È possibile definire una matematica senza concetti primitivi, ma solo da assiomi?

I. Risposta breve:

Dipende da cosa si intende per concetti primitivi. Hilbert, forse il matematico che per primo più si addentrò nella costruzione di una geometria assiomatica, come base di un programma ben più ampio, che doveva estendersi a tutte le matematiche (programma che Goedel affondò nella sua generalità trent'anni più tardi), incomincia così la sua opera fondamentale (*I fondamenti della Geometria, 1899*):

Kapitel I.

Die fünf Axiomgruppen.

§ 1.

Die Elemente der Geometrie und die fünf Axiomgruppen.

Erklärung. Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit $A, B, C, \ldots$; die Dinge des zweiten Systems nennen wir *Gerade* und bezeichnen sie mit $a, b, c, \ldots$; die Dinge des dritten Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; die Punkte heißen auch die *Elemente der linearen Geometrie*, die Punkte und Geraden heißen die *Elemente der ebenen Geometrie* und die Punkte, Geraden und Ebenen heißen die *Elemente der räumlichen Geometrie* oder *des Raumes*.

Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen", „zwischen", „parallel", „kongruent", „stetig"; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie*.

I cinque gruppi di assiomi.

"Noi pensiamo a tre diversi *sistemi* di *Cose* (Dinge)", che lui per brevità chiama punti (A, B, C…), rette (a, b, c…), piani (α, β, γ..), ma non prova neppure a dire che cosa siano.
"I punti sono gli elementi della geometria lineare, i punti e le rette sono gli elementi della geometria piana; punti, rette e piani sono gli elementi della geometria spaziale o dello spazio."
Aggiunge: "Pensiamo ai punti, alle linee e ai piani in certe *relazioni reciproche* e denotiamo queste relazioni con parole come "giacere", "tra", "parallelo", "congruente", "continuo"; *la descrizione esatta e completa di queste relazioni segue dagli assiomi della geometria".*

Possiamo dire che Hilbert fa continuamente riferimento a elementi (primitivi), ma questi non corrispondono *necessariamente* a concetti più o meno concreti, come il classico punto senza dimensioni, o la retta infinita e infinitamente sottile, o il piano infinito e infinitamente sottile. Essi rimangono lettere maiuscole, minuscole e greche, che rispettano determinati assiomi. È chiaro però che gli assiomi si devono riferire a qualcosa, cioè a queste lettere, per astratte che siano, e alle loro relazioni. Questo è il vocabolario degli assiomi, e senza far uso di queste parole, gli assiomi non potrebbero neppure essere concepiti: le leggi dell’architettura, da sole, non permettono di costruire edifici senza pietre o mattoni, e neanche di disegnarli senza punti e linee.

Come esempio, ecco l’assioma 1.1:

I 1. *Zwei von einander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade a.*

Statt „bestimmen“ werden wir auch andere Wendungen gebrauchen, z. B. *a* „geht durch“ *A* „und durch“ *B*, *a* „verbindet“ *A* „und“ oder „mit“ *B*. Wenn *A* ein Punkt ist, der mit einem anderen Punkte zusammen die Gerade *a* bestimmt, so gebrauchen wir auch die Wendungen: *A* „liegt auf“ *a*, *A* „ist ein Punkt von“ *a*, „es gibt den Punkt“ *A* „auf“ *a* u. s. w. Wenn *A* auf der Geraden *a* und außerdem auf einer anderen Geraden *b* liegt, so gebrauchen wir auch die Wendung: „die Geraden“ *a* „und“ *b* „haben den Punkt *A* gemein“ u. s. w.

