COME POTREBBE ESSERE L'ARITMETICA

SE ESISTESSERO SOLO I NUMERI 0, 1, 2, 3, 4?

Risporta a una domanda compars su Quora, a cui risposi il 30 dicembre 2020.
Come sarebbe la matematica se esistessero solo dieci numeri?

(La prima cosa da dire è che una matematica o una aritmetica – anzi, più d'una - con pochi numeri è possibile. Per dare un esempio semplice, come si vedrà, nella mia risposta mi sono limitato a cinque numeri, ma penso che i concetti fondamentali siano gli stessi e l'esposizione sia semplificata. Il vantaggio è che le tavole esplicative diventano quattro volte più semplici e non presentano una complicazione - la presenza di "divisori dello zero" - che secondo me non è necessaria al mio livello, elementare).

Ci sono vari modi di interpretare la domanda "se esistessero solo dieci numeri".

Immagino che non si intenda "se esistessero solo dieci cifre", perché la nostra matematica usa appunto solo dieci cifre, a parte una quantità ancor più numerosa di simboli, e non sente la necessità insopprimibile di aggiungere altre cifre.

La domanda sembra invece assumere per vera l'ipotesi "platonica" che i numeri siano entità oggettive di cui noi abbiamo solo una pallida idea, da "schiavo nella caverna". Gli archetipi sono nell'iperurano, e allora si può immaginare un iperurano in cui ci siano solo dieci numeri. Il passo è breve, di qui alla domanda, sovente presentata in diversi modi: "I numeri hanno una loro esistenza oggettiva, o li abbiamo creati noi?". Preferisco non addentrarmi ora in queste speculazioni e mi limito a sviluppare un tema diverso, anche se quasi identico, e capace di aggirare quest'ultima domanda: "Come sarebbe la matematica se PER NOI esistessero solo dieci numeri?".

Ancora una volta la domanda può essere interpretata in due maniere:
(i) (Scienza) Possiamo costruire una matematica in cui esistano solo dieci numeri, pur sapendo che i numeri naturali (da cui discende tutti il resto) sono infiniti, e quindi utilizzando per analizzarla il bagaglio esistente di matematiche superiori?
(ii) (Fantascienza) Come sarebbe la matematica se non potessimo avere cognizione dell'esistenza di altri numeri oltre al dieci?

(i) Scienza. Alla domanda nel senso (i) la risposta è già stata data altrove su Quora. Suggerisco di dare un'occhiata a Wikipedia, alla voce "**Campo finito**" (o meglio, in inglese *Finite fields*, o altre lingue che evidentemente si rivolgono a un pubblico più interessato. Si può trovare anche il termine "Aritmetica finita" (*Finite (field) arithmetic*, soggetto affine). Troviamo però persino in italiano: *"In matematica, in particolare in algebra, un campo finito (detto a volte anche campo di Galois) è un campo che contiene un numero finito di elementi. I campi finiti sono importanti in teoria dei numeri, geometria algebrica, teoria di Galois,* *in crittografia e in teoria dei codici. I campi finiti sono completamente classificati."* Inevitabilmente, dunque, la domanda se si possa considerare un'aritmetica con un numero finito di numeri, è già stata considerata da un secolo e mezzo, e una risposta è stata data nelle sue linee generali. L'ultima frase, poi, che i campi finiti sono già stati completamente classificati, significa che non si può inventare qualche campo nuovo che non possa essere ridotto a una delle forme già classificate. Ma - oh sorpresa! - il problema è che per essere un campo, un insieme di elementi deve soddisfare a determinate regole. Mentre esistono altri settori della matematica che hanno un numero finito di elementi - pur non essendo campi - i campi "finiti" possono avere solo un numero di elementi $N = p^n$, dove p è un numero primo e n è un qualsiasi numero naturale. Quindi , siccome il numero 10 di cui si parla nella domanda non è la potenza di un numero primo, ma il prodotto di due numeri primi, rispettivamente 2 e 5, "*non esistono campi finiti con dieci elementi*". Ciò limita molto le possibilità dell'aritmetica che può essere costruita con dieci numeri. Tuttavia esistono *sistemi modulari* (come quello materializzato nel quadrante di un orologio e spiegato in altra risposta) i quali hanno dodici elementi, e hanno la loro utilità, per quanto dodici non sia esprimibile come potenza di un numero primo. Ma va anche detto che l'esempio dell'orologio presuppone l'esistenza di numeri anche assai maggiori di 12, e quindi entra solo fino a un certo punto tra le risposte alla domanda a cui intendo rispondere io.

Qui il curioso potrebbe domandarsi che cosa ci impedisca di inventare un campo finito con dieci elementi. La risposta è appunto che un campo non è un insieme qualsiasi di N elementi: esso deve soddisfare determinati assiomi aritmetici stabiliti una volta per tutte. Per esempio, una cruciale conseguenza di questi assiomi è che lo zero non deve avere divisori. Un divisore dello zero renderebbe talune operazioni impossibili, e uno dei requisiti di un campo è che in esso siano possibili le quattro operazioni.

Ad abundantiam aggiungo che, oltre ad infinite aritmetiche con un numero finito di numeri, si possono considerare anche geometrie con un numero finito di punti. Anche qui, il numero di punti non è del tutto libero: la più piccola geometria piana "affine" richiede 4 punti, mentre la più piccola geometria piana "proiettiva" richiede 7 punti (si veda, in questo sito: Maglie e squadre di calcio (dainoequinoziale.it))

Qui il curioso può chiedersi che cosa ci impedisca di costruire un piano proiettivo con, diciamo, quattro punti. La risposta è la stessa data più sopra. Un piano proiettivo costituito da quattro punti non può rispettare tutti gli assiomi della geometria proiettiva.

(ii) Fantascienza. Mentre i Greci spingevano la geometria a forme d'arte e gli Indù si cimentavano con numeri immensi, c'erano culture primitive che avevano un bagaglio di numeri assai più ridotto, ma proprio nel senso che non li potevano concepire. Secondo E.M. Curr, che scriveva intorno al 1880, la maggioranza delle tribù di aborigeni australiani contava con le mani. Però, trascurando il vantaggio di avere cinque dita, queste tribù si erano limitate a considerare le due mani, e avevano quindi un sistema binario. Buffo che non avessero, a quel che pare, un sistema di riporto. Per cui supponiamo che un bianco dovesse consegnare cinque coltelli in cambio di non so quante pelli di canguro, e invece ne consegnasse solo tre, gli aborigeni non se ne sarebbero accorti.

