QUIZ SULLO SVILUPPO DEL CUBO
(E ALTRE INFORMAZIONI)

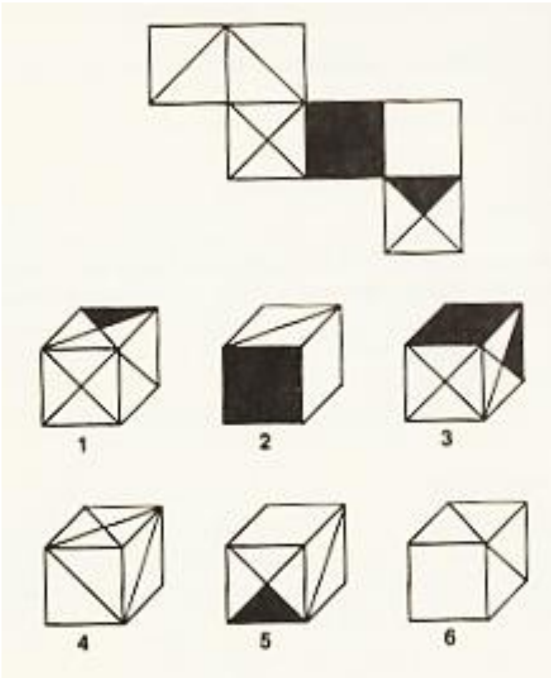


Fig.1

Da: “Match Wits with MENSA”, byMarvin Grosswirth,1981 (p.378)

D.E, Autunno 2022

Introduzione.

Circa quarant'anni fa, quando incominciai a interessarmi al declino delle mie capacità intellettive, mi imbattei nella figura in pag.1. Non ebbi mai alcuna intenzione di iscrivermi alla MENSA, ma il libro prometteva una quantità di esempi di quiz "intelligenti", e volevo provare le mie forze residue. Non faccio commenti sulla MENSA. So che ci sono opinioni più o meno aggressive nei riguardi di questa associazione, formata da (circa 120000 – 2022) persone che hanno comuni interessi, che non sono i miei, come tante altre. Trovo lodevole il fatto che NON dicano con una certa dose di ipocrisia di lavorare per il bene dell'umanità, e non lavorino per il male della medesima. Tanto mi occorre e basta.

1. Il problema.

La figura che ho riprodotto in prima pagina riportava uno dei quiz che compaiono regolarmente nei test generici di intelligenza (per *generici* intendo quiz che non sono rivolti a determinare se chi li affronta sia adatto ad imboccare una determinata strada che porta a una determinata professione.)

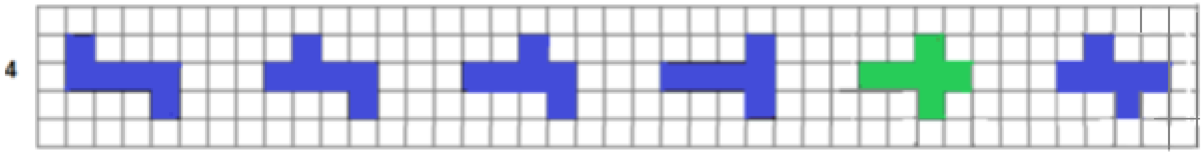
La domanda era: "Quale dei sei disegni (1,2,3,4,5,6) **non** rappresenta una configurazione che possa risultare dal cubo il cui sviluppo è dato al sommo della pagina?".

A pag. 430 veniva data la soluzione, con la curiosa annotazione: "Solo 30% dei *Mensani* diede la risposta giusta. Tre di quelli che riuscirono, confessarono di aver fotocopiato la figura e aver ricostruito personalmente il cubo. Questo non è "barare", ma piuttosto usare al meglio le risorse a propria disposizione".

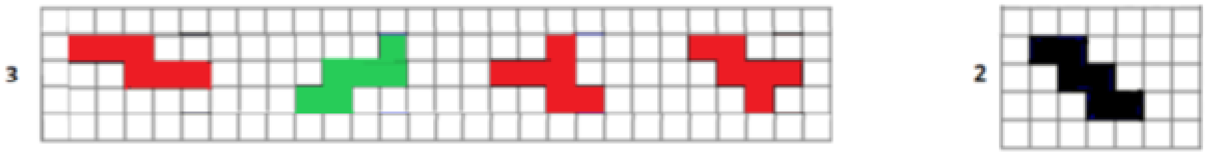
Naturalmente accettai questo responso come valido. Se non c'erano riusciti i Mensani, era ormai inutile che mi ci provassi io. Dieci o quindici anni prima di allora lo avrei magari fatto, ma quarant'anni fa non me ne sentivo capace. Curiosamente, oggi, quarant'anni più tardi, credo di aver trovato un metodo relativamente rapido per risolvere il problema, che richiede solo una modesta capacità di visualizzare figure in tre dimensioni.

2. Gli undici sviluppi del cubo.

Intanto molti sanno (e moltissimi non sanno) che un cubo può essere sviluppato in vari modi. Ma il numero di modi non è infinito, ne esistono solo **undici**. Io non so quanto complicata sia una dimostrazione rigorosa di questo numero. Per conto mio mi sono fatto una "illustrazione" intuitiva per me soddisfacente, che non si trova comunemente, forse proprio per la mancanza di rigore. Tuttavia, sono sicuro che si tratta di una illustrazione arcinota.



