^{t_B} \delta\, L(q, \frac{dq}{dt}) dt = 0 \rightarrow \int_{t_A}^{t_B} (\frac{\partial L}{\partial t} \delta q + \frac{\partial L}{\partial (\frac{dq}{dt})} \delta (\frac{dq}{dt}))\ dt = 0$$

Abbiamo cioè costruito ***una sorta di differenziale totale*** della funzione L rispetto alle variabili q e dq/dt, e lo poniamo eguale a zero. Il differenziale totale, in realtà sarebbe

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

In cui x e y sono le variabili indipendenti.

Le δ che usiamo invece delle d ci ricordano che, anche se utili in un formalismo identico, esse **non sono i differenziali totali ordinari.** Le q che risolvono il problema, e le δq e $\delta(\frac{dq}{dt})$ che ci aiuteranno a trovarle, sono *funzioni di t* esse stesse, mentre nell'ordinaria ricerca di un estremo di una funzione y(x) noi cerchiamo il *punto* x_0 della variabile indipendente in cui si ha l'estremo. Stiamo cioè euristicamente trattando con quasi identico formalismo un problema assai differente.

Inoltre (ma questo è un problema facilmente risolubile) ci spiace il secondo termine, $\delta(\frac{dq}{dt})$ perché per semplicità noi preferiremmo solo trattare con δq. Tuttavia si può ottenere la sostituzione di $\delta(dq/dt)$ mediante una integrazione (formale) per parti, cioè ponendo (si ricordi $u\, dv = d(uv) - v\, du$)

$$\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq}{dt}\right)} \delta \left(\frac{dq}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq}{dt}\right)}\ \delta q\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq}{dt}\right)}\right] \delta q$$

Ponendo l'equazionea secondo membro sotto integrale, il primo termine va calcolato agli estremi , dove δq è nullo (gli estremi sono invariabili, come in Fig.3), e perciò scompare. A noi resta

$$\int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq}{dt} \right)} \right] \right) \delta q \, dt \; = 0$$

Per risolvere il problema occorre che l'integrando sia nullo per qualsiasi valore di δq, che, ripeto ancora una volta, non è un numero, ma una funzione da t_A a t_B, (ove si annulla), *tale che* $q(t) + \delta q(t)$ *differisce assai poco da* $q(t)$.

Ma, se δq (funzione di t che si estende da t_A a t_B) è una funzione arbitraria, ciò significa che, per garantire che l'integrale sia nullo, deve essere ovunque nulla la funzione tra parentesi che precede δq. Deve cioè essere (avendo scambiato l'ordine dei termini):

(10)
$$\boldsymbol{\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq}{dt} \right)} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$$

Questa (o queste, se ci sono diverse coordinate lagrangiane q_i) sono la maggior gloria di G.L. Lagrange (Torino, 1736 – Parigi, 1813), e, di riflesso, della città di Torino. Il concetto di funzione L, "lagrangiana", per non parlare delle "equazioni di Lagrange" è tutt'ora largamente usato anche nelle teorie fisiche più moderne. Inutile dire che in giro per il mondo, Lagrange è ritenuto francese.

Senza riflettere su troppo facili passaggi formali, abbiamo trovato il risultato giusto. Chi volesse una dimostrazione in cui la matematica è rigorosa, ma spiegata brillantemente, dovrebbe leggere il *capo 19. delle Lectures on PhysiSimboli di Christoffel Vol. II* del Feynman.

Il nome dell'integrale (9) è "azione" (Energia x tempo), e alla fine del '700 apparve cosa quasi miracolosa che "minimizzando l'azione" tramite le equazioni di Lagrange, si potessero estrarre le equazioni di Newton anche in casi assai complicati, dove non erano a prima vista definibili. Di qui una lunga discussione su come e perché la Natura dovesse ostinarsi a minimizzare l'azione, grandezza fisica di raro uso (ma sovente cruciale). Si chiamarono in causa principi filosofici e teologici, che però non diedero un contributo fondamentale all'avanzamento della meccanica classica. Il Feynman fu forse il primo, a mio parere, a spiegare in modo ragionevole questa frenesia della natura a minimizzare l'azione (Vedi il luogo citato più sopra nelle *Lectures on Physics,* e , per un disegno illustrativo, il capitolo 26.6 del volume primo). Per invogliare il mio raro lettore, che ancora non l'avesse fatto, a leggere il famoso capitolo 19 del volume II, riproduco l'incipit nelle parole di R. Feynman: "*Quando ero al liceo, un giorno il mio insegnante di fisica, il cui nome era Mr. Bader, mi chiamò dopo la lezione di fisica e disse: "Sembri annoiato; voglio raccontarti una cosa interessante". Poi mi disse qualcosa che trovai assolutamente affascinante e che, da allora, ho sempre trovato affascinante…"*

Torniamo a noi: il fatto di poter scrivere facilmente le equazioni di un sistema meccanico complesso è un enorme vantaggio, ma non abbiamo ancora in mano la soluzione. In realtà,

nella maggior parte dei casi, una o più delle equazioni di Lagrange di un sistema qualsiasi non è risolubile in termini finiti, o non è neanche "conducibile alle quadrature", cioè al caso in cui la funzione o le funzioni incognite sono eguali a integrali che contengono solo funzion note. Ma la forma dell'equazione può già dare informazioni interessanti sulle soluzioni.

Quello che a noi modestamente importa è che, per i casi più elementari, Lagrange diede anche una ricetta per la forma della Lagrangiana, come differenza dell'energia cinetica, T, meno quella potenziale, U - cioè **L = T-U.** Non si chieda perché: non penso che ci sia una spiegazione, a parte il fatto che così facendo, si trovano soluzioni note per altra via, anche numerica, oppure soluzioni inedite ma ragionevoli. D'altronde, la Lagrangiana così definita, è la base della meccanica analitica. Ma, mentre l'energia potenziale può assumere le forme più diverse, l'energia cinetica, soprattutta se riferita al mitico "punto materiale pesante" della vecchia meccanica razionale, è assai spesso della forma

(11) $$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

In cui m è la massa (invariabile in meccanica classica) e ds è l'elemento di arco o di percorso. Nei casi più semplici, il secondo termine della lagrangiana, U, è il potenziale da cui derivano le forze agenti sul corpo di massa m, che per noi sarà sempre 1.

2.II Uso delle equazioni di Lagrange per ricavare le geodetiche di una superficie sferica.

Noi sappiamo che, sul piano, il moto di un punto materiale di massa non nulla e **non soggetto a forze** (U=0) è rettilineo uniforme, il che ci direbbe abbastanza poco, se la retta non fosse la geodetica del piano. Quindi, **possiamo azzardarci a supporre che una particella non soggetta a forze, percorra una geodetica su qualsiasi superficie in qualsiasi numero di dimensioni, e che l'equazione della geodetica si possa ricavare dall'equazione della superficie.**

Si supponga di essere su di un aereo che vola a velocità costante, da Napoli a New York, che sono più o meno alla stessa latitudine (quarantesimo parallelo). I motori ci assicurano che la velocità è costante compensando la resistenza dell'aria; le ali, insieme ai motori, grazie alle leggi delI'aereodinamica, compensano la forza di gravità, limitatamente all'intero veicolo, considerato come una particella unica. All'interno le forze non sono equilibrate, e gli oggetti cadono per effetto della gravità. Abbiamo così costruito in modo artificiale un sistema quasi inerziale, su cui non agiscono forze, o meglio, su cui agiscono svariate forze, la cui somma è una forza nulla. In un mondo ideale (senza disposizioni speciali per la navigazione, come quella di evitare zone "delicate", o restare almeno ad una certa distanza da determinati aereoporti) l'aereo dovrebbe poter percorrere la rotta più breve. Questa NON è il parallelo che connette le due città (vedi Fig.4). Quasi sempre il cammino più breve non è il cammino θ = costante (il parallelo), ma un arco di cerchio massimo, cioè la traccia sulla sfera di un piano passante per il centro della sfera e per i due punti che rappresentano Napoli e New York.

