Percentuali relative dei numeri trascendenti, algebrici, razionali e naturali.

Risposta a una domanda comparsa su Quora:

Si può fare una dichiarazione percentuale sulla distribuzione dei numeri interi, razionali, algebrici e trascendentali?

Risposta per matematici ciclisti che vogliono imparare a andare in moto.

Vedo che in data odierna chi ha fatto la domanda ha già ricevuto due risposte: la prima afferma che la domanda non ha senso perché "*L'insieme dei numeri algebrici è numerabile, quello dei numeri* ***trascendenti*** *(non si chiamano trascendentali) è non numerabile*", la seconda che "*Se esistesse un modo per scegliere un numero reale con una distribuzione uniforme, sarebbe al 100% un numero trascendente*", e quindi la percentuale di numeri non trascendenti, che possiamo chiamare algebrici (come vedremo, se non è già di per sé ovvio, dell'insieme dei numeri algebrici fanno parte i numeri interi e i numeri razionali) **è zero**.

Se il lettore si accontenta di un sì o di un no, le risposte ricevute dovrebbero essere sufficienti, perché dicono più o meno la stessa cosa, vista da due punti di vista diversi. Se si vuole qualche spiegazione in più, allora posso provare a contribuire con i chiarimenti che mi sembrano opportuni, e il lettore può continuare a leggere. Ho notato che la locuzione usata nella domanda , di "numeri trascendentali" traduce letteralmente l'inglese "transcendental number". Ne deduco che chi ha posto la domanda ha tradotto una domanda scritta in inglese e probabilmente conosce già la risposta. Non sono affari miei: si avverta solo che, poiché il mio saggio è destinato a matematici "ciclisti", cioè un po' più che pedoni, il metodo che seguirò non sarà rigoroso, ma più o meno euristico, e la terminologia che utilizzerò sarà quella che si usava quando io ero all'università, circa cinquanta anni fa.

1. Che significa la domanda?

Si richiede una "dichiarazione percentuale sulla distribuzione dei numeri interi, razionali, algebrici e trascendentali". Dato che in ogni caso si tratta di insiemi infiniti, non ha senso dire che i numeri naturali sono, diciamo, il due per cento dei numeri razionali. Su un segmento campione lungo dieci unità i numeri naturali sono dieci, mentre i numeri razionali sono infiniti. Ma ha realmente senso calcolare la percentuale (10/infinito =0)? Il segmento (1,10) non è di lunghezza infinita, *ed è peculiarità degli insiemi infiniti che il tutto può avere lo stesso numero di elementi di una sua parte*. Nonostante ciò, si può tuttavia tentare di calcolare una sorta di percentuale su un limitato intervallo di numeri e assumere che valga in generale, come tenterò di fare più oltre.

Osservazione: i numeri razionali e naturali sono numeri algebrici.

Si veda il diagramma di Venn seguente: per incominciare affermo che la domanda può essere ridotta ad una più semplice: "Qual è la distribuzione percentuale dei numeri **algebric**i e **trascendenti?"**

In effetti:

- un numero **razionale** è il rapporto di due numeri interi, e i **numeri interi** m, a parte eventuali fattori comuni che si semplificheranno, sono il rapporto fra un numero intero m e il numero intero 1.
- I numeri algebrici sono le radici di equazioni polinomiali di grado n *finito* **con coefficienti razionali.** Ma una equazione con un numero finito di coefficienti razionali (cioè frazioni) può essere trasformata in un'equazione a coefficienti interi, moltiplicandola per il minimo comun denominatore dei coefficienti. Che ne venga un minimo comun denominatore enorme, poco importa.

  Questo vuol dire che **i numeri algebrici includono i numeri razionali** (e a maggior ragione i numeri interi), in quanto i numeri razionali, ad esempio $x = a/b$, sono la soluzione di un'equazione di primo grado (n=1) , in questo caso $a\,x + b = 0$. In altre parole, un numero razionale è l'esempio più semplice di numero algebrico.