Per chi ama le esperienze forti, e desidera veramente sapere "come sarebbe – potrebbe essere - la matematica se esistessero solo dieci numeri", metto in appendice un breve (o troppo lungo) dialogo in cui si analizza a livello elementare un campo di cinque numeri, 0,1,2,3,4. ***Il dialogo è direttamente ispirato dal capo XIII del testo Prelude to Mathematics, di W.W. Sawyer, per me princeps dei divulgatori di matematica.*** Ma è in appendice: Estranei astenersi.

A proposito: il dialogo avviene fra corvi della specie Corvus Corax, o corvo imperiale, in una delle poche regioni dell'Italia da loro predilette, in questo caso la Sardegna.

APPENDICE I.

L'ARITMETICA LIMITATA AI NUMERI 0, 1, 2, 3, 4.
(INTRODUZIONE)

DIALOGO TRA CORVI IMPERIALI.

Fig.1
Ritratto di Prof (Corvus Corax o corvo imperiale)

Si dice che alcune specie, come il corvo imperiale, contino fino a otto. Nel mio dialogo li farò contare, solo fino a quattro. Basta che io non mi faccia vedere in Sardegna, perché nel resto d'Italia non ci sono molti corvi imperiali.

Il dialogo si svolge su certe rocce piatte dietro la villa Sant'Elia della nobile città di A*. I personaggi sono anzitutto Prof, il corvo che insegna matematica. Ci vede benissimo, ma porta un paio di occhiali con la montatura dorata, che ha rubato a un turista tedesco, pur non avendo capito a cosa servano. Ritiene che diano un senso di prestigio, anche se li deve mettere molto avanti sul becco, perché non gli confondano la vista. Gli altri personaggi sono quattro scolaretti corvi: Grip (deve essere di famiglia inglese), Rav (forse americano), Cracrà, Pennino (il più giovane e sveglio). Su quelle rocce piatte, precedenti generazioni di corvi hanno scavato dei buchi, quelli che gli archeologi chiamano coppelle, cercando di metterli in un reticolo 6 x 6. Sono dei segnaposto: noi usiamo una tavola a scacchiera, ma non c'è nessuna differenza. D'altra parte, senza pollice opponibile, i corvi non sono forti nei lavori manuali. Ma non vi fidate troppo, il becco non scherza. Io cercherò di schematizzare le loro tavole, che sono solo due e vedremo a suo luogo. Le coppellazioni scavate sulle rocce ispirarono a dotti archeologi controversie senza fine: chi parlava di coppellazioni fatte dai Baschi, chi dai Sumeri e chi dai costruttori di nuraghi. Qualcuno vi vide la mano di alieni. Nessuno degli studiosi sospettò mai i veri autori, che li guardavano dalle rocce sovrastanti sogghignando sotto i baffi (I corvi hanno certi peli alla base del becco, che potrebbero essere chiamati baffi. Certo i corvi li usano per sogghignare.)

Fig.2
Esempio di tavola usata dai Corvi

Primo giorno: Addizione (ripasso).

PROF: Buongiorno, piccini.

ALLIEVI: Buongiorno, Prof.

P. :Avete portato i gettoni? (Alle lezioni si usavano fave per riprodurre i numeri, che alla fine il Prof si pappava come onorario. I corvi sono ghiotti di fave, ma il Prof, per non sembrare un goloso, le chiamava gettoni).

A. Sì , Prof.

P.: Benissimo. Oggi vi insegnerò un gioco nuovo, con cui potremo sfidare i corvi dei paesi dell'interno. He he. Quello che più importa, cari piccini, è la coerenza. Noi possiamo giocare con fave, bacche, legumi e pietruzze quanto vogliamo. Ma comunque facciamo i conti, i risultati devono essere gli stessi. Se prendete due gettoni e aggiungete due gettoni, quanti ne ottenete?

Quattro, Prof, risposero in coro gli scolaretti.

P: Esatto. Ma, se invece scomponete i gettoni in (1+1) +(1+1)?

Allievi: Ancora quattro, Prof (risposero un paio di scolaretti).

Prof: Benissimo. Ora io vi insegnerò le regole del gioco e voi, come compito a casa, dovrete verificarne la coerenza, che per noi, per incominciare, significa che comunque eseguiamo le operazioni, i risultati devono essere gli stessi. Dunque, per prima cosa ripassiamo l'operazione che abbiamo chiamato ADDIZIONE e poi vi insegnerò una nuova operazione.

Grip: Ma scusi, Prof. Già abbiamo faticato per imparare l'addizione. Adesso ci vuole insegnare un'altra operazione?

Prof: Avete faticato per l'addizione? Quanti hanno faticato? (Tutti, escluso Pennino, alzarono la zampina destra.) Ma se è semplicissima! Su, ricostruiamo la tavola.

Ci sono molti modi per costruire la tavola. Per esempio si può partire dalle righe. Sopra la barra di divisione abbiamo 0,1,2,3,4, che chiameremo la "riga guida". La colonna a sinistra della barra verticale la chiameremo "colonna guida". Mettiamo in colonna 0,1,2,3,4.

Nella riga che chiameremo 0, dal numero di gettoni nella coppella corrispondente della nella colonna guida, non facciamo altro che riscrivere 0,1,2,3,4. Se ci pensate, è il risultato di aggiungere 0,1,2,3,4 a una riga 0,0,0,0,0.