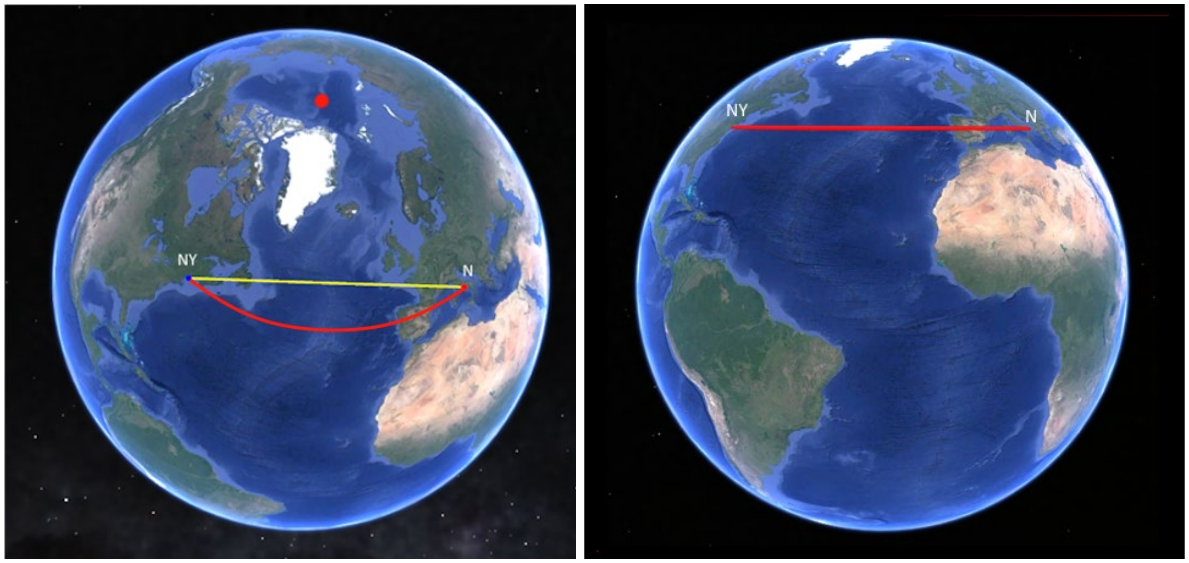


Fig.4

La geodetica che unisce Napoli a Nuova York (in giallo) . Il parallelo 40°N su cui approssimativamente giacciono Napoli e New York (in rosso). Il Polo Nord è il punto rosso. Si può trovare un punto di vista e un orientamento della Terra, in cui la geodetica appare come un segmento di retta (a), per quanto la superficie terrestre, e la geodetica, siano curve. L'orientamento è quello secondo il quale N e NY giacciono su un cerchio massimo, che per noi è una sorta di equatore artificiale, come si vede in (a). Anche i paralleli, orientando opportunamente la Terra, si presentano come rette apparenti, come si vede in (b) dove il parallelo 40°, su cui si trovano NY e N, appare come un segmento di retta (pur su una superficie curva). Tuttavia, il percorso misurato sul parallelo, è più lungo del segmento di geodetica. Misurando la lunghezza delle due rotte si può controllare che la rotta gialla (km 7076.5) è più breve della rotta rossa (km 7502).

Per muovere sulla geodetica a velocità costante, basta che il pilota, una volta decisa la direzione di partenza in modo da arrivare a New York (la direzione la saprà per altra via), lasci che l'aereo vada "diritto", senza mai toccare né timone né alettoni né altri comandi, e sperando naturalmente che non ci sia vento. A tutti gli effetti, il vettore velocità dell'aereo è costante in modulo e in direzione, se i piloti non devono mai toccare i comandi per accelerare o rallentare o deviare l'aereo dalla sua rotta geodetica. Naturalmente, se noi osserviamo sulla mappa terrestre il percorso dell'aereo, vediamo che, nel sistema di coordinate terrestri, latitudine e longitudine, basate su ben determinati Polo Nord e Polo Sud, (si provi a trovare il volo più breve su Google Earth, se non ci si crede), l'aereo prima sale verso Ovest-Nord-Ovest, virando poi gradualmente verso Ovest-Sud-Ovest, invece di muovere direttamente a Ovest. Quindi abbiamo due componenti apparenti del cambiamento di velocità sulla mappa terrestre (rispettivamente lungo la longitudine e la latitudine), non nulle, che devono essere equivalenti ad una velocità costante lungo la geodetica. **In effetti, chi ruota non è la rotta dell'aereo, ma la mappa della Terra in coordinate sferiche sotto alla rotta geodetica dell'aereo** (si veda la Fig.5).

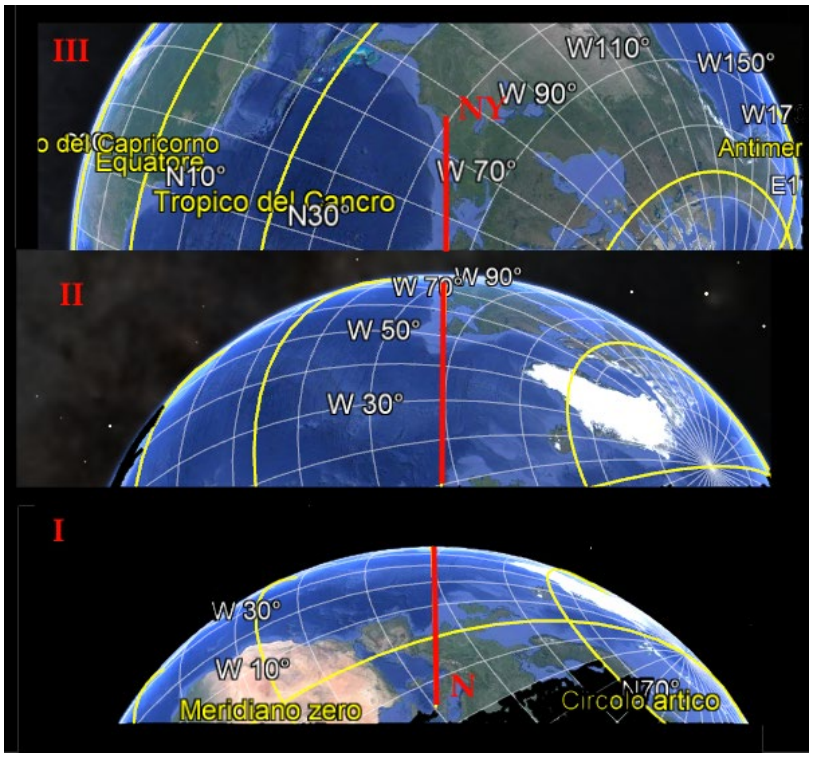


Fig.5

Rotazione delle coordinate terrestri rispetto alla geodetica Napoli-New York (con partenza dal basso). La geodetica, in posizione di cerchio massimo, appare come una retta (linea rossa). Al di sotto ruotano meridiani e paralleli, che, *nell'intorno della linea rossa*, a mezza altezza, nella I sono obliqui dal basso a sinistra verso l'alto a destra; in II sono più o meno orizzontali, in III scendono dall'alto a sinistra verso il basso a destra. Anche notevole è seguire il moto del circolo polare artico, l'arco di cerchio sulla destra.

L'esempio di una Terra bidimensionale.

Un'idea più chiara, per la possibilità di fare calcoli, la si ottiene forse tornando al nostro **sistema di coordinate polari sul piano euclideo**. Qui sappiamo che in qualsiasi sistema di coordinate , le geodetiche sono rette, e per ogni punto A ne passano infinite, per cui possiamo sempre scegliere quella che mira alla meta B voluta. Inoltre Fig. 5 assomiglia molto a una visione zenitale della Terra, vista da sopra il polo Nord, con le due rotte, una geodetica (linea rossa, che nel piano è una retta, in qualsiasi sistema di coordinate) e una a *colatitudine*, misurata dal polo anziché dall'equatore, costante θ (arco di cerchio blu).

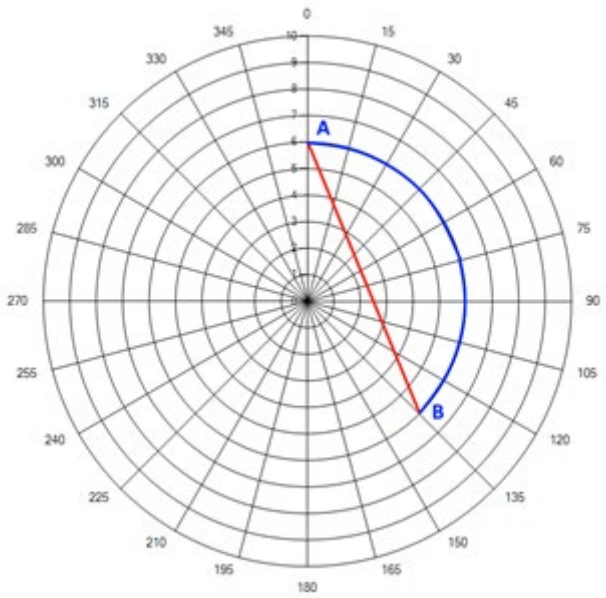


Fig.6

Coordinate polari sul piano, con colatitudine e longitudine. La retta è sempre il percorso più breve tra Ae B. Essa corrisponde a una rotta geodetica.