A B C D E F



G H I L M

Fig.2 Gli undici possibili sviluppi di un cubo: darò esempi per i due casi verdi. Nella prima riga sono gli sviluppi che hanno una fila di quattro elementi; nella seconda riga il numero massimo è tre elementi per i primi quattro e due per l'ultimo sviluppo accettabile.

Queste figure formate da sei quadratini hanno in italiano l'insidioso nome generico di "esamini". In appendice mi riserbo di dare la mia illustrazione di come questi undici esamini siano gli unici sviluppi di cubi possibili, tratti dalla schiera di 35 esamini possibili.

Noi possiamo supporre che gli elementi (future facce) siano quadrati rigidi, eventualmente cuciti o saldati lungo un lato, ma in modo di poter ruotare usando quel lato come cardine.

La piega può solo avvenire perpendicolarmente alla congiungente dei due centri delle due facce saldate insieme:

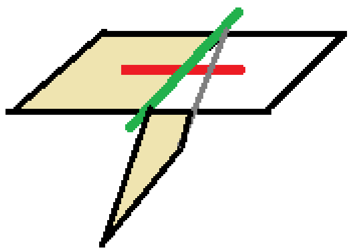


Fig.3

Il lato comune può essere piegato ma non tagliato. Come si può osservare in Fig.2, vi sono esamini in cui il solo contatto tra due elementi sta in un vertice. Il vertice, però, non può essere considerato come il perno su cui possa avvenire qualsiasi rotazione. D'altra parte, non sono ammessi esamini in cui un elemento abbia un unico punto di contatto con il resto del sistema.

Normalmente, quando da uno di questi esamini si vuole ricostruire un cubo, si suggerisce di "incollare" a un supporto una qualsiasi faccia come base, e poi di piegare le altre al di sopra di essa in modo opportuno. Qualunque faccia si scelga come base in un esamino, deve essere possibile ricostruire lo stesso cubo.

I cubi da ricostruire differiscono per i disegni o colori delle facce. Il caso in cui le facce sono distinguibili solo per il colore è il più semplice, e altrettanto semplice è la ricostruzione mentale del cubo e la soluzione del problema dato. Più difficile è il caso in cui le facce portano figure che differiscono o possono differire per l'orientamento della grafica (si veda in Appendice II, pag.16, il caso dei dadi da gioco).

Qui darò esempi di soluzione per due degli undici sviluppi possibili di Fig.2 (4E, riflesso con scambio destra-sinistra, e 3H, con riflessione tanto in larghezza quanto in altezza). Una volta noto il principio, chiunque dovrebbe potercisi provare. Il punto è che normalmente i quiz richiedono che tutto il lavoro sia fatto a mente. Ma si vedrà che, dopo tre o quattro esperimenti riusciti, visualizzare il procedimento non è poi così difficile.

3. Il metodo "gravitazionale"

Il metodo che propongo è di non scegliere una faccia come "base", o inferiore, ma piuttosto come "sopra" e sollevarla quanto basta, immaginando di tenere quella faccia come faccia superiore, piatta, e lasciando che la gravità faccia il suo lavoro, più o meno come, tenendo un polipo per la testa fuori dell'acqua, i tentacoli ricadono verso il basso. Nel nostro caso le altre facce ricadranno, ruotando intorno ai lati di contatto con la faccia superiore, fino a che i loro lati non vengano in contatto con quelli di altre facce, a cui verranno saldati. Lasciando al loro posto le facce direttamente attaccate alla faccia superiore, potremo ripiegare tutte le altre in modo opportuno. In pratica le ripiegheremo sempre verso il centro del cubo, che immagineremo situato sotto alla faccia superiore.

Il modo in cui le facce dapprima "cadono" e poi "possono essere ripiegate" è dato in figura, per i due esempi "verdi" di Fig. 3, 4E e 3H. Le sei facce vengono scelte a turno come facce superiori.