I. 1. Due punti diversi A, B determinano sempre una retta a. *Invece di "determinare" useremo anche altre espressioni, ad esempio a "passa per" A "e per" B, a "congiunge" A "e" o "con" B. Se A è un punto che insieme ad un altro determina la retta linea a, usiamo anche le espressioni: A "giace su" a, A "è un punto di" a, "c'è il punto" A "su" a, ecc. Se A è sulla retta a e, inoltre, giace su un'altra retta b, usiamo anche la frase: "le rette" a "e" b "hanno il punto A in comune" e così via.*

Come si vede, non vi possono essere assiomi senza far riferimento ad enti primitivi, per astratti che siano, ed alle loro (cinque) relazioni fondamentali.

Chi vuol saperne qualcosa di più può procedere nella lettura della **“Risposta lunga”.**

II. Risposta lunga

1. UN DIALOGO A KOENIGSBERG.

David Hilbert (1862-1943)

- *Ehilà, Davide, gridò un amico ad un trentenne occhialuto che camminava velocemente sulla Magisterstrasse a Koenigsberg Kneiphof (cioè proprio sull'isola da cui partivano cinque dei famosi sette ponti (1)) verso la fine del secolo XIX.*

- *Ah, ciao, replicò senza entusiasmo l'occhialuto, che evidentemente stava pensando a qualcosa che lo assorbiva profondamente e non desiderava essere disturbato.*

- *Sempre immerso nei tuoi pensieri? E sempre con quel tuo cappello bianco?*

- *Che c'entra il mio cappello? Chiese Davide irritato.*

- *Ma insomma, con chi ce l'hai?*

- *Se proprio vuoi sapere, ce l'ho con Euclide.*

- *Ma non hai niente di meglio da fare? È morto da un pezzo.*

- *Morto sì. Ma ti rendi conto che da quando esistono i suoi "Elementi", o da quando sono stati stampati, ogni persona colta deve averli letti e prenderli come oro colato? Il suo influsso nefasto continua.*

- *Piano, disse l'amico, non esageriamo.*

- *Va bene, lo so, esagero. Ma il fatto è che l'opera di Euclide, al quale mi inchino, ne ha fatto un mostro sacro. Guai se uno si permettesse di dire che è meno che perfetto. E invece ci sarebbe molto da ridire.*

- *Non ricomincerai anche tu con il Quinto Postulato.*

- *Ma no, il quinto postulato sta bene com'è, e ci hanno già pensato altri. Lo accetto come "postulato indipendente", e fine del discorso. Quello che non mi va è proprio com'è costruito il sistema.*

- *Ma che cosa c'è che non va nel sistema?*

- *Allora, se vuoi sapere, stammi a sentire. Anzi, meglio, entriamo in questa birreria, beviamo una birra e ti spiego.*

I due entrano nella birreria, ordinano una birra e si siedono.

- *Dunque, gli "Elementi" di Euclide constano di tredici libri. Il primo libro…*

- *Calma, non vorrai farmi il riassunto degli "Elementi"?*

- *Qualcosa dovrò pur dirne, se vuoi sapere cosa penso degli "Elementi".*

- *Allora avanti, ma con moderazione.*

- *Dunque gli "Elementi" si aprono con ventitré Definizioni (che lui chiama "Oroi"), cinque "Postulati" che lui chiama "Aitémata"(le due parole sono l'una la traduzione dell'altra, postulati in latino, aitemata in greco) e "Cinque nozioni comuni". Niente di tutto questo può essere dimostrato. Poi attacca con le "Proposizioni" divise in "Teoremi" e "Problemi". Da secoli si discute se i Postulati e le Nozioni Comuni siamo poi tanto diversi. E da altrettanto tempo si discute la stessa cosa su Problemi e Teoremi.*

- *D'accordo, mettiamo pure che postulati e nozioni comuni siano la stessa cosa e che anche teoremi e problemi siano la stessa cosa - anche se io, personalmente, qualche differenza la vedo. Per esempio, mi sembra che i postulati si riferiscano a oggetti geometrici e le nozioni comuni abbiano un carattere più generale e possano valere per altre scienze.*

- *Va bene, va bene, disse frettolosamente Davide agitando le mani come per scacciare un pensiero molesto. Ti dirò poi cosa penso dei tuoi "oggetti geometrici".*