Anche in questo caso bidimensionale il pilota che percorre la rotta geodetica (rossa), se potesse vedere sotto di sè il reticolo latitudine-longitudine, noterebbe che nel suo procedere in longitudine, la rotta prima si avvicinerebbe al polo Nord e poi se ne allontanerebbe. Riterrebbe quindi di avere una accelerazione nel senso della *latitudine,* prima verso Nord e poi verso Sud. Un'occhiata alle coordinate della l*ongitudine* (le rette uscenti dal Polo) rivelerebbe che anche nel senso della longitudine esistono accelerazioni apparenti, giudicando da quanto è lunga la permanenza in una zona di data longitudine, compresa fra due "meridiani": la linea rossa è percorsa a velocità costante e passa attraverso nove zone di longitudine, ma alla prima e all'ultima zona possiamo assegnare a occhio 2/9 del percorso ciascuna; alla seconda e penultima zona 1/9, e a quelle intermedie i restanti 3/9. Il pilota avrebbe quindi l'impressione di *decelerare in latitudine e accelerare in longitudine*, raggiungere una velocità massima in longitudine, e quasi nulla in latitudine, e poi *accelerare in latitudine e decelerare in longitudine*, fino a B. (Il volonteroso lettore può facilmente analizzare con maggiore accuratezza le varie lunghezze.) Si tratta di un'apparenza. Chi ruota è la mappa in coordinate polari sotto la rotta geodetica, non la rotta geodetica sopra la mappa in coordinate polari

Torniamo al più realistico pilota su una terra tridimensionale.

Per utilizzare le equazioni di Lagrange, si tratta ora di calcolare il quadrato dell'elemento di arco sulla superficie sferica. Non ho sviluppato questa ricerca per il caso del piano (che mi pare debba essere ovvio). Tuttavia, mi pare sia utile farlo per la superficie sferica. Si consideri il quadratino (rosso) ABCD disegnato sulla superficie sferica di raggio ***R,*** i cui lati sono segmenti di paralleli e meridiani. Dovrebbe essere di dimensioni infinitesime, trattabile come

un vero quadratino con lati opposti ***ds*** rettilinei ed eguali. L'elemento generico di arco, ***ds***, è il segmento **AC**, la cui lunghezza in termini della *colatitudine* **θ = SÔP (la latitudine misurata dal polo anziché dall'Equatore)** e della *longitudine* φ può essere calcolata grazie all'eterno teorema di Pitagora, cioè $ds^2 = AB^2 + BC^2$. (Come vedremo non ci interessa nella derivazione dei coefficienti di Christoffel quale sia il meridiano zero.)

Come si vede subito, $AB^2 = (r\, d\varphi)^2$ in cui $r = R\, sin\theta$, da cui $AB^2 = R^2 sin^2\theta\, d\varphi^2$, mentre $BC^2 = AD^2 = R^2\, d\theta^2$. Quindi, la lagrangiana per *un punto libero di massa 1*, è $L = T = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$

Risulta finalmente

(11)
$$\boldsymbol{L = \frac{1}{2} R^2 \left(\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right)}$$

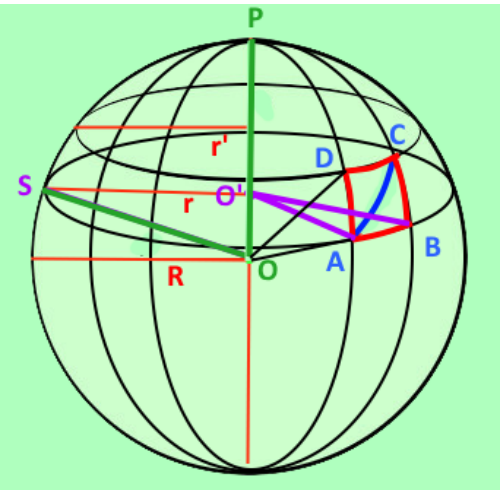


Fig.7

Calcolo dell'elemento d'arco AC.
Considerando in prima approssimazione rettilinei i lati del quadrato ABCD, in quanto infinitesimali, si usa il teorema di Pitagora, notando che i lati verticali AD e BC sono archi di meridiani, mentre AB e CD sono archi di paralleli. Il parallelo base è quello di colatitudine θ, il cui raggio è R sinθ

Poniamo R =1, costante.

Si applichi ora la formula magica (10):

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dq}{dt}\right)}\right] - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

prima per φ e poi per θ, notando che L non dipende esplicitamente da φ, ma solo da $\frac{d\varphi}{dt}$. Ne segue che l'equazione di Lagrange per la φ è:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[2\, sin^2\theta\, \frac{d\varphi}{dt}\right] = 2\, sin\,\theta\, cos\theta\, \frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + sin^2\theta\, \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

Che, dividendo per $sin^2\theta$ e riarrangiando l'ordine dei termini , porge l'equazione di Lagrange per la coordinata φ:

(12a) $$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt} = 0\,,$$

da identificarsi (tramite i prodotti delle derivate prime e seguendo indicazioni date in pag.6) con l'equazione completa, in cui i coefficienti nulli sono segnati in rosso, e quelli eguali in grassetto nero:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Gamma(\varphi;\ \varphi,\varphi)\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \boldsymbol{\Gamma(\varphi;\ \varphi,\theta)}\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \boldsymbol{\Gamma(\varphi;\ \theta,\varphi)}\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \Gamma(\varphi;\ \theta,\theta)\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0$$

L'equazione per θ sarà invece:

(12b) $$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0$$

Da identificarsi (tramite i prodotti delle derivate prime) con

(12c) $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \Gamma(\theta;\varphi,\varphi)\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \Gamma(\theta;\ \varphi,\theta)\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \Gamma(\theta;\ \theta,\varphi)\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \Gamma(\theta;\ \theta,\theta)\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0$$

Abbiamo così raggiunto lo scopo di identificare i nostri otto coefficienti, cinque dei quali sono nulli, e due identici, per cui restano tre coefficienti, di cui due eguali:

(i) $\boldsymbol{\Gamma(\varphi;\ \varphi,\theta) = \Gamma(\varphi;\ \theta,\varphi)} = +\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ che si sommano, essendo entrambi moltiplicati per

$$\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$$

(ii) $\boldsymbol{\Gamma(\theta;\ \varphi,\varphi) = -\sin\theta\cos\theta}$

In conclusione, abbiamo ottenuto dei "*quasi* coefficienti di Christoffel" in due casi : un caso pedagogico (coordinate polari nel piano) e un caso non privo di interesse pratico (coordinate sferiche). Dunque le equazioni di Lagrange ci offrono il risultato richiesto, di trovare la forma funzionale dei coefficienti di Christoffel, senza che sia necessario risolvere le equazioni stesse, il che è tutto un altro discorso. È inutile dire che usando le stesse equazioni di Lagrange con Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

Si ritrovano le due Eq.5, del primo esempio, **coordinate polari nel piano,** con la già trovata identificazione dei coefficienti dei prodotto di due derivate temporali con le componenti di un Simbolo di Christoffel.

Noto che si suole considerare i coefficenti che compaiono nelle equazioni delle geodetiche come componenti di un "quasi tensore" indicato quasi ovunque con Γ^{i}_{jk}, dove i, j, k per noi possono assumere i nomi **φ** o ***θ*** , notazione che noi abbiamo sostituita con la forma graficamente più agevole, **Γ(i; j, k).**

2.III Compare la derivata covariante, che ci darà un modo differente di calcolare la geodetica.

Possiamo fare l'ultimo passo, quello di connettere la geodetica alla cosiddetta derivata covariante. Ora, per arrivare celermente al concetto di derivata covariante, occorrono elementi di calcolo tensoriale che qui non ho sviluppato. Del resto, ricordo che anche i "quasi coefficienti di Christoffel" a cui siamo giunti, sono corretti come risultato e intuitivi (penso) nella via percorsa, ma non sono i veri coefficienti di Christoffel *odierni*, che sono creature provenienti dal calcolo tensoriale.

Possiamo però introdurre quello che da alcuni è chiamato "**differenziale covariante"**, cioè "un oggetto di geometria differenziale indipendente dal sistema di coordinate usato", significato diverso da quello proveniente dal calcolo tensoriale. Una derivata, poi, continuerà a non essere altro che il rapporto tra due differenziali. Ma quali?

Vediamo come si procede in diversi libri di testo di meccanica razionale. Per calcolare il vettore accelerazione noi spostiamo parallelamente a se stesso il vettore velocità da un punto P(t+Δt) a un punto P(t) della traiettoria, con spostamento (tratto in rosso) di valore **Δx**:

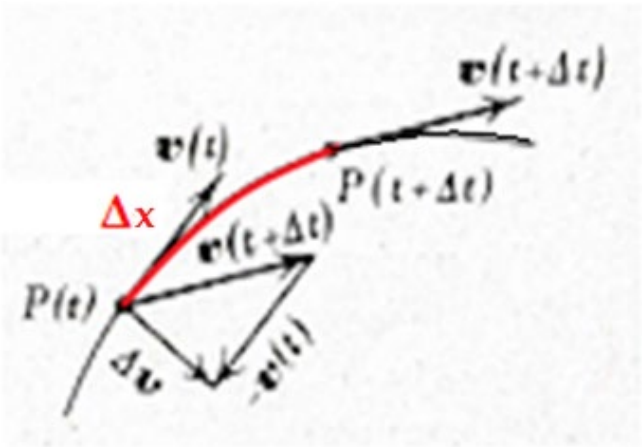


Fig.8

L'accelerazione come differenza di due vettori *v(t+dt) + (-v(t))*, da dividersi per l'intervallo di tempo o di persorso per poi passare al limite. Notare il trasporto del vettore v(t) parallelo a se stesso dal punto P(t+Δt) al punto P(t) , necessario per eseguire la sottrazione: **La coordinate ortogonali sono implicite in questa dimostrazione (ma è rarissimo che un docente lo dica, forse per non confondere le idee agli studenti).**

Poi dividiamo il vettore **differenza** delle velocità rispettivamente in P' e in P per l'intervallo temporale, passiamo al limite per un istante di tempo infinitesimo, e otteniamo la derivata della velocità rispetto al tempo, cioè l'accelerazione. Questo può essere fatto per qualsiasi campo vettoriale, purché si conosca il valore dei due vettori misurati in P e in P'. *Ma il metodo è valido solo in coordinate cartesiane* , **che sono implicite nella figura.** Noi abbiamo spostato parallelamente a loro stessi due vettori, il vettore *v(t+dt)* e il vettore *v(t),* che addirittura è stato trasformato nel suo opposto *(-**v**(t))* e questi sommato a ***v**(t+dt).*

2.III.i Spostamento parallelo.