Poi nella riga sottostante alla riga 0, che chiameremo riga "1" dal numero in colonna guida, riscriviamo 0,1,2,3,4. Ma siamo solo a metà del compito: adesso aggiungiamo in ogni coppella i gettoni che sono nella coppella della colonna guida, in questo caso uno solo. Troviamo così 1,2,3,…

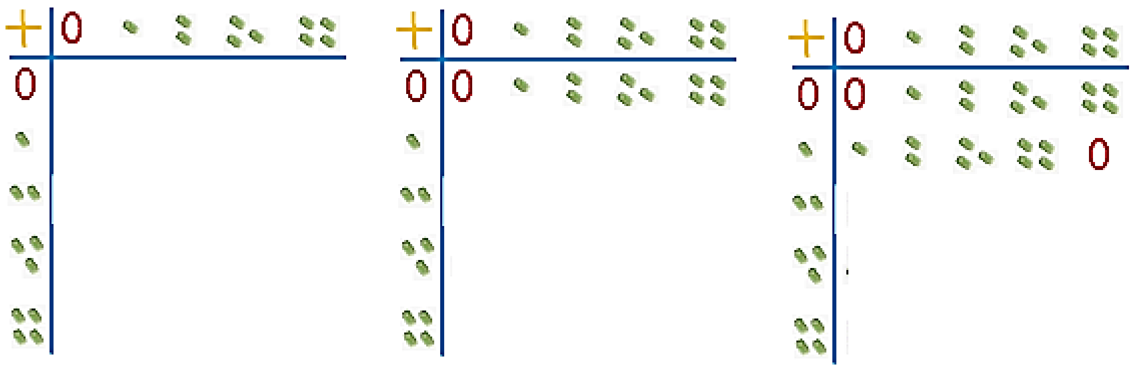

Fig.3

Prime fasi della costruzione della Tavola di Addizione.

Pennino: Ma scusi , Prof. Non ci ha detto che cosa succede quando aggiungiamo 1 a 4, nell'ultima colonna, seconda riga. Perché ha scritto che fa zero, vuoto?

Prof: Bravo, Pennino. Questa è la domanda chiave. Tu, che cosa ci metteresti?

Pennino: Io metterei il gettone insieme agli altri.

Prof: E che numero otterresti?

Pennino: Non lo so. Io non so che cosa ci sia dopo il quattro.

Prof: Neanch'io, mio caro. Nessun corvo lo sa.

Però, supponiamo che degli umani cattivi non ci permettano di servirci delle loro coliegie. Costruiscono una casetta di cui non possiamo vedere l'interno, e noi vediamo che ci entrano degli umani armati di fucile. Che cosa fate voi?

Grip: Io conto gli umani che entrano. Per esempio uno, due. Aspetto pazientemente. Gli umani dopo un poco si stufano e escono. Conto quelli che escono: uno, due. A questo punto sono andati tutti a casa e posso entrare nel frutteto a mangiare le mie ciliegie.

Prof: Bravo Grip. E faresti così per qualsiasi gruppo di umani?

Grip: Certo. Magari devo contare fino a quattro: uno, due, tre, quattro. Poi aspetterei come prima, conterei fino a quattro. Quando il quarto esce, entro nel frutteto a mangiare le mie ciliegie.

Prof. Vedi dunque, Grip, che per te non ci sono altri umani oltre a quattro. Zero. Quindi conti: uno, due, tre, quattro, zero, come ho fatto io mettendo zero come valore di quattro +1. (Qui Prof divenne pensieroso.) Eppure, sappiamo per amara esperienza che qualche volta, dopo che sono usciti quattro uomini, ne può essere restato ancora qualcuno, e ti spara, e addio Grip.

Grip: magari ho contato male, o non ne ho visto entrare uno. Può capitare.

Prof: Non necessariamente. Tu potresti non aver fatto un errore di aritmentica, ma di inesperienza, considerando che quattro è il massimo di umani che possono essere in un gruppo. L'esperienza ci insegna che non è così.

Grip, Rav, Cracra, Pennino: Ma allora, a cosa serve la nostra aritmetica, se ci può far ammazzare?

Prof: Possiamo concludere che la nostra matematica non è *"la lingua in cui è scritto il grandissimo libro dell'universo"* (he he he) come quella degli umani, anche se ha qualche applicazione pratica. Per noi è essenzialmente un gioco. **Ma quando logica e natura differiscono, se vogliamo stare al gioco dobbiamo seguire la logica, non la natura**. Altrimenti giochiamo a qualcos'altro.

Pennino: Quindi nel nostro gioco il cacciatore che viene dopo il quarto non esiste? Vuol dire che 4 +1 non esiste?

Prof (battendo le ali): Risposta esatta! Se noi supponiamo di eliminare tutti i gruppi 4 +1 e sostituirli col *vuoto, che almeno è un numero che conosciamo già*, abbiamo la nostra regola. Per noi, quattro più uno in certi casi significa "molti" cioè "infiniti" gettoni, ma per i nostri calcoli, *è meglio usare un numero che già conosciamo*, il vuoto, che alcuni chiamano anche ***zero***.

Adesso vi faccio una domanda più difficile. Supponi di aver messo quattro gettoni in una scatolina e di aggiungerne due. Quanto fa quattro gettoni più due?

(Gli allievi si guardano la punta delle zampe imbarazzati).

Pennino: Uno!

Prof: Sei proprio bravo. Come hai fatto?

Pennino: Ne ho aggiunti due. Però, come abbiamo detto prima, li ho aggiunti uno per volta: 4 + 2 deve essere eguale a 4 +1+1. Prima faccio 4+1 = 0 e mi mangio i quattro più uno gettoni. Lascio il vuoto. E poi aggiungo l'ultimo gettone. Totale: 4+2 =1.

Prof:…che è un altro numero che conosciamo! Allora possiamo fare la nostra tavola (la fa assai rapidamente). Notate che possiamo costruire ogni riga in almeno due modi:

Primo modo: sommando il numero guida a sinistra della riga vuota a tutti i numeri guida delle colonne, colonna per colonna. Secondo modo: aggiungendo **un gettone** a quelli posti nella stessa colonna, nella riga precedente. Coerenza! Coerenza! (il Prof completa rapidamente la tavola).