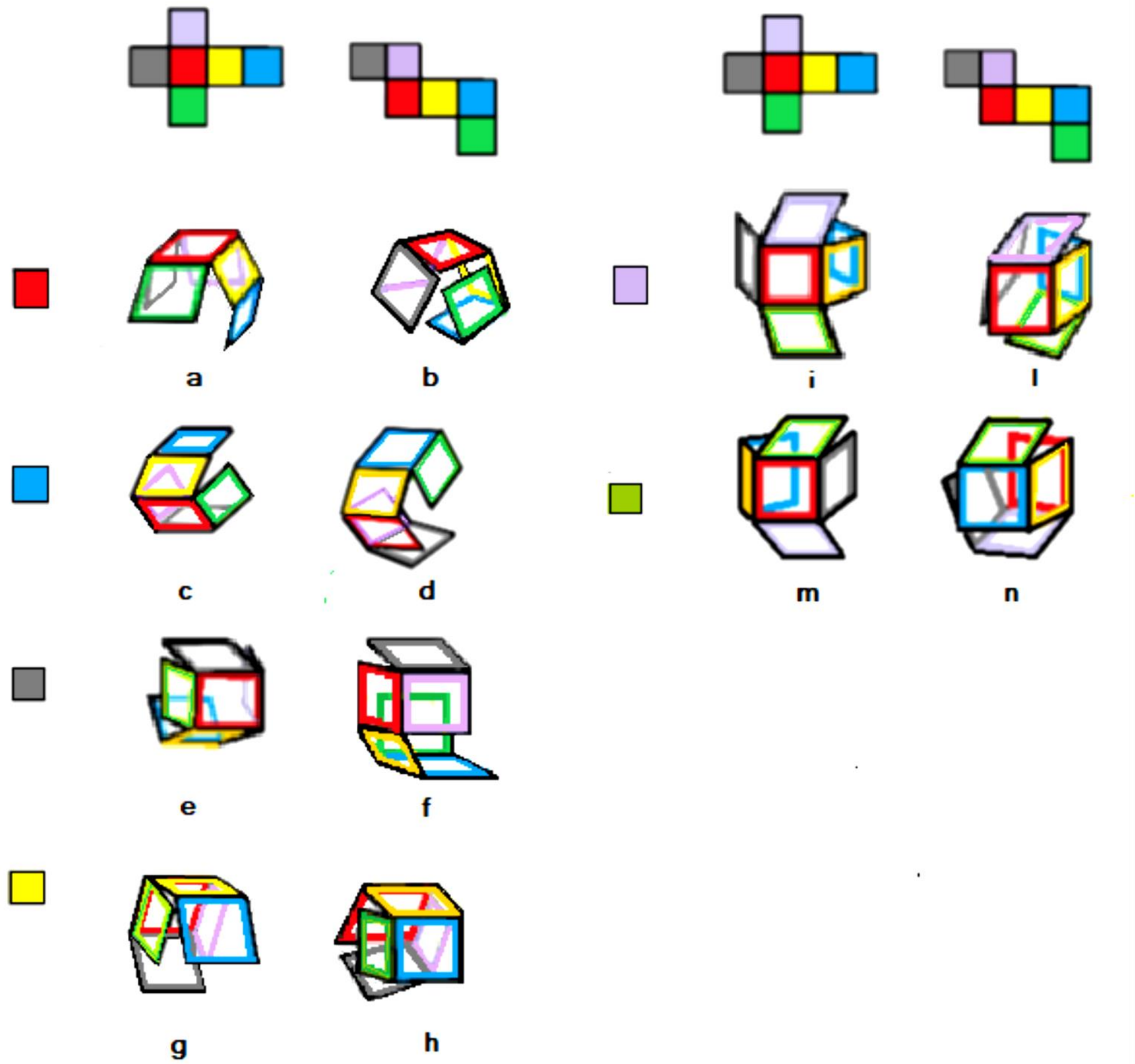


Fig.4: Illustrazione di come, scelta una faccia come faccia superiore, le altre ricadano e si ripieghino sotto di essa per effetto della gravità (e in seguito grazie alla nostra azione). Il quadratino colorato, a sinistra, indica il colore della faccia superiore, e le due colonne si riferiscono ai due sviluppi in testa all'illustrazione.

4. Applicazione al problema dato in Pag.1.

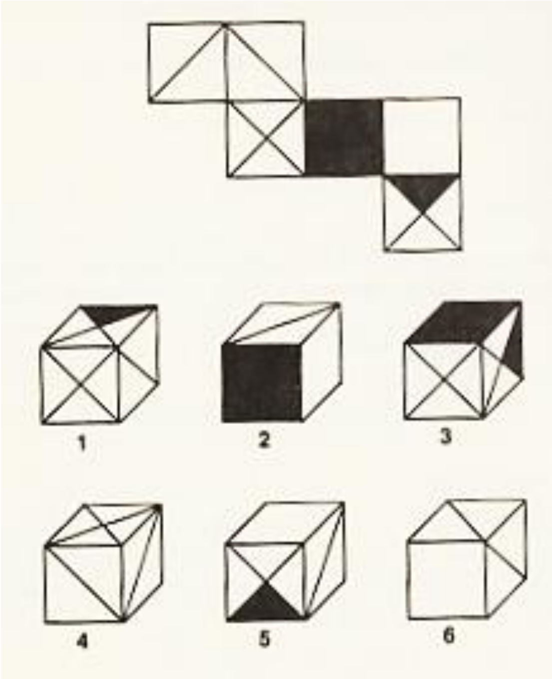


Fig.1b

Il diagramma dello sviluppo utilizzato, è quello in testa alle colonne (b,d,f,h) e (l, n.) di Fig.4.

In generale, il primo esame da fare, rapido, sarebbe verificare se in qualcuno dei cubi proposti compaiono facce opposte, ciò che non può avvenire in realtà. Mentre ciò è immediato nel classico sviluppo a croce latina, lo è meno nello sviluppo proposto in Fig. 1b. A pag.13 vengono date le regole per colorare (con tre colori) le facce, in modo da sapere a priori quali sono le facce opposte. Il diagramma delle facce opposte dello sviluppo in Fig.1b è il quinto in Fig.AI.8. Tuttavia, la verifica non sempre dà un risultato definitivo, in quanto ci possono essere proposte in cui non compaiono facce opposte, e nondimeno il cubo non è quello corretto.

Nel nostro caso, poi, partire dalla ricerca di facce opposte non è un metodo rapido. Lo sarebbe se fosse chiesto da quale di diversi sviluppi di cubo deriva un cubo proposto, oppure se fosse chiesto di identificare il cubo (tra molti) che deriva da un dato sviluppo, piuttosto che il cubo che **non** ne deriva, come è il nostro caso. Qui conviene procedere con il metodo "gravitazionale" fin dall'inizio, metodo la cui applicazione può rivelarsi necessaria anche nei casi precedenti, una volta eseguita la verifica delle facce oposte, se quest'ultima non dà risultato.