Ma nell'eseguire questa operazione si è trascurato il fatto che si può parlare di differenza e anche altre operazioni di *due vettori* solo se essi sono 'applicati' allo stesso punto. Una derivata implica una **differenza di due vettori applicati a due punti a distanza infinitesima, ma distinti** l'uno dall'altro.

Noi dobbiamo immaginare uno dei due vettori distante un elemento infinitesimo di percorso dx, ma, per fare la derivata, dobbiamo comunque sottrarre i due vettori applicati allo stesso punto, *cioè dovremmo ancora spostare parallelamente a sé stesso uno dei due vettori di quell'ultima porzione **dx*** per portare il suo punto di applicazione a coincidere con il punto di applicazione dell'altro vettore.

Noto qui che il trasporto (o spostamento) parallelo è in pratica l'unico tipo di spostamento usato in geometria differenziale elementare, perché esso lascia al vettore una sua identità in relazione agli altri oggetti geometrici presenti e facilita la comprensione di altri concetti (geodetiche, curvatura, etc.). Inoltre *l'esistenza della possibilità di trasporto parallelo è un postulato.*

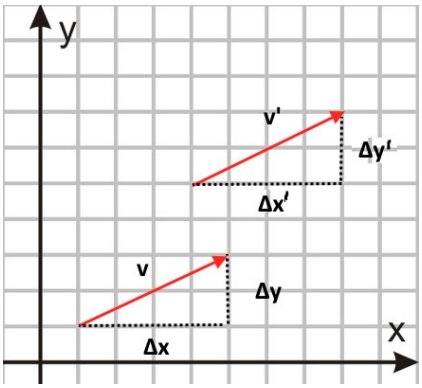


Fig.9

Trasporto parallelo, che mantiene costanti le differenze delle coordinate degli estremi del vettore. – in coordinate cartesiane

In coordinate cartesiane, **le differenze tra le coordinate del vertice e quelle del punto di applicazione di un vettore** *devono essere per definizione costanti per uno spostamento parallelo*. Seguendo tale prescrizione, esse riflettono quello che il nostro occhio vede. **Ma quello che normalmente non vediamo sono le *coordinate in termini numerici* degli estremi dei vettori. Queste, in praticamente ogni altro sistema di coordinate, cioè non cartesiane, cambiano** (Fig.8b). La conseguenza è che anche le **differenze** di coordinate degli estremi del vettore cambiano trasportando il vettore parallelamente a sè stesso. Quindi bisogna tenere conto del cambiamento delle coordinate *anche per una differenza infinitesima di posizione* per assicurare che il vettore sia trasportato parallelamente.

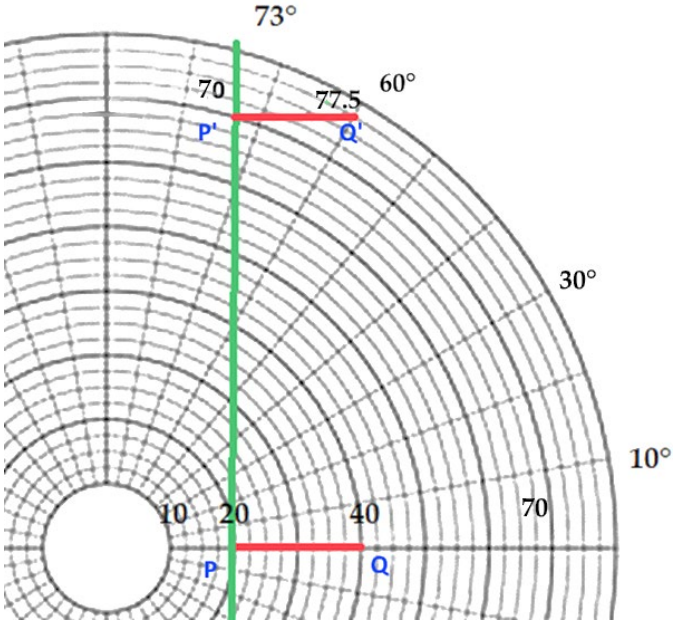


Fig.9b

Trasporto parallelo di un vettore nel caso di coordinate e polari nel piano.
Coordinate cartesiane: PQ: **$\Delta x = 20; \Delta y = 0$**; P'Q': $\Delta x = 20, \Delta y = 0$
Coordinate polari: PQ: **$\Delta r = 20; \Delta\theta = 0$**; P'Q': **$\Delta r = 77.5-70=7.5; \Delta\theta = 60°-73° = -13°$**

Penso che l'assenza di un diagramma come quello in Fig.9b e dei dati numerici relativi, anche solo per l'esempio più semplice possibile, possa essere un ostacolo per coloro che si imbattono per la prima volta nelle derivate covarianti. Il fatto è che il vettore disegnato è lo stesso, ma i valori delle coordinate dei suoi estremi sono mutati e non permettono a prima vista di affermare che il vettore trasportato parallelamente sia lo stesso. La differenza δv non è riproducibile sulla carta senza creare confusione. Essa è invisibile nel disegno, ma visibile quando si fanno i calcoli. I Simboli di Christoffel servono a calcolare questa componente invisibile nei diagrammi, ma presente quando si fanno calcoli.

Gli strumenti che ci aiutano a tener conto dell'effetto del sistema di coordinate non cartesiane sono appunto i Simboli di Christoffel. **Questi coefficienti sono nulli per le coordinate cartesiane,** come abbiamo visto in eq. 8b, e in Fig. 9b, e quindi in tali coordinate possiamo trasportare un vettore parallelamente a sé stesso della distanza che vogliamo, da infinita a zero, passando per l'infinitesimo. Questo permette l'imprecisione di linguaggio che viene imposta agli studenti disegnando diagrammi senza avvertire che "ovviamente"

le coordinate cartesiane sono sottintese e che quindi i due vettori possono essere trasportati allo stesso punto di applicazione per calcolare un differenziale. In altri sistemi di coordinate, anche il semplice sistema di coordinate polari, bisognerebbe tenerne conto, e lo si fa, come dicono le eq. 8.

Nel caso delle coordinate cartesiane si potrà fare la differenza di due vettori **Δ= v′ – v** (di Fig.5) senza usare alcun accorgimento. Da questa differenza, passando al limite, si estrarrà il "differenziale vero" che eventualmente, diviso per il differenziale del tempo (o per quello dello spazio, s), ci darà la derivata del vettore. Indicheremo con $\mathbf{dv}_i$ le componenti del differenziale vero (cioè quello misurato in coordinate), notando che sul piano, in ogni sistema di coordinate, avremo sempre due componenti.

Le cose cambiano, come si è detto, se si passa a sistemi di coordinate differenti da quelle cartesiane. Bisogna allora definire un **metodo di trasporto parallelo**, valido in tutti i sistemi di coordinate.

2.III.ii Scala di Schild (1970).

Un metodo ancora usato, per quanto valido solo come approssimazione del primo ordine, è quello della "**Scala di Schild".** Ne disegno un solo "gradino" in Fig.9, basato unicamente su due assunzioni: 1) il concetto di geodetica esiste in tutti i sistemi di coordinate; 2) i teoremi della geometria euclidea sono veri in assoluto, e non dipendono dai sistemi di coordinate. Quindi, anche il concetto di punto medio di un segmento di geodetica esiste, in tutti i sistemi di coordinate.

Tra l'altro, il concetto di geodetica implica che per un punto passino infinite geodetiche, e che la geodetica definisca la minima distanza fra due punti, da cui segue che esiste, almeno per punti vicini, una sola geodetica. Sulla sfera, per esempio, le geodetiche sono cerchi massimi. Dati due punti A e B, il cerchio massimo passante per essi darà due archi di geodetica. Si sceglie come geodetica, se i due archi non sono eguali, il più breve dei due, anche se l'intero cerchio può portare il nome di geodetica.