- *E anche credo che la distinzione delle Proposizioni in Teoremi e Problemi sia posteriore a Euclide. Lui elenca solo i numeri e non dice se siano Proposizioni, Problemi o Teoremi.*

Davide era evidentemente vessato. Disse:

- *Ma il problema non è la terminologia. Per me il problema sta nelle definizioni. Le proposizioni vanno dimostrate e quasi tutte le dimostrazioni di Euclide sono accettabili. Assiomi e nozioni comuni sono elementi necessari. Secondo me sono la parte essenziale del sistema, anche se si potrebbero enunciare meglio.*

- *Meglio di Euclide?*

- *Ma sicuro. Molto meglio. Alcuni di questi assiomi praticamente non li usa mai neanche lui. Che bisogno c'è di elencarli? Altri li usa senza averli elencati. Dove ha mai detto che due cerchi con centro agli estremi di un segmento e raggio eguale alla lunghezza del segmento si intersecano? Eppure questa proprietà la usa per costruire un triangolo equilatero.*

Vecchio imbroglione! E l'imprecisione! E poi il disordine, Mein Gott! Il disordine! Ma ne parliamo dopo. Per me il problema sono le definizioni.

- *Cioè?*

- *Sono impossibili, sono necessariamente vaghe, sono inutili!*

- *Perché impossibili? Perché vaghe? Perché inutili?*

- *E' ovvio che sono impossibili. Ogni definizione di un concetto nuovo deve essere data usando parole il cui significato è noto. Ma se uno non conosce il significato di qualcuna di queste parole, ha bisogno che anche queste siano definite. Alla fine della catena o ti ritrovi al punto di partenza, cioè usi nella definizione alcune delle parole che devi definire, oppure ti trovi con delle parole che non puoi definire. Naturalmente questo non si applica a tutte le definizioni di Euclide, soprattutto se sono date basandosi su parole definite nelle precedenti definizioni.*

- *Voglio un esempio.*

- *Subito. Definizione N.1 : "Un punto è ciò che non ha parti". Anche il nulla non ha parti (ammesso che sappiamo che cosa sia una parte). Che cosa distingue il punto dal nulla? E poi guarda la definizione di angolo retto, Definizione 10. Dice che se una linea viene tracciata da un punto ad un'altra linea e forma al punto di contatto due angoli eguali, questi sono retti.*

- *Mi pare chiaro.*

- *Non lo è affatto, se non sai cosa voglia dire eguale. Alla fine o non sai cosa vuol dire angolo retto o non sai cosa vuol dire eguale.*

- *Euclide non lo dice?*

- *No che non lo dice. Le cinque nozioni comuni (che vengono dopo le definizioni) si riferiscono alle proprietà di cose eguali e non eguali. Ma la quarta nozione comune dice che due cose sono eguali se coincidono (τὰ ἐφαρμόζοντα). E che diavolo vuol dire? Ma mettiamo di fare uno sforzo e di cercare di capirlo: quello che non perdono a Euclide è la Proposizione 35, che dice che due parallelogrammi tracciati tra le due stesse parallele e con egual base sono eguali. Dice proprio così, "eguali", stessa parola, pure in greco. Semmai è eguale l'area, che Euclide non definisce. E due parallelogrammi come quello verde e quello rosso non coincidono e non possono esser portati a coincidere, non sono mai ἐφαρμόζοντα, anche se hanno la base in comune e sono tracciati fra le stesse parallele..*