Analizziamo ora le varie proposte, col metodo “gravitazionale”.

Proposta 1. Faccia superiore con triangolo nero, diagramma n.

Questo equivale a porre la faccia verde dei diagrammi in Fig.4 alla sommità. Si immagini di sollevare lo sviluppo, pieghevole alle saldature, e lasciar fare alla gravità. Le tre facce della seconda riga nel diagramma cadono, e possono essere ripiegate intorno alla faccia “superiore” e saldate ad essa. La faccia e bianca e quella nera restano dietro e a sinistra, invisibili. La faccia con la croce resta davanti e si vede che è in posizione compatibile col triangolo nero della faccia superiore. Quindi la proposta 1 è compatibile.

Proposta 2. Faccia superiore a barra, diagramma l (elle).

Le tre facce sottostanti cadono verticalmente e vengono piegate intorno alla faccia superiore. La nera davanti, e la bianca di fianco. Compatibile.

Proposta 3. Faccia superiore nera, diagramma h.

Le due facce di destra cadono, poi vengono saldate alla faccia superiore. Solo la faccia con il triangolo nero resta visibile (ed il triangolo nero è nella posizione giusta). A sinistra cadono in tutto tre facce, due delle quali, una volta ricadute, possono esser saldate alla faccia superiore. Quella con la croce resta davanti, a contatto con la faccia col triangolo nero. Compatibile.

Proposta 4. Faccia superiore a croce, diagramma b.

Due facce cadono dietro, tre a destra. Grazie a una rotazione intorno all’asse verticale, oltre alla faccia superiore possiamo lasciare visibili solo le facce della prima riga in alto. Esse si avvolgono intorno alla faccia superiore nll’ordine giusto: le linee trasverse si incontrano nel vertice lontano dalla faccia superiore, come nello sviluppo. Compatibile.

Proposta 5. Faccia superiore bianca, diagramma d.

Una casella cade davanti, ma già vediamo che il triangolo nero dovrebbe essere saldato alla faccia superiore, e qui non lo è. **Incompatibile.** Qui si potrebbe smettere la ricerca, se si sa che un solo diagramma è incompatibile.

Proposta 6. Faccia superiore sbarrata, diagramma l (elle).

A sinistra cade una faccia sbarrata che è nella giusta posizione. Il sistema viene ora ruotato verso destra. Le tre facce della fila sottostante si avvolgono intorno alla faccia superiore, e l'ultima, bianca, finisce a contatto con la faccia sbarrata. Compatibile.

E con questo, il problema è risolto. Non credo che, con un po' di esercizio, la soluzione prenda più di un paio di minuti (se lo sviluppo proposto fosse quello più noto, a croce latina, un minuto sarebbe più che sufficiente).

APPENDICI.

I. ESAMINI e altre osservazioni.

Le figure geometriche che abbiamo esaminato, e che includono gli sviluppi dei cubi, portano in italia l'insidioso nome di "Esamini". In Inglese il nome è "Hexominoes". Esse sono costituite da sei quadrati identici, tali che ognuno di essi abbia almeno un lato comune con uno dei quadrati che compongono il resto della figura. Gli esamini appartengono alla classe più generale dei *polimini*, che contano *n* quadrati. **Non esiste (per quanto ne so) una formula che permetta di calcolare a priori il numero di polimini possibili costituiti da un numero n di quadrati, e in genere si procede per enumerazione.** Ad esempio, già sappiamo che gli esamini possibili sono 35, dei quali solo 11 rappresentano gli sviluppi di un cubo.

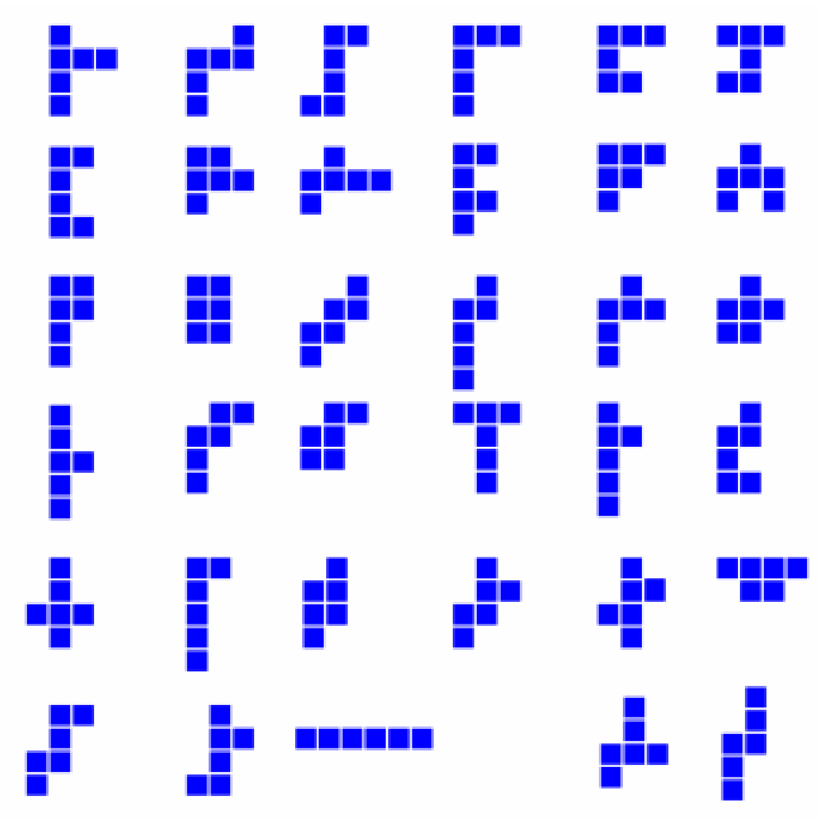


Fig. AI.1

I trentacinque esamini possibili.