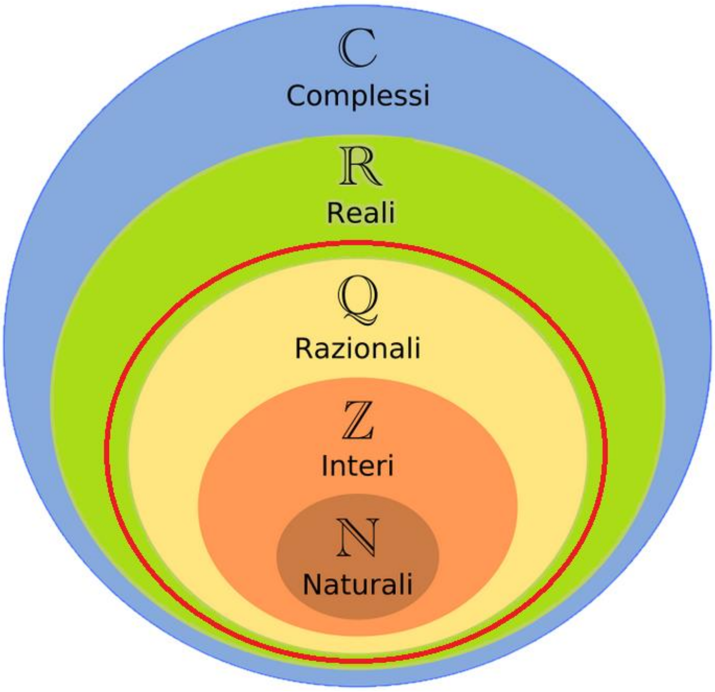
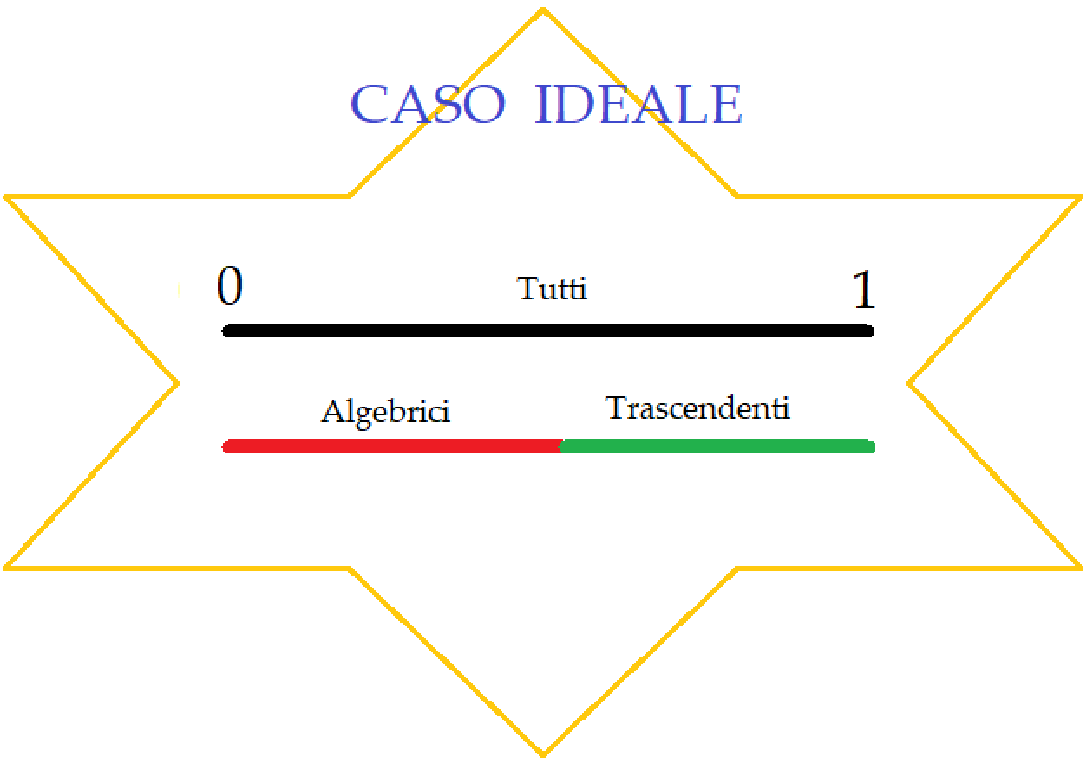