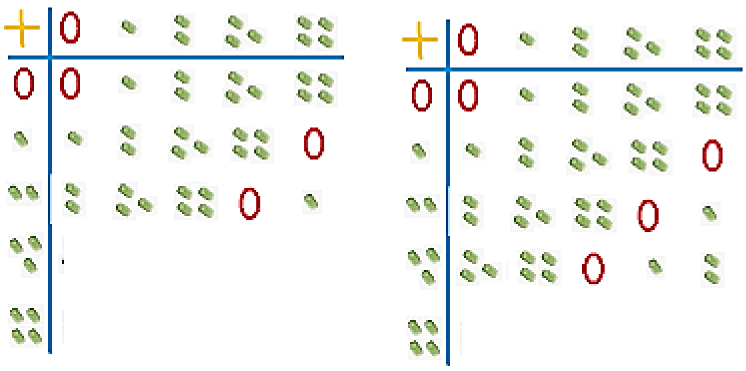

Fig. 4a:

Fig.4. I passi successivi nella costruzione della tavola. (Il lettore avvertito, senza passare attraverso i gettoni del Prof, potrà arrivare agli stessi risultati in aritmetica "Modulo 5". Cioè, farà le addizioni alla nostra maniera, ma lascerà nella tavola solo il **resto della divisione per cinque** - Nota del Traduttore)

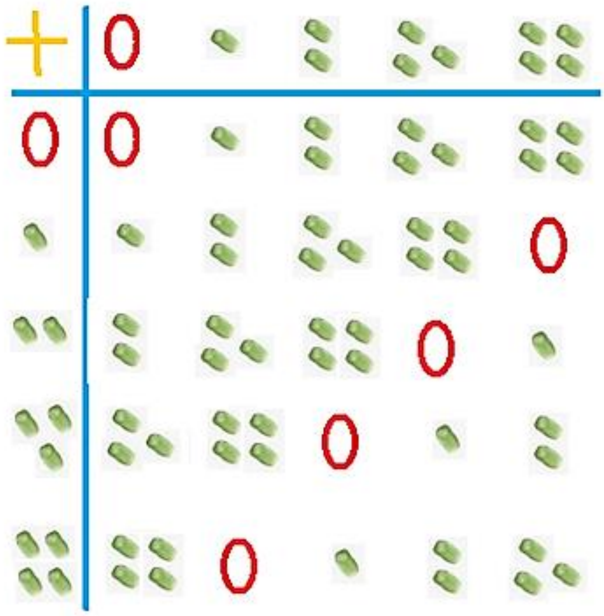

Fig.4
Tavola dell'Addizione completa.
(Il lettore avvertito, senza passare attraverso i gettoni del Prof potrà arrivare agli stessi risultati in aritmetica "Modulo 5". Cioè, farà le addizioni alla nostra maniera, ma lascerà nella tavola solo il **resto della divisione per cinque** - Nota del Traduttore)

Prof (continuando): Ma a che cosa servirà questa Tavola?

Gli allievi, meno Pennino: Sì, a che cosa serve questa tavola?

Prof: Servirà a conoscere i risultati senza fare i calcoli. Tutte le somme che possiamo fare nella nostra aritmetica sono state prese in considerazione e le abbiamo fatte una volta per tutte.

Grip: Anche 4 +4?

Prof. Prova a vedere: colonna 4 (dentro al quadrato, cioè omettendo riga e colonna guida), riga 4.

Grip: Viene 3!

Prof. Tieni presente. Ma ora prova a fare 3 +2

Grip: Tre più due…riga con indice 3, colonna con indice 2, totale…Vuoto, Zero! Devo aver sbagliato.

Prof: No che non hai sbagliato. Hai trovato lo stesso che quattro più uno. E se facessi riga 2, colonna 3?

Grip (stupito): Viene di nuovo vuoto! Non è la stessa coppella, ma è sempre vuota.

Prof: Quindi, se prendi un numero qualsiasi della riga guida e lo sommi a un numero qualsiasi della colonna guida, trovi lo stesso risultato che se prendi il secondo numero dalla colonna guida, e il primo dalla riga guida. Chiaro?

Allievi: No, Prof.

Prof. OK. Mettiamo il numero di riga guida per primo e il numero di colonna per secondo. Tu hai , per esempio, 2+3; invece, mettendo per primo il numero di colonna e per secondo il numero di riga hai 3+2. Bene, la nostra aritmetica, se è coerente, deve produrre 2+3 = 3+2. Noialtri matematici diciamo che per l'addizione deve valere la proprietà COMMUTATIVA. Ricordatevelo bene, perché questo deve valere per tutte le addizioni. Che sono moltissime. Magari per compito provate a vedere quante sono le possibili addizioni in nostri numeri (*Le addizioni possibili sono venticinque, che per i corvi è un numero immenso, inesprimibile: l'infinito - Nota del Traduttore*).

Voglio che domani sappiate tutti la tavola delle addizioni. E adesso arrivederci. Andate, andate. Io prima mi mangio il mio onorario, e poi mi faccio un voletto a Capo Caccia. Questa sera le berte maggiori danno un concerto, e bisogna arrivare in anticipo per avere un buon posto.

Secondo giorno

Prof: Buongiorno allievi.

Allievi: 'giorno, Prof.

Prof: Allora, qualcuno può dirmi quante sono le addizioni possibili nella nostra ARITMETICA?

(Croc, il più grosso, disse sottovoce a Grip: "Pennino delle volte esagera e mi fa gonfiare le piume del collo. Se risponde di nuovo per primo, gli do una beccata sul cranio che se la ricorda un pezzo" "Lascia perdere", rispose Grip. Fair play"). Ma Croc non fu deluso. Nessuno rispondeva e il Prof incominciava a spazientirsi. Disse: "Allora, tutti asinelli, quest'oggi?"

Pennino disse: Io ho fatto tutte le addizioni, ho sommato il loro numero, e mi è venuto che in totale si possono fare zero addizioni! *[In realtà, come abbiamo visto, sono 25, che vale 0, modulo 5. Nota delTraduttore.]*

Bravo Pennino, gli disse il Prof, facendolo arrossire, per quanto può arrossire un corvo.

Grip: Ma come? Pennino non è venuto a giocare con noi per fare tutte le operazioni, ha lavorato un pomeriggio, ha fatto indigestione di fave, e il numero di operazioni che ha fatto è zero, come quello delle operazioni che ho fatto io – cioè nessuna? Che senso ha tutto ciò?