Si noti poi che un esamino vale per quattro, perché si considera essere lo stesso anche se ruotato o riflesso orizzontalmente o verticalmente. Per esempio, il primo esamino della schiera ha i seguenti equivalenti. Tutti e otto contano per uno solo.

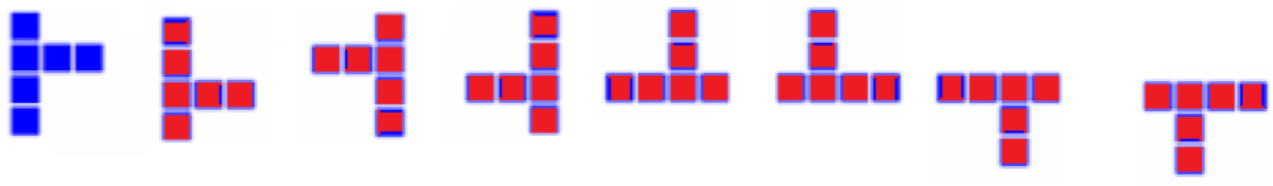


Fig. AI.2

Esempio di otto esamini equivalenti

1. Costruzione dei trentacinque esamini.

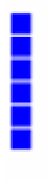
I trentacinque esamini possono essere costruiti come segue:

1) Procedere ordinatamente, stabilendo (ad esempio) una colonna base di sei, cinque, quattro, tre elementi.

2) Aggiungere ordinatamente gli (zero), uno, due , tre elementi, elementi mancanti per totalizzarne sei, prima a sinistra, poi a destra (o viceversa), eliminando gli esamini già trovati (o diversi per riflessioni e rotazioni).

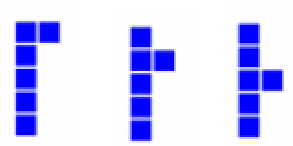
Risultato:

i) Gruppo 0 - Colonna di sei elementi. Un solo esamino possibile.



1

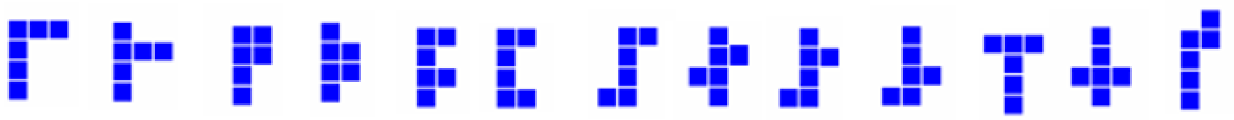
ii) Gruppo 1 - Cinque elementi (tre esamini: facendo scendere di un gradino per volta l'elemento sporgente)



2 3 4

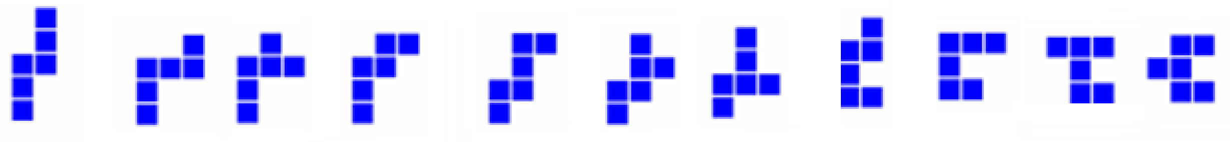
(facendo scendere un ulteriore passo l'elemento sporgente, si riotterrebbe il (3), riflesso in altezza.)

iii) Gruppo 2 - Quattro elementi in fila

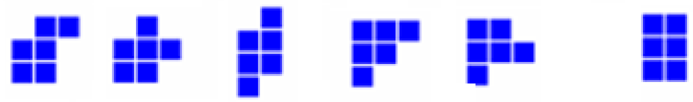


5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

(iv) Gruppo 3 - Tre elementi in fila

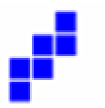


18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28



29 30 31 32 33 34

(v) Gruppo 4 - Due elementi in fila



35

Fig. AI.3

I trentacinque esamini classificati secondo la colonna più lunga.

Una volta costruiti tutti i 35 esamini possibili, resta il problema di dimostrare che solo undici di questi possono rappresentare lo sviluppo di un cubo.

A questo scopo si possono fare le seguenti osservazioni:

(i) Ognuno dei sei elementi diverrà una faccia del cubo, e pertanto lo chiameremo faccia. Essa può essere considerata come un quadrato rigido, che non può essere né tagliato, né piegato né curvato.