Il problema è che il metodo della Scala di Schild a rigore è valido solo per punti infinitamente vicini, in quanto noi in generale non sappiamo come disegnare le geodetiche su lunghe distanze, come nel caso del piano, dove invece le geodetiche sono rette.

Tuttavia, ancora il piano può suggerire, pur senza provarli, molti concetti. Vediamo come.

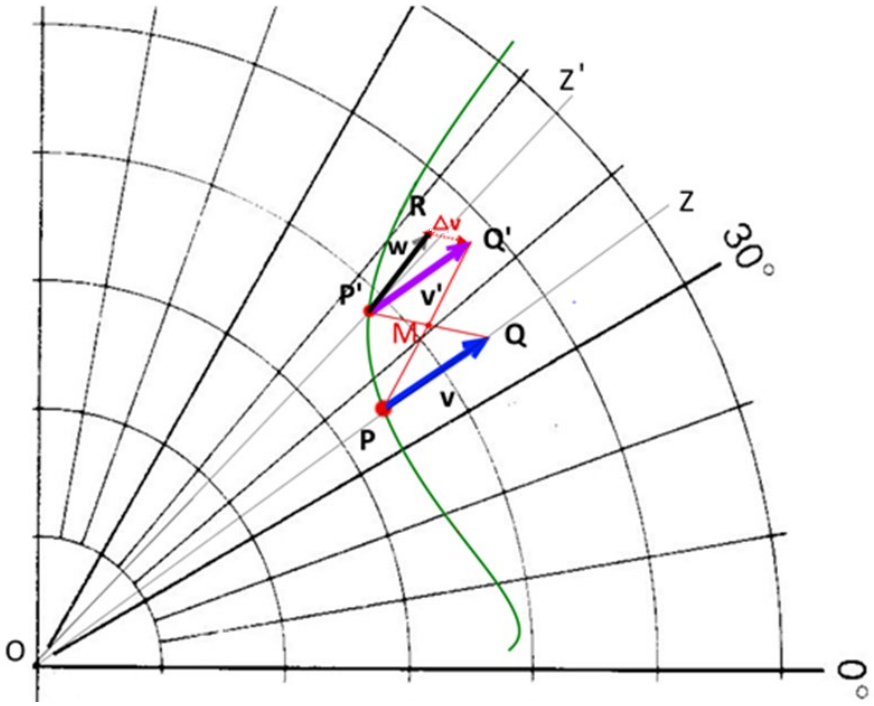


Fig.9

Scala di Schild (un gradino)

Differenza di due vettori con trasporto parallelo in coordinate polari nel piano.

La vera differenza tra i due vettori è Δv = w –v′, (quest'ultimo trasportato parallelamente sullo stesso punto P′.)

Passando al limite, Δv→ Dv = (w→v + dv) – (v′ →v+ δv), da cui Dv= dv- δv

Si voglia trasportare parallelamente il vettore v da P a P′, in coordinate polari.

In primo luogo si abbia il vettore **v.** Noi avremo misurato le due componenti del vettore **v** applicato a P in coordinate polari. Si noti (Fig. 9) che esso è stato scelto lungo la linea OZ, radiale, tale che il vettore **v,** da P a Q, ha componente θ=0, mentre si potrà vedere che **v′** ne acquisterà una diversa da zero per mezzo del trasporto.

Ora si scelga tra le geodetiche passanti per il punto P′, origine del vettore che vogliamo sottrarre, una **prima geodetica**, quella che congiunge P′ a Q. Questa, *già sappiamo,* in queste coordinate o altre, purché sul piano, **è una retta**.

Su questa geodetica si trovi il punto medio M, ciò che è sempre fattibile. Si scelga ora una **seconda geodetica**, PQ′, e la si tracci fino al punto Q′, scelto in modo che PM = MQ′. Questo sarà il vertice di **v′= P′Q′** il vettore trasportato parallelamente, con eguali differenze di coordinate cartesiane ortogonali. Che il vettore P′Q′ sia parallelo a PQ discende da un noto teorema di geometria piana, che in un parallelogramma le diagonali si dividono scambievolmente a metà, ciò che abbiamo ottenuto per costruzione. Quindi il poligono PQQ′P′ è un parallelogramma, che per definizione ha i *lati opposti eguali e*

paralleli. Il teorema citato è vero in assoluto, indipendentemente dai sistemi di coordinate usati.

Ma, si è visto in Fig. 8b, le *differenze* tra le coordinate dei punti estremi dei due vettori non non sono più eguali, perché abbiamo scelto un sistema di coordinate polari. In fig. 9 il vettore **v′** non giace più, come **v**, lungo una coordinata radiale, come sarebbe OZ′, ma ha acquistato una componente lungo la coordinata θ (rispetto a PQ, la cui componente θ è nulla). Così, anche se l'occhio vede due vettori **v** e **v′** chiaramente paralleli e di eguale lunghezza, osservandone la posizione relativa al sistema di coordinate polari, si può vedere che le componenti di **v′** sono state trasformate dallo spostamento.

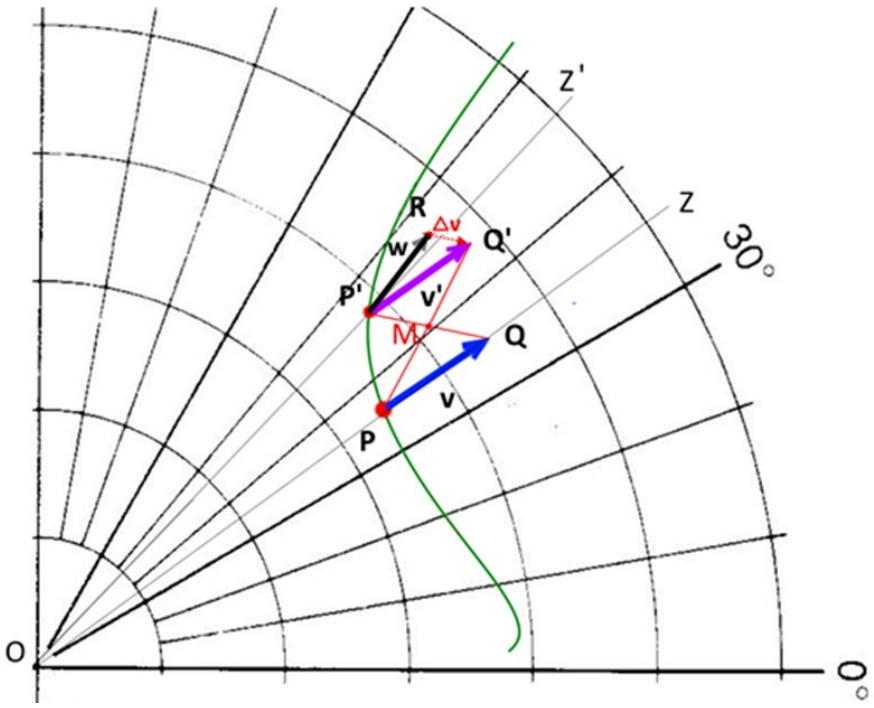


Fig.9

Scala di Schild (un gradino)
Differenza di due vettori con trasporto parallelo in coordinate polari nel piano.
La vera differenza tra i due vettori è Δv = w –v′, (quest'ultimo trasportato parallelamente sullo stesso punto P′.)

Cosi' pure sono stati trasformati gli estremi della differenza Δv = **RQ′**, rispetto ai valori che essa assume in coordinate cartesiane. In altre parole, in coordinate *non cartesiane,* l'intervallo Δv, e, al limite, il differenziale dv, non si trasformano come vettori. Questo è immediatamente dimostrato in un corso di calcolo tensoriale, che in genere ragiona sulle componenti v_i dei vettori, piuttosto che sui vettori presi in blocco. Al nostro livello notiamo che, appunto, le componenti del vettore v e v′ in coordinate polari sono diverse, e quindi anche le componenti delle differenze di vettori e dei differenziali sono diverse. Le

differenze delle componenti dei due vettori dopo la traslazione di uno di essi al punto di applicazione dell'altro non coincidono con le differenze prima della traslazione (queste possono eventualmente essere ottenute misurando separatamente le componenti dei due vettori). E per noi sarebbero al limite i differenziali dv_i.

Torniamo alla Fig.9. Si voglia la differenza **w - v.** Il vettore **v** da P a P' ha la sua variazione intrinseca e diventa **w**. Tuttavia, per fare la differenza in modo corretto con **v**, cioè tra due vettori applicati a uno stesso punto, occorre trasportare **v** a P' mediante trasporto parallelo, ottenendo **v'.**

Supponiamo di aver portato il vettore **v** nella posizione **v'**. Nella differenza misurata in P' fra i due vettori, che, al limite per PP' →0 , chiameremo **Dv**, abbiamo, per ogni componente, due contributi. Un contributo, **invisibile in Fig.(9) ma visibile nei valori delle coordinate** (vedi didascalia della Fig.9b), che chiameremo **δv,** proviene , come si è notato, dal trasporto di **v da P a P'**, e *non ha nulla a che vedere con il vettore* **w,** che è già in P'.