Prof: Ascolta bene, Grip, e ascoltatemi tutti, altrimenti lo ripeterò fin che non lo avrete ben fissato nella zucca. La nostra aritmetica è un gioco intellettuale che deve essere coerente in sé. Questo è il primo requisito. I risultati, poi, possono descrivere quello che avviene in natura oppure no. Ma ai fini del nostro gioco questo è totalmente irrilevante. Dove mai al mondo un cavallo mangia una torre, come avviene nel gioco di scacchi degli umani, che ogni tanto stiamo a osservare? Ma, ricordate bene, è raro che un gioco matematico non abbia proprio nessuna applicazione. Chiaro?

Qualcuno degli allievi era poco convinto. Ma in fondo, che importava, se l'aritmetica dava dei risultati che contraddicevano la natura? Cracra, addirittura, pensò che tutto il mondo è un'illusione, e magari un gioco logico spiega di più del mondo di quanto non ci dicano i nostri sensi, che sovente ci illudono (Cracra aveva la vocazione del filosofo).

Prof: Ora vi insegnerò la tavola Coraxica, dal nome del nostro maggior matematico, Corax Maximus, che visse alcune generazioni fa, secoli, direbbero gli umani. Lui si occupò della MOLTIPLICAZIONE. Ne abbiamo avuto un primo indizio ieri, quando Grip ha fatto la somma o addizione 4 + 4, e gli è venuto 3. Ma poco importa il risultato. Semplicemente, ha preso due volte quattro. Quindi ha fatto una nuova operazione "due volte quattro", o, per abbreviare, "due per quattro", che si scriverebbe 2 x 4. Così potete prendere tutti i numeri che stanno sulla diagonale della Tavola di Addizione e trovate i risultati di 1+1 = 2 x 1 = 2, 2+2 = 2 x 2 =4, 3+3= 2 x 3 =1, 4 + 4= 2 x 4 , che fa tre.

Pennino: Ma si può fare anche, per esempio, 3 x 1, 3 x 2, 3 x 3….?

Prof: Volerai alto, Pennino! Questo è proprio il problema che Corax Maximus si pose. Ma che vuol dire 3 x1? Vuol dire sommare 1+1+1, e sappiamo che fa tre. Che cosa vuol dire 3 x 4? Vuol dire sommare tre volte 4. Noi sappiamo che 4+ 4 = 2 x 4 = 3, sommiamo ancora una volta 4, troviamo dalla nostra tavola di addizioni che abbiamo fatto ieri, che 3 +4 = 2 , e quindi 3 x 4 =2 Corax Maximus fece tutte le moltiplicazioni possibili, da 0 x 0 a 4x 4, e costruì la sua tavola, che noi chiamiamo Coraxica, un monumento all'intelligenza del corvo. In ogni caso non dovremo mai fare più di quattro somme, perché non abbiamo numeri maggiori di 4.

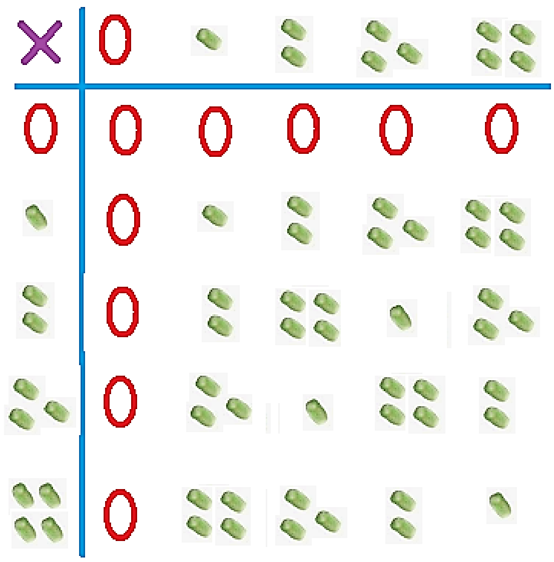

Fig.5

Tavola Coraxica (o delle moltiplicazioni)

(Anche qui, il lettore avvertito, senza passare attraverso i gettoni del Prof potrà arrivare agli stessi risultati in aritmetica "Modulo 5". Cioè, farà le moltiplicazioni alla nostra maniera, ma lascerà nella tavola solo il **resto della divisione per cinque** -Nota del Traduttore)

Prof (continuando): La tavola la si usa come quella delle addizioni. Volete per esempio 2 x 4? Trovare il numero situato all'incrocio della riga 2 con la colonna 4. Viene 3.

Pennino: Ma, Prof, se vogliamo prendere 4 volte 2 gettoni invece che 2 volte quattro gettoni troviamo lo stesso numero 3. Cioè, 4 "volte" per 2 "gettoni" dà lo stesso numero che 2 "volte" x 4 "gettoni". Volte e gettoni non sono la stessa cosa, ma il risultato è lo stesso.

Prof.: Bravo ancora una volta, Pennino. La nostra aritmetica non fa distinzioni tra due volte quattro e quattro volte due. Al congresso della SICS (Società Italiana dei Corvi Sapienti) di due anni fa c'era chi diceva che si potrebbe pensare a un'aritmetica in cui 2 x 3 non è uguale a 3x 2, e diede qualche esempio, dicendo che certi fenomeni naturali venivano spiegati meglio così. Va bene, tutti sono liberi di costruirsi le matematiche che vogliono, e, come ho detto più volte, quello che importa è che siano costruite su un sistema di regole che diano risultati logicamente coerenti. Poi, eventualmente, si troveranno campi applicativi in cui queste matematiche saranno utili o indispensabili. Ma per i matematici ciò non diminuisce il "valore" di quelle matematiche che non hanno ancora trovato campi a cui applicarsi. Proprio per nulla. Anzi, ci sono matematici che dicono che sono proprio le matematiche che trovano campi a cui sono applicabili, quelle che si svalutano vendendosi in modo indegno.

Il Prof si era agitato molto in questa perorazione, e non ci vollero meno di quattro fave per calmarlo.

Poi disse: Le leggi per le nostre aritmetiche sono fisse e vi do il compito di verificarle in base alle due tavole che dovete imparare a memoria.