Diagramma di Venn degli insiemi dei vari tipi di numeri. L'ellisse rossa (solo contorno) include i numeri algebrici, in generale irrazionali. Essi comprendono i numeri razionali, in quanto soluzioni *di equazioni algebriche, ma hanno con essi in comune anche un'altra più importante proprietà.*

Interpretazione della domanda:

La mia interpretazione è come segue. Si prenda un segmento di retta (0,1). Questo segmento è costituito da infiniti punti. Per quanto ogni punto sia privo di dimensioni, in particolare longitudinali, nondimeno tutti insieme essi a prima vista coprono con continuità l'intero segmento. Non esiste lente di ingrandimento che possa rivelare dei buchi. Supponiamo di poter prendere con una magica pinzetta tutti i punti che hanno coordinata x algebrica e di metterli insieme. Nel **caso ideale** essi comporranno una porzione del segmento (0,1). ***Il rapporto tra la lunghezza di questo segmento e la lunghezza totale (=1) ci darà la percentuale di numeri algebrici tra 0 e1.***



A questo punto noi non conosciamo veramente la percentuale dei numeri algebrici, che riempiono il tratto rosso, rispetto a quella dei numeri trascendenti. A occhio e croce si conoscono e si sanno costruire molti più numeri algebrici che trascendenti, nel senso che non si riesce a dimostrare che un'assai maggiore infinità di numeri sospettati come trascendenti lo sono di fatto. Per stare dalla parte dei bottoni, assegno il cinquanta per cento agli uni e agli altri. Poi vedremo di quanto avrò sbagliato. In un secondo tempo, per completare la risposta, vedremo quanto sia lungo il segmento dei numeri **razionali** (parte del segmento rosso) e quanto il segmento dei numeri **naturali** (parte del segmento dei numeri razionali).

2. Primo risultato: I numeri algebrici formano un insieme numerabile.

I numeri algebrici sono infiniti, su questo non c'è dubbio. Ma lo sono anche i numeri razionali e, ciò che più importa, i numeri naturali. Se possiamo stabilire una corrispondenza tra i numeri algebrici (che includono i numeri razionali) e i numeri naturali, tale che a ogni numero algebrico corrisponda uno e un solo numero naturale (tale corrispondenza è detta *"biunivoca"* – un nome come un altro), allora dirò che i numeri algebrici formano un insieme numerabile. Si noti bene che nessuno ha parlato di un ordine in questo insieme. Non ci importa se ci sia un numero algebrico più piccolo di tutti e se gli altri siano in ordine di grandezza crescente o decrescente, ci importa solo che ogni numero algebrico possa essere in qualche modo identificato e associato a un numero naturale. Come si fa a enumerare i numeri algebrici?

Già si è detto che i numeri algebrici sono le radici di equazioni polinomiali di grado **n** *finito* **con coefficienti razionali.** Ma una equazione con un numero finito di coefficienti razionali (cioè frazioni) può essere trasformata in un'equazione a coefficienti interi, moltiplicandola per il minimo comun denominatore dei coefficienti. Che ne venga un minimo comun denominatore enorme, poco importa.
Abbiamo dunque preso un'equazione algebrica a coefficienti razionali, e l'abbiamo ridotta a un'equazione a coefficienti interi con le stesse soluzioni. I coefficienti possono essere negativi o positivi, ma si tratta di un problema secondario. Ora, possiamo assegnare a ogni equazione una determinata **altezza**, che è un **intero, data dalla somma del grado dell'equazione e dei *moduli* dei coefficienti.**

Ad ogni altezza, (che è un numero intero!), corrisponde un numero finito di equazioni. Per esempio, si prenda l'altezza 3.

Essa può corrispondere alle equazioni della seguente tabella:

n	a_0	a_1	Equazione
1	1	1	x+1=0
1	-1	1	x-1=0
1	1	-1	-x+1=0
1	0	2	2x=0
1	0	-2	-2x=0
2	0	1	x^2 =0
2	0	-1	-x^2 = 0

Procedendo, si vede che il numero di equazioni che corrispondono a una stessa altezza aumenta vertiginosamente, ma rimane un numero finito.