Passiamo ora al limite per spostamento P'P infinitesimo. Qui i vettori che ci interessano divengono: **w** →**v** + d**v** e il vettore **v'** →**v + δv** ottenuto spostando il vettore **v** con un trasporto parallelo *allo stesso punto P'→ x + dx*. Ne segue che il differenziale D**v,** che tiene conto delle esigenze dei sistemi di coordinate, e quindi è il differenziale vero, cioè il limite della differenza tra i due vettori con lo stesso punto di applicazione, è dato da:

$$\mathbf{Dv = (v + dv) - (v + \delta v)}, \text{ cioè}$$

(13) $$\mathbf{Dv = dv - \delta v}$$

Questo differenziale Dv è spesso chiamato "**differenziale covariante**". Qui l'aggettivo covariante non ha ancora molto a che vedere con i tensori covarianti (e controvarianti). Come si è detto, esso significa che tale differenziale D**v** (con la derivata che ne verrà costruita) è un oggetto geometrico formalmente indipendente da un particolare sistema di coordinate. Era questa l'intenzione di Riemann. A tutti gli effetti va usato in luogo del differenziale ordinario, con il quale coincide, se si esprimono o sottintendono coordinate cartesiane. Questo lo vedremo più avanti.

2.III.iii Scala di Schild e Geodetiche.

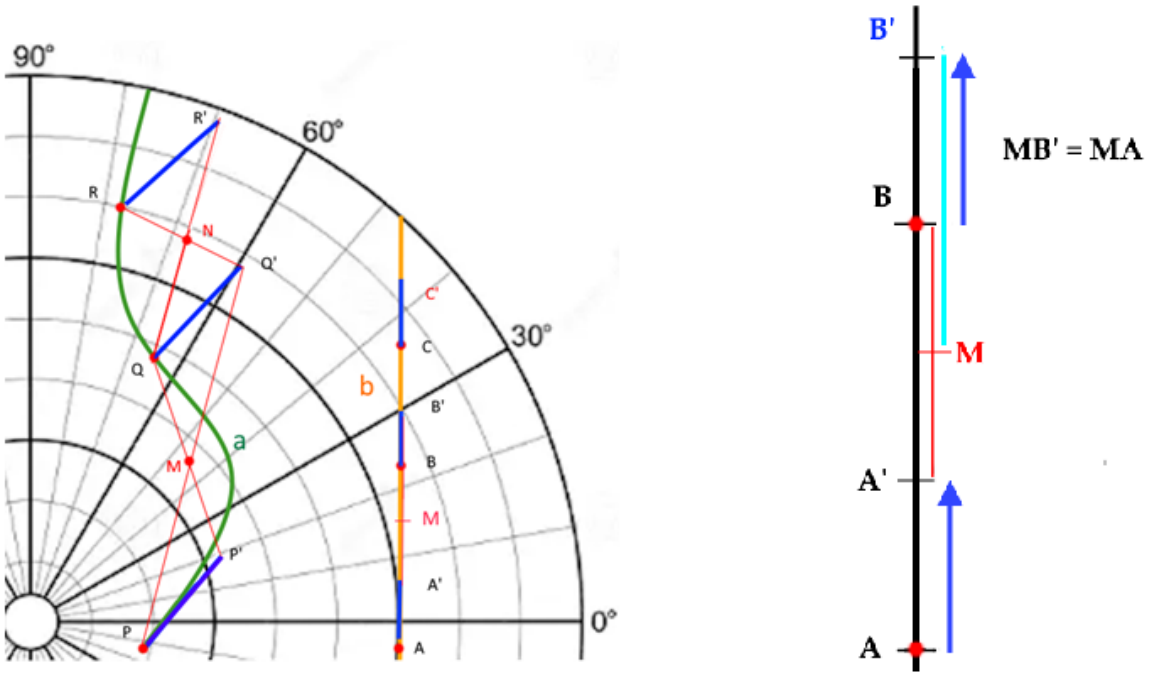
Senza scendere ulteriormente nel dettaglio, la "scala di Schild" ci dà un'informazione preziosa, come si vede intuitivamente dalla Fig. 10.

Come il solito, nel piano le geodetiche sono rette. Qui propongo due esempi, in coordinate polari nel piano, applicati a una linea (a) non geodetica (verde) e a una geodetica (b), cioè una retta (arancio)

La curva (a), verde, non è una retta e quindi, come sappiamo, non è una geodetica. Incominciamo dal basso con un vettore PP' tangente alla curva. Ma poiché l'estremo del vettore trasportato con la scala di Schild non è su una retta, i vettori successivi, che pure partono dai punti rossi (P, Q, R) da noi arbitrariamente scelti sulla curva a, si allontaneranno dalla tangente alla curva stessa, e non avranno più la stessa lunghezza, misurati in coordinate polari. Viceversa, se seguiamo un vettore i cui punti origine (A, B, C) sono situati su una geodetica (retta gialla, (b)), la scala di Schild si rinchiude come un ombrello, e quando il vettore iniziale giacerà sulla geodetica (cioè le sarà necessariamente tangente), resterà tangente e di lunghezza uniforme in tutti i gradini successivi.

La ragione è che quando il vettore AA' giacerà su una geodetica, la congiungente il punto che noi abbiamo chiamato B con il vertice del vettore A' giacerà egualmente sulla stessa geodetica. Il punto medio M di tale congiungente resterà sulla geodetica di partenza, e la seconda geodetica, tracciata da A attraverso tale punto medio, coinciderà a sua volta con la prima geodetica. Riportando su di essa il vettore MA a partire da M, giungeremo al punto B', ottenendo un vettore B'B = A' A, sulla stessa geodetica, o "tangente" alla stessa geodetica - risultato corretto e generalizzabile, almeno in prima approssimazione.

Si può anche dimostrare che un vettore che forma un dato angolo (qui è l'angolo zero) con una geodetica, se trasportato lungo di essa mantiene lo stesso angolo, ciò che evidentemente non è vero lungo la curva (a).



(a) (b)

Fig.10

(a) Trasporto parallelo di un vettore inizialmente tangente a linea non geodetica: la tangenza è perduta.
(b) Geodetica come linea punto per punto parallela alla sua tangente in quel punto.

Il diagramma a destra spiega come, riportando il segmento AM a partire da M, BB'=AA'.
Anche in coordinate polari i vettori *che rappresentano una velocità uniforme* e si spostano lungo la geodetica devono avere la stessa lunghezza, grazie al contributo dei coefficienti di Christoffel, perché la scala di Schild usa concetti validi anche in coordinate polari.

Generalizzando questo risultato, ne segue un'importante proprietà: **Una linea geodetica trasporta parallelamente la sua tangente lungo sè stessa.**

Si può anche dimostrare che un vettore che forma un dato angolo (qui è l'angolo zero) con una geodetica, se trasportato lungo di essa mantiene lo stesso angolo, ciò che evidentemente non è vero lungo la curva (a).

La costruzione di Schild ci dice pure altro, almeno nel nostro caso. La differenza dei due vettori, che, se infinitamente vicini, diventa il differenziale Dv, è nulla se il vettore di partenza giace su una geodetica, cioè, nel nostro esempio, una retta. Ciò significa che **per una geodetica, il "differenziale covariante" è nullo.** Ma questo ci dà un'idea per trovare compiutamente la formula della derivata covariante (nella sua versione più primitiva).

Ricordo l'equazione della geodetica ricavata, per esempio , per mezzo delle equazioni di Lagrange nel nostro sistema di coordinate. Essa ci è nota come composta da due equazioni, una per variabile,

$$(14a) \qquad \frac{d^2r}{dt^2} + \Gamma(r;\ \theta,\theta)\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0\,, \quad \text{con } \Gamma(r;\ \theta,\theta) = -r$$

$$(14b) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \Gamma(r;\ r,\theta)\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \Gamma(r;\ \theta,r\ )\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} = 0, \ \text{con } \Gamma(r;\ r,\theta) = \Gamma(r;\theta,r\ ) = +\frac{1}{r}$$

Scriviamo ora le variabili diversamente. Intanto, il tempo t, utile nella meccanica tradizionale, può essere utilmente sostituito da un parametro generico λ, una sorta di "contatore del procedere della particella sulla geodetica", che può anche esser sostituito da τ, il "tempo proprio", utile nei problemi di relatività (ristretta e generale,) o, meglio,in geometria, da s, la misura dell'arco di curva. Si possono trovare le curve geodetiche descritte in termini di tutte queste variabli. La nostra velocità sarà v, e, ricordiamo, la geodetica è il percorso di una particella non soggetta a forze, in moto quindi "rettilineo" (o geodetico) e *uniforme.* Quindi, possiamo dire che $dv_r/ds = dv_r/d\tau = dv_r/dt = 0$ (e lo stesso per la componente $v_{\theta.}$)

Se scegliamo **s** come variabile indipendente, le equazioni della geodetica diventano:

$$(15a) \qquad \frac{d^2r}{ds^2} + \Gamma(r;\ \theta,\theta)\frac{d\theta}{ds}\frac{d\theta}{ds} = 0\,, \quad \text{con } \Gamma(r;\ \theta,\theta) = -r$$

(15b) $\frac{d^2\theta}{ds^2} + \Gamma(r;\, r,\theta)\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} + \Gamma(r;\, \theta,r\ )\frac{d\theta}{ds}\frac{dr}{ds} = 0,$ con $\Gamma(r;\, r,\theta) = \Gamma(r;\, \theta,r\ ) = +\frac{1}{r}$

Dal canto suo, l'equazione D**v** =0, che dovrebbe produrre lo stesso risultato, tradotta nelle due variabili ci dà:

(16a) $\mathrm{d}v_r$ - $\delta v_r = 0$

(16b) $\mathrm{d}v_\theta - \delta v_\theta = 0$

dove $v_r = \frac{dr}{ds}$ e $v_\theta = \frac{d\theta}{ds}$ (si noti che nel formalismo tensoriale le derivate si fanno variabile per variabile, mentre in meccanica razionale la componente della velocità lungo θ è scritta r dθ.)