Grip, tu dovrai dimostrare la **Prima Legge, detta ASSOCIATIVA**. Non guardarmi così, è un nome come un altro. Vuol dire che, se a, b, c sono numeri qualsiasi dei nostri, allora $a + (b + c)= (a+b)+c$ e anche $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

Ti do un esempio: $2 \times (3 \times 4) = 4 = (2 \times 3) \times 4$

Rav, la **Seconda Legge, COMMUTATIVA**, l'abbiamo già vista : Che $a \times b = b \times a$ ce lo ha già fatto notare Pennino. Similmente si può far notare che $(a + b) = (b + a)$, che abbiamo visto con Grip calcolando 3+2 la lezione scorsa.

Cracra, la **Terza legge** ci dice che devono esistere due numeri, 1 e 0, tali che: $0 \times a$ e $a \times 0$ sono eguali a 0; $1 \times a = a \times 1 = a$. Questo lo vediamo guardando con attenzione le nostre tavole. Tu verificherai per tutti. Non è difficile.

A Pennino do il compito di dimostrare che dato un numero a, esiste nel nostro sistema quello che altri chiamerebbero il suo **opposto o negativo**, (-a) tale che $a +(-a) = 0$.

Per questo bisogna imparare a usare le tavole al contrario, cioè partire da un elemento della tavola e poi guardare le righe e le colonne a cui corrisponde. Per trovare (-a) si deve partire dal risultato 0, che vediamo che può essere scritto come 1+4, 4+1, 2+3, 3+2. Ne abbiamo che l'opposto di 1 è 4, quello di 4 è 1 e gli altri due ce li dirà Pennino.

E poi se ci riesce, può provare a dimostrare che esiste un **inverso anche nella moltiplicazione**, cioè ad ogni numero a corrisponde un numero, che scriveremo 1/a tale che a x (1/a) = 1. Per far questo, quale tavola dobbiamo prendere?

Coro di allievi: La tavola Coraxica della moltiplicazione!

Prof: Bravi, sono fiero di voi. E su quali elementi della tavola dobbiamo focalizzarci per trovare gli inversi?

Qui il coro tacque.

Prof: Su , coraggio, dobbiamo focalizzarci sul risultato del prodotto, che deve valere…?

Pennino:Dobbiamo focalizzarci sull'elemento Uno!

Prof: Esatto. E quindi leggendo la tavola Coraxica troviamo che l'inverso di 1 è 1, quello di 2 è 3, quelli di tre e di quattro me li direte voi.

E c'è ancora una **legge,** che per così dire mette insieme le due tavole. Si chiama **PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA**, che dice che a x (b + c) = a x b + b x c.

Esempio: 2x(3+4) = 2x(2) = 4; 2 x 3 + 2 x 4= 1+3 = 4. Naturalmente, i valori delle somme li trovate sulla Tavola dell'Addizione, quelli dei Prodotti sulla tavola Coraxica.

Il nostro sistema rispetta tutte queste leggi, e quindi è quello che i matematici umani chiamano CAMPO. E' anche un campo FINITO , perché contiene solo 4 elementi più lo zero. Ma sono sufficienti a rispettare le nostre leggi senza eccezioni.

Vorrei solo fare notare che se il nostro campo avesse solo 3 elementi più lo zero, cioè 0,1,2,3, le cose non andrebbero così bene. In quest'altro sistema il 4 non esiste e corrisponde a zero.

La tavola Coraxica, per esempio, sarebbe

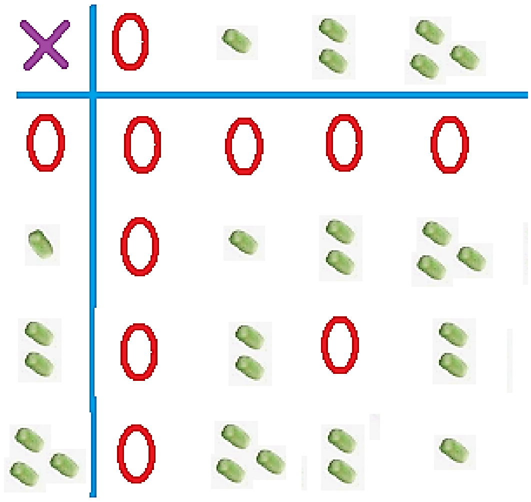

Fig.6
Tavola “Coraxica” per un’aritmetica con solo 4 elementi (0, 1, 2, 3).

Ma qui vediamo che c’è un intruso, cioè un temuto “divisore dello zero”. Infatti, 2 x 2 = 0. Questo non deve esserci, no, no. Di leggi che vietano direttamente i divisori dello zero non ce ne sono. Però vediamo che 2 non ha inverso. Non c’è nessun numero che moltiplicato per 2 dia 1. Come vedete esaminando la tavola, solo 1 e 3 hanno un inverso. Ancora peggio. Come abbiamo visto, c’è proprio una legge che lo richiede.

Cracra: Ma che succede di male se abbiamo un divisore dello zero?

Prof. Buon risveglio, Cracra, credevo che dormissi. Ma la domanda è buona. Supponi di voler fare 3 x 2 in questo sistema con 4 elementi. Dalla tavola vediamo che dovrebbe venire 2. Ma 2 è anche eguale a 0/2. Quindi 3 x 2 = 3 x (0/2) = 0x(3/2)= 0. Cioè avremmo due risultati diversi per la stessa operazione (anatema!) – oppure dovremmo rinunciare al fatto che (a/b)x c = bx(a/c). Invece, nel nostro sistema a 5 elementi, (2 x3) /4 = ¼ = 4, e 3 x (2/4) = 3 x 3 = 4 e infine 2 x ¾ = 2 x 2 = 4

Rav: Ma Prof, io ho provato con 0,1,2 e va bene: guardi la tavola Coraxica che ho fatto:

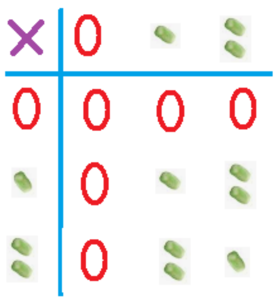

Fig. 7
Tavola “Coraxica” per un’aritmetica con solo 3 elementi (0, 1, 2).

Vede? niente divisori dello zero.