(ii) Un cubo ha sei facce, che si possono suddividere in tre coppie di facce opposte. Le facce di una coppia non hanno alcun contatto tra loro (né un lato né un punto in comune), né nel cubo, né, ovviamente, in alcuno degli sviluppi possibili.

(iii) Ogni faccia, nel cubo, ma non nello sviluppo, è in contatto con **tutte** le quattro facce rimanenti. **Nel ricostruire il cubo, tramite piegature, deve poter essere portata in contatto con tutte le quattro facce restanti, ma non può mai essere portata in contatto con la sua opposta.**

(iv) Ricordo che una piegatura può solo avvenire perpendicolarmente alla congiungente dei due centri delle due facce saldate insieme (Fig.3)

(v) Due elementi sono saldati tra loro solo lungo un lato. Essi possono essere ruotati solo usando come cardini le saldature, vecchie e nuove.

(vi) Le saldature esistenti non possono più essere tagliate, mentre nuove saldature possono essere fatte, se le piegature portano due lati di due facce diverse ad essere vicini. Esempio, come formare un vertice di cubo:

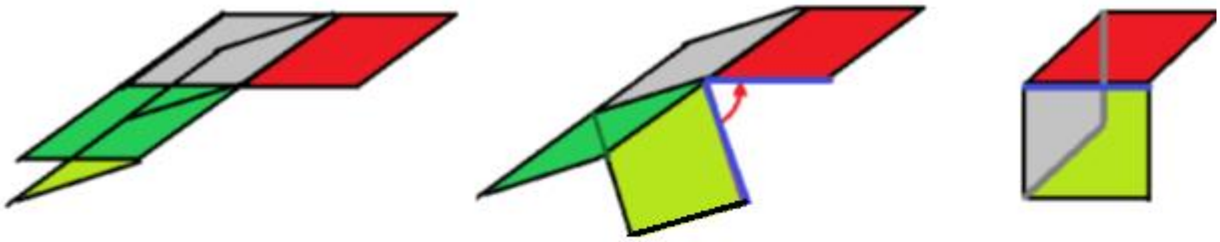


Fig.AI.4

Formarzione del vertice di un cubo da tre facce ad angolo retto con due pieghe e una saldatura. Si noti inoltre che sul piano il quadrato verde tocca quello rosso in un punto, ma con due piegature potrà avere un lato comune con il quadrato rosso.

Ora incominciamo a osservare come possono essere piegati gli esamini. In quanto segue ho fatto l'ipotesi che gli esamini della Fig. AI.3 siano tutti ruotati in modo che la fila più lunga di elementi sia orizzontale.

Ricordo che due facce opposte non possono mai essere contigue (cioè toccarsi lungo un lato o in un vertice). Non solo, ma **una faccia del cubo è solo e sempre separata dalla sua opposta da una sola faccia**. Ciò avviene, perché il cubo ha troppo poche facce. Data una faccia (A), quattro le sono contigue e una (F) non lo è, ma per raggiungerla basta attraversare una delle quattro facce contigue. Non appena si attraversa una faccia contigua (cioè una qualunque selle altre quattro facce, si è ai confini della faccia opposta, F.

Gruppo 0) Non c'è modo di piegare e cucire l'esamino (1) , se non facendo una sorta di anello, senza faccia inferiore e senza faccia superiore.

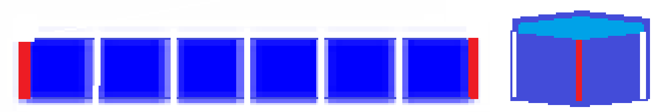


Fig. AI.5

Esamino costituito da una linea di sei elementi. Esso può solo formare un anello.

Gruppo 1) Non c'è modo di piegare in forma di cubo uno degli esamini (2), (3), (4), perché i cinque elementi in fila possono solo essere saldati in forma di anello, e l'elemento sporgente può essere piegato in modo da costituire la faccia superiore o inferiore del cubo, ma non c'è alcuna possibilità di ottenere una faccia che gli sia opposta.

Totale: fin qui, nessun esamino possibile.

Gruppo 2) Degli esamini con quattro elementi in fila possiamo dire che la fila di quattro elementi sarà sempre collegata (niente tagli di saldature esistenti), e delle due facce restanti una dovrà restare connessa ai lati superiori, e una connessa ai lati inferiori Saranno pertanto suscettibili di diventare cubi gli esamini (11), (12) , (13), (14) , (15), (16).

Se si osservano le soluzioni date in Fig.4 negli esempi a,c,e,g,i,m, che corrispondono allo sviluppo a croce latina, si vede che le quattro facce del braccio più lungo della croce sono sempre insieme , nello stesso ordine, e formano un anello di quattro facce su cui si innestano una faccia superiore e una faccia inferiore, opposte.

Tre colori

In effetti, nel cubo esistono solo due possibilità, due facce sono o contigue (con un lato comune) o opposte. Ogni faccia ha una faccia opposta e quattro facce contigue, a due a due opposte fra loro. Se coloriamo ognuna delle TRE coppie di facce opposte con lo stesso colore, tre colori bastano: per noi saranno rosso, blu e bianco.