Per incominciare, in quanto a dv, esso può essere scritto come differenziale totale, nella nota forma

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

E per un qualsiasi vettore v funzione di r e θ, e di componenti v_r *e* v_θ esso diventa

(17a) $$dv_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}\, dr + \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\, d\theta$$

Similmente:

(17b) $$dv_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\, dr + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\, d\theta$$

Ma noi possiamo dare anche un'idea della forma del "quasi vettore" δv_i.. Si possono dare dimostrazioni più convincenti, ma qui diciamo che possiamo tentare ottimisticamente la forma più semplice, in cui δv dipende *(bi)linearmente* da ciò da cui può dipendere. Non c'è molto da scegliere, esso può dipendere dalle componenti del vettore v, cioè v_r e v_θ e dalle componenti dagli spostamenti infinitesimi dr e dθ. In altre parole:

(18a) $\delta v_r = C(\,r;\, r,r)v_r dr + C(r;r,\theta)v_r\, d\theta + C(r;\, \theta,r\,)v_\theta\, dr + C(r;\theta,\theta)\, v_\theta\, d\theta$

(18b) $\delta v_\theta = C(\,\theta;\, \theta,\theta)v_\theta\, d\theta + C(\theta;\theta,r)v_\theta\, dr + C(\theta;r,\theta\,)v_r\, d\theta + C(\theta;r,r)v_r\, dr$

I coefficienti C sono opportuni coefficienti da definirsi, che dipendono dal sistema di coordinate. Il primo loro argomento indica la variabile di cui si calcola il differenziale, il secondo indica una delle due componenti della velocità nel prodotto che segue, il terzo indica il differenziale di una delle due variabili indipendenti. Ancora una volta i coefficienti possibili sono otto in totale.

Nei sistemi cartesiani , le C sono tutte nulle. E **quindi le derivate covarianti coincidono con le derivate ordinarie.** In quanto agli altri sistemi di coordinate, esistono vari modi di

calcolarle. Qui, ricorrendo all'intuizione del lettore, indicherò un procedimento euristico per trovarle. Propongo come esempio il differenziale radiale (indice r):

(19) $$Dv_r = dv_r - \delta v_r =$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}\, dr + \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\, d\theta - C(r;\, r,r)v_r dr - C(r;r,\theta)v_r\, d\theta - C(r;\, \theta,r\,)v_\theta\, dr - C(r;\theta,\theta)\, v_\theta\, d\theta =$$

(riordinando)

$$= \left(\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - C(r;\, r,r)v_r - C(r;\, \theta,r\,)v_\theta\right) dr + \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - C(r;r,\theta)v_r - C(r;\theta,\theta)\, v_\theta\,\right) d\theta$$

Ora, r e θ sono indipendenti l'una dall'altra, e quindi $dr/d\theta = d\theta/dr = 0$. Dividendo prima per dr e poi per dθ si possono quindi dedurre le due equazioni

(20a) $$\frac{Dv_r}{dr} = \left(\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - C(r;\, r,r)v_r - C(r;\, \theta,r\,)v_\theta\right)$$

(20b) $$\frac{Dv_r}{d\theta} = \left(\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) - C(r;\, r,\theta)v_r - C(r;\, \theta,\theta\,)v_\theta\right)$$

Operando similmente con Dv_θ si ottengono altre due equazioni

(20c) $$\frac{Dv_\theta}{dr} = \left(\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) - C(\theta;\, r,r)v_r - C(\theta;\, \theta,r\,)v_\theta\right)$$

(20d) $$\frac{Dv_\theta}{d\theta} = \left(\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) - C(\theta;\, r,\theta)v_r - C(\theta;\, \theta,\theta\,)v_\theta\right)$$

Queste sono le quattro derivate covarianti del vettore bidimensionale v(r, θ).

Le derivate covarianti in questo caso sono quattro, perché ciascuna delle due componenti $(v_r, v_\theta\,)$ del vettore velocità va derivata rispetto a ciascuna delle due variabili (in questo caso r e θ). Ma, ricordiamo, ancora non conosciamo il valore dei coefficienti C.

"Chiaramente" (dice il Landau), l'equazione $dv_i/dt = 0$, del moto di un punto non soggetto a forze, valida in coordinate , viene estesa in coordinate curvilinee come $Dv_r(/dt) = Dv_\theta\,(/dt) = 0$. Proviamo a farlo, e vediamo cosa troviamo.

Ponendo $\boldsymbol{Dv_r = 0}$, otteniamo

(21) $$dv_r = (\,C(r;\, r,r)v_r + C(r;\, \theta,r\,)v_\theta\,)dr + (C(r;r,\theta)v_r + C(r;\theta,\theta)v_\theta\,)d\theta$$

Ora dividiamo per ds, ricordando che si può anche usare la variabile s invece di t, da cui:

$$\frac{dr}{ds} = v_r, \quad \frac{d\theta}{ds} = v_\theta$$

il che ci permette di eliminare i simboli delle velocità dalle nostre formule

(22a) $$\frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right) = \left(C(r;\, r,r)\frac{dr}{ds} + C(r;\, \theta,r)\frac{d\theta}{ds}\right)\frac{dr}{ds} + \left(C(r;r,\theta)\frac{dr}{ds} + C(r;\theta,\theta)\frac{d\theta}{ds}\right)\frac{d\theta}{ds}$$

Ne risulta che :

(23) $$\frac{d^2r}{ds^2} = C(r;\, r,r)\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds} + \left(C(r;\, \theta,r) + C(r;r,\theta)\right)\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} + \boldsymbol{C(r;\theta,\theta)}\frac{d\theta}{ds}\frac{d\theta}{ds}$$

Da confrontarsi con le (15), ad esempio

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \Gamma(r;\, \theta,\theta)\frac{d\theta}{ds}\frac{d\theta}{ds} = 0$$

I conti tornano, almeno per il banale esempio da me scelto, se si pone $C(r, \theta, \theta) = -\Gamma(r;\, \theta,\theta)$, e si pongono eguali a zero gli altri tre coefficienti C che appaiono qui sopra.

Seguendo lo stesso cammino, con partenza dall'equazione della geodetica per θ, si conclude che occorre identificare $-(C(\theta;\theta,r) + C(\theta;r,\theta))$, con $\Gamma(\theta;\, r,\theta) + \Gamma(\theta;\, \theta,r)$ e porre eguali a zero gli altri coefficienti C. E' un esercizio decisamente facile, che lascio volentieri al lettore (se a questo punto non è già passato a materie classiche).

Questo ci permette anche di tornare indietro alla (20) e ri-scrivere la formula completa per le derivate covarianti, se così ci piace, identificando le C (che sono ignote) con le Γ (che sono note) :

(24a) $$\frac{Dv_r}{dr} = \left(\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \Gamma(r;\, r,r)v_r + \Gamma(r;\, \theta,r)v_\theta\right)$$

(24*b*) $$\frac{Dv_r}{d\theta} = \left(\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) + \boldsymbol{\Gamma(r;\, r,\theta)v_r} + \Gamma(r;\, \theta,\theta)v_\theta\right)$$

Operando similmente con Dv_θ , si ottengono altre due equazioni

(24*c*) $$\frac{Dv_\theta}{dr} = \left(\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \Gamma(\theta;\, r,r)v_r + \Gamma(\theta;\, \theta,r)v_\theta\right)$$

(24d) $$\frac{Dv_\theta}{d\theta} = \left(\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) + \Gamma(\theta;\, r,\theta)v_r + \Gamma(\theta;\, \theta,\theta)v_\theta\right)$$

Da confrontarsi con le 7.c, da cui:

$$\boldsymbol{\Gamma(r;\, \theta,\theta) = -r\,;\quad \Gamma(\theta;\, r,\theta) = \Gamma(\theta;\, \theta,r) = +\frac{1}{r}}$$

Gli altri coefficienti sono nulli e lasciano la 24a senza coefficienti di Christoffel.