Prof. Ma bravo, Rav! (Ridacchiando fieramente) Qui va a finire che mi trovo con una classe di matematici.

Pennino: Ma perché 0,1,2,3,4 e 0,1,2 vanno bene e 0,1,2,3 no?

Prof.: Ah, Pennino, luce dei miei occhi! Purtroppo noi corvi non abbiamo spiegazioni. Si discute, si discute, ma nessuno sa il perché. E nota che anche il sistema 0,1, funziona perfettamente. Quindi mi spiace, ma perché 0,1,2,3 sia l'unico sistema costituito dai numeri che conosciamo che non funziona non te lo so dire. Orecchiando dagli umani ho sentito dire che il numero di elementi del sistema (0,1,2,3) è 4, che non è un numero primo. E la nostra aritmetica funziona, dicono, solo se il numero di elementi è un numero primo. Ma, onestamente non so cosa sia un numero primo, e soprattutto non so quale sia il numero primo costituito da 0,1,2,3,4. Per noi, come sai, il numero di elementi è ZERO. Quindi mi spiace molto, ma proprio non ti posso aiutare. (E una lacrima colò dal suo occhio sinistro.)

Dopo una breve pausa il Prof continuò: Se voi ascoltate i ragazzini umani che escono da una lezione di matematica, sentite che parlano di "frazioni" e di "numeri negativi". Noi corvi non abbiamo niente del genere. Anche gli umani hanno quattro operazioni, ma la differenza per noi è che una qualsiasi delle quattro operazioni (addizione e sua inversa; moltiplicazione e sua inversa) dà sempre uno dei nostri numeri (0, 1, 2, 3, 4) come risultato.

Una volta ho trovato su una panchina un quaderno umano con un compito da eseguire. Diceva: calcolare

$$\frac{1+\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{4}}$$

Che noi scriveremmo (1+1/3) /(2+1/4). Ora, 1/3 è un modo di scrivere l'inverso di 3, cioè 2, quindi il primo termine è 1 +2 = 3. Dobbiamo moltiplicarlo per l'inverso di (2+1/4). Ma l'inverso di 4, ¼, vale 4, e 2+4 =1. Ora, 1/1 = 1 e quindi, per finire, dobbiamo **moltiplicare 3 x 1 = 3, il valore cercato**. I valori di ¼ e 1/3 ve li leggete sulla tavola Coraxica come al solito: se volete 1/3 cercate 1 e vedete se sta all'incrocio della riga 3 o della colonna 3 con una colonna o una riga, che ci dà il risultato, che è 2.

Terzo giorno. Algebra: Equazioni di primo grado.

Prof: Ora passiamo a un più complicato soggetto: l'Algebra. Supponiamo di avere un pacchetto contenente un numero incognito di gettoni. Se vogliamo trovare una soluzione, questi possono solo essere 0,1,2,3,4. Supponiamo di sapere che il doppio del pacchetto più tre gettoni dia in tutto quattro gettoni.

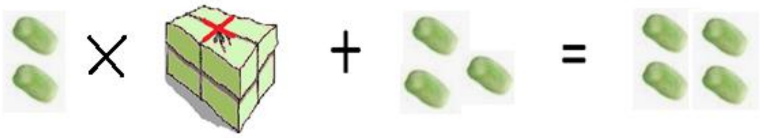

Fig.8
Rappresentazione dell'equazione 2x +3 = 4 per i corvi.

Ora, gli Arabi, che ci trasmisero l'algebra, volevano per così dire meccanizzare le soluzioni. Per cui, trovarono che con **solo due manovre principali** opportunamente combinate si poteva isolare il pacchetto a sinistra e avere sulla destra un'espressione contenente solo gettoni.

La prima regola era: ***si può sommare o sottrarre una quantità nota a entrambi i lati***, il che sovente equivale a passare una quantità nota o ignota da sinistra a destra cambiandole di segno (provare per credere). In questo caso, il pacchetto lo vogliamo tenere a sinistra, e quindi possiamo scrivere, sottraendo 3 a entrambi i lati (o facendo passare 3 da sinistra a destra cambiandolo di segno):

Fig.9
Primo passo nella soluzione dell'equazione: 2x = 4 – 3 =1

La seconda regola è***: entrambi i membri dell'equazione possono essere moltiplicati o divisi per lo stesso numero***. Qui possiamo dividere ambo i membri per 2 e troviamo:

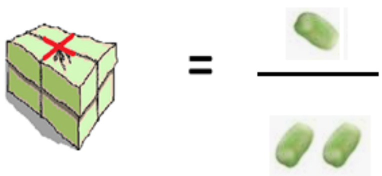

Fig 10
Soluzione dell'equazione in termini umani: x = 1/2

Se ci fermassimo qui, avremmo la risposta degli umani, che corrisponde a quello che troverebbero aprendo il pacchetto, cioè un pezzetto di fava. Ma, se continuiamo con la nostra aritmetica e usiamo la tavola coraxica, troviamo

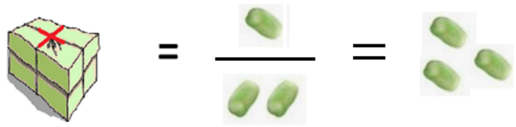

Fig.11

Risultato per i corvi, dalla tavola coraxica.

Verificando e mettendo x = 3 abbiamo 2 x 3 = 1, che è eguale a 4-3 =1. Dunque i nostri calcoli sono giusti, nel senso che sono coerenti. Ma sta di fatto che in realtà, aprendo la scatola troveremmo solo un pezzetto di fava e non tre fave, come la nostra aritmetica ci fa aspettare.

Certo, preferiremmo che la nostra aritmetica fosse corretta e quella che usano gli umani sbagliata. Ma purtroppo non è così. Non illudetevi, il nostro sistema è coerente, e quindi il risultato è corretto, ma non ci dà alcuna indicazione su quello che troveremmo aprendo il pacchetto. Non sarebbe assolutamente un risultato sbagliato: sarebbe un risultato che non si applica a questi casi. Quindi, quando gli umani dicono che la matematica descrive la natura, oh meraviglia!, dobbiamo pensare che la loro frase forse non è del tutto corretta. Una matematica, quella sviluppata dagli umani, descrive fin qui la natura. Forse l'impossibilità di trovare soluzioni a determinati problemi potrebbe provenire dal fatto che gli umani si ostinano a usare una matematica non dico sbagliata, ma inappropriata. Tanto più che la matematica che vi ho proposto è anch'essa studiata dalla "Grande Matematica" degli umani. Ma ora vedo che vi ho confusi.