Due facce opposte, dello stesso colore, non devono allora avere un lato comune, e neppure un vertice comune, perché due facce con un vertice comune possono sempre essere piegate in modo da avere un lato comune, e quindi ricadere nel caso precedente e diventare contigue (Fig.AI.4)

Da quanto detto sopra segue che tre facce disposte in modo da formare un angolo sono contigue fra loro e devono appartenere a tre coppie diverse. Non c'è posto nel quadrante libero per una faccia di colore eguale a una delle altre tre, perché dovrebbe avere almeno un vertice comune con una faccia dello stesso colore. Infine, non c'è posto per una faccia di colore diverso, perché non esiste. Dunque, nessuno sviluppo di cubo possibile può contenere un quadrato di quattro facce contigue (e, ovviamente, neanche un rettangolo di sei facce).

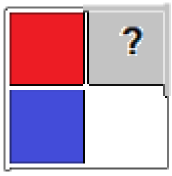


Fig. AI.6

Impossibilità di un quadrato compatto di quattro facce.

Se poi abbiamo una linea di tre o quattro facce, esse possono appartenere solo a due coppie diverse, altrimenti non ci sarebbe modo di saldare una faccia di colore diverso, sopra o sotto la linea, poiché essa le toccherebbe tutte, una volta ripiegate per formare il perimetro del cubo.

Ma la coppia di facce destinate ad essere opposte ha un'altra proprietà: le due facce di una coppia di facce opposte **in una fila** dell'esamino devono essere separate da **una e non più di una** faccia di una diversa coppia. Nel caso in cui ci siano quattro facce allineate, come descritto nella conclusione della discussione (2), le quattro facce si chiudono ad anello e la quarta faccia si dovrebbe saldare alla prima, diventando contigua, e non opposta.

Dunque, se in un esamino compare una fila con tre elementi, il primo e il terzo saranno due facce opposte (stesso colore). Se compare una fila di quattro elementi, il primo e il terzo saranno di un colore, il secondo e il quarto di un secondo colore. Questa legge conferma che un esamino con cinque facce non può esistere, perché la faccia di mezzo deve avere lo stesso colore della prima e della quinta. Avremmo quindi un terzetto di facce differenti e opposte l'una all'altra, ciò che è impossibile.

Riassumendo i 13 esamini con quattro elementi in fila, abbiamo:

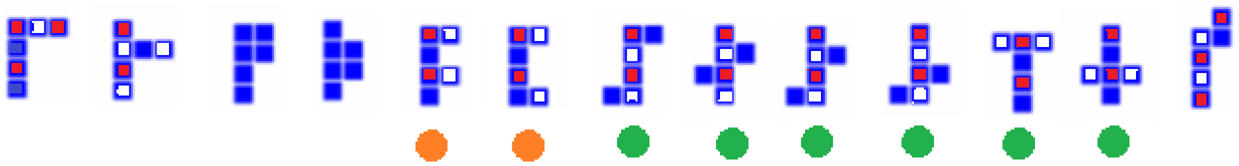


Fig. AI.7

Esamini accettabili (con disco verde), o rifiutabili solo inserendo altri ragionamenti (disco giallo), con colonna di quattro elementi.

I colori delle facce sono obbligati, nel senso che, permutandoli, si otterrebbe lo stesso ordine di colorazione. Il lettore volonteroso può provare a incominciare da due elementi all'estremo di qualsiasi esamino, con due colori diversi da quello da me proposti, e troverebbe di non avere più alcuna scelta. In pratica, dati i due diversi colori delle prime due facce, i colori delle altre facce seguono in modo obbligatorio.

Il primo esamino e il secondo hanno il problema di avere due file di tre facce che si innestano ad angolo retto l'una sull'altra, con una faccia in comune. Questa faccia ha dunque due facce opposte (rosse nel primo caso, bianche nel secondo), e una faccia resta scompagnata, il che non è ammesso.

Il terzo e il quarto esamino hanno quattro facce in quadrato, che è vietato, perché, come si è detto, le quattro facce si toccano tutte fra loro, almeno in un vertice, e occorrerebbero quattro diversi colori per distinguerle.

Il quinto e il sesto esamino soddisfano tutte le regole (disco giallo), e occorre un ragionamento diverso per escluderli. Ora, vediamo che una delle due facce, qui bianche, non può passare sul lato sinistro della colonna di quattro elementi. Questa si chiuderebbe in quadrato (perché non può piegarsi in altro modo), e le due facce bianche potrebbero solo sovrapporsi sulla faccia inferiore o sulla faccia superiore del cubo.

I sei sviluppi successivi sono validi.

Invece l'ultimo esamino, seguendo le regole, non può evitare di avere tre diverse facce dello stesso colore, quindi opposte, ciò che è impossibile.

Totale: sei esamini possibili.

Gruppo 4). File con tre o due elementi al massimo.

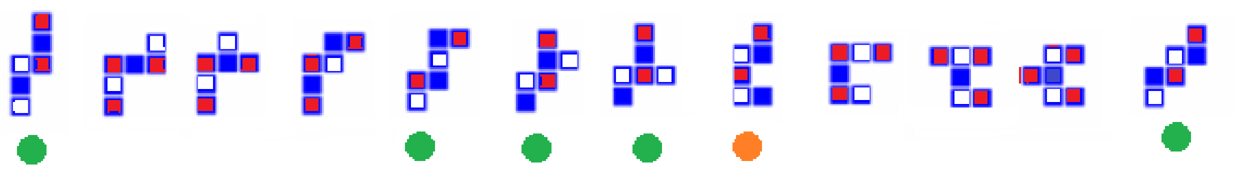


Fig. AI.8

Esamini accettabili secondo le regole (con disco verde), o rifiutabili solo inserendo altri ragionamenti (disco giallo), con colonna di tre elementi.