Da come si è ottenuto il "differenziale covariante", vediamo che i contributi con iniziale δ sono costruiti mediante il trasporto parallelo e stanno per così dire a cavallo tra i due punti P e P'. **Questo fatto già ci dice che questa porzione del differenziale covariante non è un vettore, in quanto il vettore deve essere applicato a un punto e non a due punti. Ne segue che neppure i simboli di Christoffel sono tensori.** Hanno alcune proprietà dei tensori, ma non sono tensori.

4. Conclusione e semplice esercizio conclusivo.

Abbiamo seguito un tortuoso cammino euristico, ma siamo riusciti ad ottenere correttamente risultati indipendenti, che, oltre che giustificare le varie imprecisioni ed i ricorsi all'intuizione presenti in questo saggio, indicano la strada di accettabili generalizzazioni. Inoltre, la scorciatoia che abbiamo trovato ci suggerisce che, invece di utilizzare le formula provenienti dalla conoscenza del tensore metrico, che abbiamo preferito non incontrare, l'utilizzo delle equazioni di Lagrange è più diretto, una volta nota l'espressione dell'elemento di arco.

Buona notizia: i conti tornano anche se scegliamo il caso dell'altro nostro esempio, delle geodetiche sulla superficie sferica. Ai risultati per le geodetiche e le derivate covarianti si può arrivare formalmente sostituendo ovunque r con φ, perché nel nostro ragionamento noi non abbiamo avuto bisogno di scrivere il contenuto dei coefficienti C o Γ.
Naturalmente, ciò vale per i simboli, ma non vale per i valori reali dei Simboli di Christoffel, cioè 1/r non diventa 1/φ e -r non diventa -φ, etc.)

Noto però che le equazioni di Eulero-Lagrange possono essere usate in modo più intuitivo, senza passare attraverso la meccanica classica, e l'energia cinetica T, ma minimizzando direttamente l'elemento d'arco.
È intuitivamente chiaro che minimizzare l'arco che unisce A a B, significa calcolare il variazionale:

$$\delta \int_{s_A}^{s_B} s\, dt = 0$$

La lagrangiana però diventa (ponendo R = 1)

$$\boldsymbol{L = s = \sqrt{\left(\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)}}$$

La presenza della radice quadrata, però, complica le equazioni risultanti, e il procedimento della loro soluzione, che peraltro è la stessa.

Torniamo al nostro aereo in volo da Napoli a New York.

Avevamo descritto il moto dell'aereo da Napoli a New York dapprima in modo "sperimentale" visto dal pilota (pag.11 e 12). Poi avevamo ricavato le equazioni della geodetica dalle equazioni di Lagrange *della meccanica*, interpretando i coefficienti dei prodotti di due derivate prime come coefficienti di Christoffel. Non le avevamo risolte, ovvero integrate, però. La soluzione esula da questo breve saggio e non è immediata. Comunque è nota (vedi inizio di 2.I, pag.7) e produce θ in funzione di φ, cioè seguendo la longitudine sull'equatore, ci dà la colatitudine corrispondente. L'equazione della geodetica con due estremi è, come sappiamo, l'equazione di un arco di cerchio massimo passante per i due estremi.

Come si è visto, un modo equivalente di derivare la rotta dell'aereo è quello di esprimere il suo "differenziale covariante" in termini di colatitudine e longitudine e *porlo eguale a zero* (vedi eq. 21) – ricordando che nel nostro caso il differenziale covariante ha due componenti. In pratica ne seguono le stesse due equazioni recedentemente trovate, una per la colatitudine e una per la longitudine, già trovate usando le Equazioni di Euler-Lagrange.

Le due accelerazioni componenti, una per equazione, come si è visto, non sono nulle, perché, ad esempio quella secondo la colatitudine, esprime un cambiamento della velocità dell'aereo da direzione nord a direzione sud, accelerazione non nulla, come è noto, anche se il modulo della velocità è costante. Il fatto è che si tratta di un moto relativo. Chi muove non è l'aereo, ma sono le mappe con le loro coordinate geografiche al di sotto dell'aereo (vedi Fig.5). Cioè il termine correttivo, che annulla la derivata covariante della velocità, ci dice come ruota la mappa rispetto alla direzione della geodetica. Da un punto di vista algebrico, esso è semplice da scriversi, in quanto non è altro che una somma di prodotti di termini già noti, senza che alcuna funzione più complicata entri in gioco. Gli addendi sono ciascuno costituito da una delle varie componenti di un "Coefficiente di Torsione", moltiplicata per una coppia di derivate temporali di componenti angolari delle velocità, che ci dice di quanto ruotano le loro direzioni. Questo "Coefficiente di Torsione" è il simbolo di Christoffel, che può essere calcolato direttamente per mezzo delle equazioni di Euler-Lagrange, o addirittura dal tensore metrico.

La "Torsione" che qui si riferisce alle mappe, che ruotano sotto la rotta geodetica, è abbastanza visibile in Fig. 5.

Quante componenti non nulle e differenti ha al massimo un coefficiente di Christoffel?

Resta infine da calcolare quante sono le componenti di un simbolo di Christoffel in **n dimensioni**, e, ancora meglio, quante sono, al massimo, le componenti *differenti* di un simbolo di Christoffel . La ragione è che abbiamo visto che già con due sole coordinate ci sono valori di C necessariamente eguali, in quanto moltiplicano due eguali componenti delle velocità, seppure in ordine diverso. Questa simmetria è inevitabile. Tuttavia, ci possono essere componenti accidentalmente eguali, che dipendono dal sistema di coordinate scelto, come nel caso delle coordinate cartesiane, in cui tutte le componenti sono eguali a zero, e quindi anche tra loro. Queste simmetrie non le possiamo anticipare.

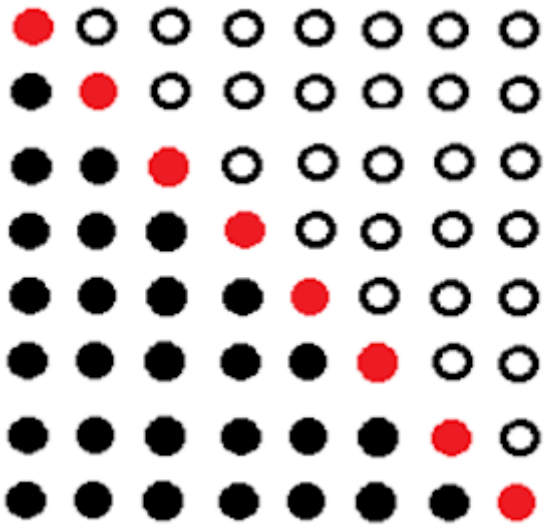


Fig.12
Conteggio dei coefficienti di Christoffel diversi possibili

Una componente che noi abbiamo scritto Γ(i; j,k) viene normalmente scritta nei libri seri come Γ^{i}_{jk} , in cui la lettera ***i*** distingue una matrice intera (si vedano l'equazione per δv_r , dove il primo indice è r in tutti i coefficienti C o Γ, e l'equazione per δv_θ ,in cui θ è il primo indice.)
Ciò che importa è che gli indici sono tre. In uno spazio a n dimensioni ciascuno degli indici i, j e k può assumere n differenti valori. Quindi il numero massimo possibile di elementi è n^3. Se ci concentriamo sui due indici inferiori (j e k), vediamo che, in n dimensioni, i coefficienti possono essere disposti come gli indici degli elementi di una matrice quadrata n x n. Come sappiamo, una matrice è simmetrica se $a_{jk} = a_{kj}$. La diagonale della matrice è composta di elementi unici a_{ii} (in rosso nella figura), unici perché scambiando gli indici abbiamo lo stesso elemento. Gli elementi che dobbiamo contare sono quindi i dischetti neri più i dischetti rossi. Contandoli insieme, ne abbiamo 1 nella prima riga, 2 nella seconda, tre nella terza, fino a n nell'ennesima riga. Il nostro problema è quindi il "problema di Gauss bambino", di sommare i numeri da 1 a n, la cui soluzione è

$$\sum_{1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Mi aspetto che la soluzione sia arcinota. Se non lo è si provi a sommare (1,2,3,…n-1, n) a (n, n-1, …3,2,1) termine a termine e poi si ragioni.

Possiamo pensare di avere n di queste matrici, una per ogni valore dell'indice superiore i. Ne segue che il numero totale N di componenti diverse è

$$N = n\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2(n+1)$$

Quindi in 2 dimensioni possiamo avere fino a 6 diverse componenti; in tre dimensioni 18, in quattro dimensioni (Relatività Generale!) 40. Se non ci fossero queste simmetrie, ci sarebbero semplicemente n^3 componenti diverse, cioè 8 in 2D, 27 in 3D, 64 in 4 D.

E con questo facile esercizio termino questa seconda edizione del mio saggio sui coefficienti di Christoffel, spero un poco più chiara e completa della prima.