In effetti tutti i corvetti, persino Pennino, stavano dormendo il sonno dei giusti, col capino sotto l'ala (in verità i corvi dormono col capino *sopra* l'ala, tra folte piume)

FINE DEL DIALOGO

APPENDICE AL DIALOGO

In realtà il Prof continuò ricordando che le *potenze* di un numero altro non erano che il prodotto di un certo numero di numeri *eguali,* come le moltiplicazioni erano la somma di molti numeri *eguali.*

Il problema , come si poté verificare subito guardando la tavola Coraxica, era che il quadrato di 1 era 1, 2^2 =4, 3^2=4, 4^2 =1. Tutto questo era facile, ma nella tavola dei quadrati non comparivano né il numero 2 né il numero 3. Cioè, mentre dalla tavola , guardando la diagonale, si vedeva subito che la radice quadrata di 1 poteva essere 1 o 4, e quella di 4 poteva essere 2 o 3, la radice quadrata di 2 e di 3 era impossibile.

Pennino notò anche che 1 era l'opposto di 4 (cioè 4+1=0), e 2 era l'opposto di 3 (cioè 2+3= 0). Ma Pennino era eccezionalmente intelligente. Prof disse: Chiamare l'opposto (-2) è solo un simbolo. Gli umani potrebbero dire che 4 ha due radici, 2 e (-2). Noi potremmo dire lo stesso, solo che noi nelle nostre tavole non usiamo numeri negativi, e diciamo semplicemente (-2) =3. Tutto qui.

Comunque, continuò il professore, possiamo andare avanti con l'algebra e vedere altre sorprese.

Supponiamo che ci sia data un'altra equazione da risolvere., x^2 -2x +2 =0.

Nel nostro sistema aggiungiamo 3 a entrambi i membri, cosa che si può fare, ma notando che 3+2 nel nostro sistema vale 0, come risulta dalla tavola di addizione. Se vogliamo essere coerenti, occorre che per ogni addizione usiamo la tavola delle addizioni e per le moltiplicazioni la nostra tavola Coraxica (*oppure eseguiamo addizioni e moltiplicazioni "modulo 5", cioè conservando solo i resti della divisione per 5 dei risultati; ciò che non vale per le radici quadrate – Nota del Traduttore*).

Quindi x^2 -2x = 3

Se "completiamo i quadrati" aggiungendo 1 a entrambi i lati abbiamo:

x^2-2x+1= 4, cioè (x-1)^2 = 4. Guardiamo la tavola Coraxica, e vediamo che 4 = 2 x 2 e 4 = 3 x 3. Abbiamo quindi due radici, x - 1 =2, cioè **x= 3** e x - 1 = 3, cioè **x = 4.** Il teorema fondamentale dell'algebra vale anche qui, direbbe un umano. Un'equazione di secondo grado ha 2 radici anche nella nostra algebra finita.

E' interessante notare che i corvi hanno a loro disposizione solo un numero limitato di equazioni algebriche di secondo grado. In effetti in un'equazione di secondo grado sono possibili solo i coefficienti 1,2,3,4 per il termine di secondo grado (perché se il primo coefficiente fosse 0, l'equazione non sarebbe più di secondo grado), e 4+1 coefficienti per il termine di primo grado e quattro più uno per il termine noto. Nel sistema dei corvi questo dà un totale di zero equazioni. Nel sistema umano dà 100. Un corvetto diligente potrebbe mettersi al lavoro e risolvere **tutte** le equazioni di secondo grado.

C'è però una stranezza. L'equazione **x^2 = a** non produce sempre per x uno dei nostri numeri 0,1,2,3,4. Infatti x^2 =0 ha soluzione 0; x^2 = 1 ha soluzioni 2 e 3; x^2 = 4 ha soluzioni 1 e 4. Però x^2 =2 e x^2 = 3 non hanno uno dei nostri numeri come soluzione. Che si può fare?

Si può pensare di estendere la nostra **aritmetica finita** a **finita**, introducendo un numero p, tale che $p^2 = 2$. Potremmo chiamarlo $\sqrt{2}$, ma per facilità di scrittura lo chiamiamo p, e ricordiamo che $p^2 = 2$.

Possiamo ora scrivere esattamente 25 quantità, non una di più, cioè:

0	1	2	3	4
p	p + 1	p + 2	p + 3	p + 4
2p	2p + 1	2p + 2	2p + 3	2p + 4
3p	3p + 1	3p + 2	3p + 3	3p + 4
4p	4p + 1	4p + 2	4p + 3	4p + 4

Abbiamo di nuovo un'aritmetica finita basata su questi 25 elementi. Le nostre tavole di addizione e moltiplicazioni sarebbero 25 x 25 e potremmo fare le quattro operazioni trovando sempre come risultato il contenuto di una delle caselle. Ad esempio, ad occhio l'operazione che dovrebbe darci il maggior risultato è (4p +4)(4p +4). Abbiamo, nella nostra matematica:

$$(4p + 4)(4p + 4) = 16 + 32p + 16p^2$$

Ma i numeri superiori al 4 non esistono: vanno tutti ricalcolati "modulo 5", cioè come resti della divisione per 5. Inoltre $p^2 = 2$. Quindi il risultato è 16+ 32p+32 = 2p +3 (terza riga, quarta colonna).

La teoria di queste estensioni è nota a chi è nota come teoria dei **Campi di Galois.** Un'interessante proprietà è che se si continua a moltiplicare **2p +2** per sé stesso si ritrovano tutti i numeri della tabella, tranne lo 0. Ogni Campo di Galois gode di una simile proprietà. Ma qui siamo ormai camminando su acqua veramente profonda, e quindi può bastare così.

Tutto ciò per dare un'idea di "Come potrebbe essere la matematica se esistessero solo cinque numeri".