Il primo esamino segue le regole ed è ammissibile. Il secondo e il terzo non possono evitare di avere tre facce dello stesso colore e quindi opposte, a causa della presenza dei due terzetti perpendicolari che si innestano in una faccia, che quindi ne deve avere due opposte, invece che una.

Il quarto esamino ha lo stesso problema di non poter evitare di avere tre facce dello stesso colore.

Il quinto , il sesto, il settimo esamino sono accettabili.

L'ottavo esamino segue le regole, ma non è accettabile. Perché? Qui il metodo gravitazionale, prendendo come faccia superiore la faccia della coppia rossa al centro del diagramma, viene in nostro soccorso: ricadendo, le due facce blu possono essere portate in contatto mediante piegature legali (qui addirittura sarebbero sovrapposte), ciò che, come si è detto, non deve mai accadere. Ma in questo caso è possibile, perché non c'è una faccia posta fra le due facce blu che lo impedisca,. (Il problema è simile a quello dell'esamino sesto del gruppo precedente.)

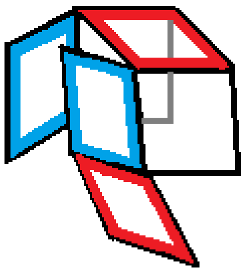


Fig. AI.9

Esamino ottavo in Fig. AI.8, che segue le regole (disco giallo). Come si vede, le due facce blu possono sovrapporsi, e quindi questo esamino, come sviluppo, non è accettabile.

Il nono, decimo e undecimo esamino richiedono sempre tre facce dello stesso colore.

L'ultimo esamino è accettabile..

Totale, cinque sviluppi possibili.

Totale generale, undici sviluppi, (CDD, ma questa non la si può chiamare una dimostrazione).

II. I DADI DA GIOCO.

I dadi da gioco sono un'applicazione (semplificata) di quanto spiegato più sopra. La semplificazione proviene principalmente dal fatto che, data una faccia, conosciamo immediatamente la faccia opposta.

Per maggior precisione, chiameremo "valore" di una faccia il numero di punti che vi compaiono, e "prospettiva" il classico cubo che mostra tre facce, con perimetro che è un esagono (più o meno) regolare:

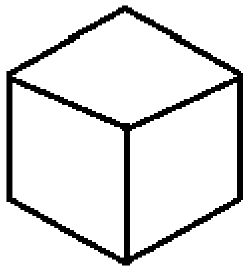


Fig.AII.1

Una "prospettivs", vuota di "valori".

Una regola è ben nota: La somma dei valori che compaiono su due facce opposte è sempre 7. Quindi, se in una prospettiva vediamo due valori la cui somma è sette, vuol dire che la prospettiva è impossibile. D'altronde, da una prospettiva possiamo ricostruire l'intero cubo, perché conosciamo i valori delle facce opposte a ciascuna delle tre facce visibili.

Una seconda regola è meno nota: se le tre facce visibili hanno valori (1,2,3), queste, nella prospettiva di un dado regolare occidentale si susseguono in ordine antiorario. Ciò vale anche per altri terzetti, in particolare per (4,5,6). Non vale però per tutti i terzetti.

Fig. AII.2

I numeri 1,2,3 si susseguono in senso antiorario

Tuttavia, nei testi che si trovano su Wikipedia , non si fa distinzione tra dadi che, pur seguendo queste due regole, sono differenti. In effetti, i valori 2, 3, 6 possono essere orientati ciascuno in due modi, mentre 1,4,5 sono simmetrici. Lo si vede bene osservando il 4 e il 6 nella figura seguente.

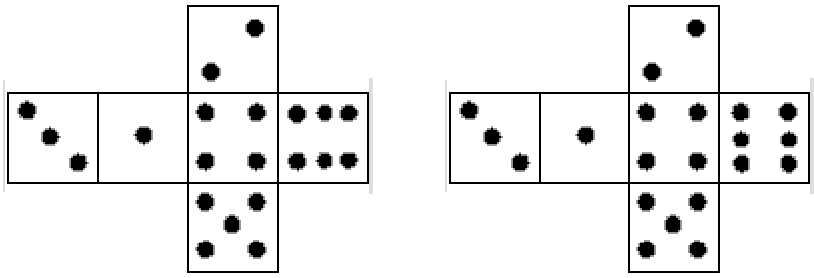


Fig.AII.3

Due dadi "diversi"

In questi due sviluppi, a sinistra il 6 e il 4 sono orientati parallelamente l'uno all'altro e a destra perpendicolarmente l'uno all'altro, e quindi i due dadi non sono eguali. È dunque bene per gli esaminatori assicurarsi che lo sviluppo del dado sia noto a chi esegue il test, e chi esegue il test deve osservare attentamente il diagramma, per non accettare una configurazione impossibile.

Questo è più evidente in quiz più complicati dove le figure sulle varie facce possono essere orientate in quattro modi diversi (è il caso del quiz in prima pagina). Tuttavia, in questo caso, il metodo che ho indicato, di "appendere" lo sviluppo del cubo per la faccia superiore della prospettiva proposta, e sfruttare (idealmente) la gravità, dà sempre i risultati corretti.