Le altezze, per conto loro, sono tutti i numeri interi da 1 a infinito. E quindi sono numerabili. Le equazioni che corrispondono ad ogni altezza sono anche numerabili e in numero finito**. Quindi tutte le equazioni algebriche sono numerabili**.

Le loro **soluzioni, cioè i numeri algebrici**, sono pure numerabili, perché ce ne sono non più di n per ogni equazione algebrica di grado n.

Dunque i numeri algebrici sono numerabili.

3. L'insieme dei numeri algebrici, essendo numerabile, è un "insieme nullo".

Vogliamo ora pensare di misurare la lunghezza totale dell'intervallo in cui, con le magiche pinzette, avremo compattato tutti i numeri algebrici. Per incominciare metteremo un intervallino di lunghezza δ sopra al punto con coordinata x algebrica a cui avremo assegnato il primo posto. Naturalmente, il punto non ha una lunghezza, e in un secondo tempo dovremo pensare a ridurre il nostro δ per tener conto di questo fatto. Veramente, non sarebbe neppure necessario compattare i punti algebrici tutti insieme, ma mi sembra che in questo modo l'idea venga resa meglio. Sul secondo punto mettiamo un intervallino di lunghezza $\delta/2$, sul terzo uno di lunghezza $\delta/4$. E via dicendo, sempre dimezzando fino all'infinito. Qual è la lunghezza totale? Essa è data dalla somma $S= \delta\ (1 + ½ + 1/ (2^2)+ 1(2^3)….)$ cioè la serie geometrica cara ai matematici fin dai tempi di Zenone, Achille, e Tartaruga. In particolare questa serie geometrica vale $\boldsymbol{\delta(1/(1-1/2)) = 2\delta}$. Quindi tutti gli elementi di un insieme *numerabile come l'insieme dei numeri algebrici* possono essere coperti da un unico cappellino o intervallino lungo 2δ. Ma la lunghezza δ può (anzi deve) esser resa piccola a piacere, perché eravamo partiti dal concetto che essa copriva un unico punto, che non ha dimensioni lineari. Quindi dobbiamo far tendere δ a zero, e il totale 2δ tenderà ancora a zero. Di conseguenza, la lunghezza dell'intervallo che "ricopre" **qualsiasi insieme numerabile** tende a zero. *Un tale insieme è detto "nullo", e l'insieme dei numeri algebrici è un insieme nullo.*

CASO REALE

All'estrema sinistra della linea verde in figura ho segnato un **punto** rosso, di estensione zero: lì si trovano tutti i numeri algebrici, razionali e interi. Lascio al lettore volonteroso il compito, non arduo, di calcolare la percentuale delle varie componenti sul totale.

In effetti, l'aver dimostrato che l'insieme dei numeri algebrici è un insieme nullo**, impone che il segmento (0,1) sia nella quasi totalità costituito da numeri che appartengono a un altro tipo di insieme, che non è numerabile, perché, se fosse numerabile, la lunghezza del segmento totale, che era 1, collasserebbe a zero.**

A questo nuovo tipo di insieme, a fine Ottocento il Cantor diede il nome di insieme **"continuo".** Egli fece di più, costruì un'intera teoria, la teoria dei numeri transfiniti, a cui rimando il volonteroso lettore, che sappia già andare in moto (https://it.wikipedia.org/wiki/Numero_transfinito, specialmente la versione inglese, e i vari richiami).

4. Conclusione

Ora, se tutti i numeri algebrici formano un insieme nullo, ciò vuol dire che la probabilità di centrare a caso un numero algebrico (ivi inclusi i numeri irrrazionali e quelli interi) tende a 0, e quella di centrare un numero trascendente tende a 1. E questa è la mia risposta alla domanda posta su Quora.

In quel "tende" sta uno spiraglio di salvezza da un risultato vagamente paradossale: il genere umano, di vita breve, in un universo eterno, ma in cui "presto" (rispetto all'eternità) non ci dovrebbe essere più posto per forme di vita razionale, può solo operare con numeri razionali (o razionalizzati, perché troncati ad un certo nuero di cifre) e, finora, conosce solo un'infima minoranza di numeri di cui sa che sono trascendenti (3), mentre la probabilità di imbattersi a caso in un numero trascendente è a tutti gli effetti pratici del 100%. Se non è paradossale questo risultato!

APPENDICE: ALCUNI NUMERI TRASCENDENTI (o quasi)

Costruire numeri irrazionali algebrici non è impossibile: si tratta di soluzioni di equazioni algebriche. Tuttavia, costruire un numero irrazionale algebrico non è lo stesso che avere un criterio per decidere se un numero *che non abbiamo costruito noi* sia irrazionale e algebrico. Il problema con questi ragionamenti è che noi, imbattendoci in un numero "sospetto", con molte cifre decimali e senza un periodo apparente, all'oscuro di come sia stato ricavato, non abbiamo molti mezzi per verificare se il numero sia irrazionale e ancora meno ne abbiamo per decidere se sia trascendente o algebrico, a meno che riusciamo a ridurre il numero in esame a qualche combinazione dei pochi numeri trascendenti che conosciamo. I ragionamenti ci dicono che i numeri irrazionali esistono e sono moltissimi, molti più dei numeri razionali, ma non ci assicurano che alcuno dei numeri che noi ricaviamo dai nostri calcoli sia trascendente. Un caso famoso è quello della costante di

Euler-Mascheroni, nota dai tempi di Euler, che l'introdusse, la quale, per quel che ne sappiamo, potrebbe addirittura essere un numero razionale. Altri numeri la cui trascendenza è sorprendentemente dubbia sono $\pi + e, \pi - e, \pi e, \pi/e, \pi^\pi, e^e, \pi^e, \pi^{\sqrt{2}}, e^{\pi^2}$. Ma se *Pi^e* è di incerta trascendenza, *e ^Pi* invece è certamente trascendente (1).

Esistono alcune costanti di cui sappiamo che sono trascendenti e alcuni metodi che permettono di costruire numeri trascendenti a colpo sicuro. Il primo tra questi metodi fu quello di Liouville (1844), il quale però produce numeri di forma assai peculiare (2). Quindi non potremmo applicarlo alla domanda alla quale sto rispondendo. Viceversa, il cosiddetto Teorema di Gelfond- Schneider (1934) (3) stabilisce la trascendenza di una classe abbastanza ampia di numeri, e permette di costruirne a volontà.
Non esiste invece, che io sappia, alcun modo di produrre un numero a caso e di verificarne la trascendenza. E questo è un risultato paradossale, perché, come è già stato risposto, la probabilità P di centrare un numero trascendente sarebbe P=1.

NOTE ALL'APPENDICE

(1) Questo credo valga la pena dimostrarlo sulla base del menzionato teorema di **Gelfond-Schneider**, che afferma che "***se a e b sono numeri algebrici e a non è né 0 né 1, e b non è razionale, allora tutti i valori di a^b sono trascendenti***". Si scrive "tutti i valori" perché a^b può avere più di un valore, in quanto a^b = exp(b log a) e loga è una funzione definita a meno di multipli interi di 2πi. Nel caso di Exp (Pi) non sembra che il teorema si applichi. Si applica però se si scrive:

$$e^{\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^{-i} = (-1)^{-i}$$

Qui, però, -1 è un numero algebrico diverso da 0 e da 1 (soluzione di x+1=0), -i non è razionale, ma è algebrico (soluzione di x^2+1=0), e quindi, per il teorema di GS exp (Pi) è trascendente. ***Il trucco non riesce con π^e .***

(2) Aspetto dei numeri di Liouville:

$$x = (0.a_1 a_2 000 a_3 00000000000000000 a_4 0000000000000000000000 \ldots\ldots$$

In cui ogni numero a(n) diverso da zero è separato dal successivo per mezzo di nn!-1 zeri. Per incominciare si puè dire che è irrazionale, in quanto è illimitato e aperiodico. Per la dimostrazione che è anche trascendente, si veda per esempio
https://it.wikipedia.org/wiki/Numero_di_Liouville#Trascendenza

La dimostrazione è indiretta, nel senso che si dimostra che un numero di Liouville, che è irrazionale, non è algebrico, e quindi è trascendente.