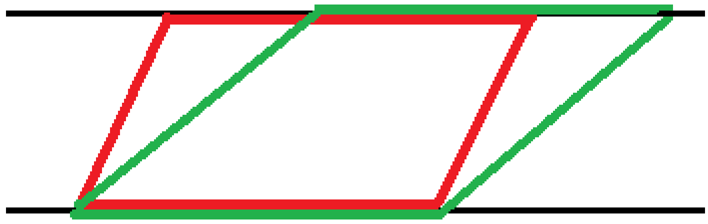


Fig.1

- *Ho capito. Ma allora, cosa vorresti fare?*

- *Ovvio, bisogna eliminare le definizioni.*

- *Ma allora non sapresti neanche di cosa parli.*

- *In pratica neanche Euclide sa bene di cosa parla. Ma non ce n'è bisogno. Per me la geometria è una costruzione architettonica, come una cupola grandiosa. Non ti importa di che cosa è fatta, sassi, ferro, legno… quello che importa è la legge secondo cui tutti i pezzi sono messi insieme, che non permette alla cupola di cadere. Così la geometria: niente definizioni, solo le leggi a cui elementi (che non definiremo) devono obbedire. Questi sono gli assiomi. E la cupola, cioè il sistema, sta in piedi.*

- *Ma la tua geometria sarebbe un mostro, una costruzione senza fondamenta …. una geometria solo "assiomatica"… un orrore!*

- *Sai che mi hai dato un'idea? Mi sembra il nome giusto. La mia geometria si chiamerà "Geometria Assiomatica". Mi piace.*

- *Non era il risultato che volevo ottenere. Ma ci sono i punti nella tua geometria?*

- *Certo che ci sono.*

- *Oh, finalmente. E che cosa sono?*

- *Sono A, B, C…*

- *Non ho capito. Che cosa sono A, B e C?*

- *Sono i punti.*

- *E le rette?*

- *Semplice. Le rette sono a, b, c…*

- *Ho capito, il resto lo so da me. E a, b, c… sono le rette. E magari mi dirai che α, β, γ sono i piani.*

- *Precisamente. Vedo che hai capito.*

- *Ma proprio niente.*

- *Oh, insomma. La mia geometria tratterà tre diversi sistemi di "cose". Punti, rette, piani sono i concetti primitivi della mia geometria.* ***Non li definisco, ma dico che questi elementi hanno tra loro cinque relazioni mutue, che noi nel linguaggio comune indichiamo con parole come: "essere su, essere tra, essere congruente con, essere parallelo a, essere continuo", anch'esse indefinite, ma la cui descrizione completa ed esatta deriva dagli assiomi.*** *Ma è evidente che gli assiomi devono applicarsi a qualcosa, e questi qualcosa devono rispettare gli assiomi. La mia cupola può essere fatta di mattoni o di blocchi di legno o di pietra, non di blocchi di formaggio stracchino o di ceci.*

- *Ma allora potresti parlare allo stesso modo di questi boccali di birra, queste sedie, queste tavole. Sarebbero loro i tuoi punti? Le tue rette? I tuoi piani?*

- *Se rispettano i miei assiomi, senza dubbio potrebbero esserlo. E tieni presente che anche i punti , le rette, i piani tracciati su carta sono solo dei rozzi modelli dei punti, delle rette, e dei piani che Euclide aveva in mente. …. Però, sai che mi hai dato un'altra idea?* ***Tavoli, sedie, boccali di birra! (2)*** *Mi piace. E adesso ti lascio.*

- *Ma non mi dici i tuoi cinque assiomi? Sono evidenti quanto quelli di Euclide?*

- *I miei assiomi non saranno affatto evidenti. E chi ti ha detto che saranno cinque? Saranno decisamente di più. Ma non li ho ancora scritti. Penso di enunciarne una ventina, ma in bell'ordine, non come Euclide. Che ne dici di cinque gruppi, raggruppati secondo le relazioni di cui abbiamo parlato prima? Ma quello che è importante è che il mio sistema sia completo e non porti a contraddizioni. Sono sicuro di riuscire. Anzi, ti dirò, sono convinto che l'intera matematica possa essere ricostruita così. Ma scusa davvero, adesso me ne vado.*

- *Va bene, ciao. Però, quel cappello bianco…*

- *Che c'entra il mio cappello?*

- *Non ti dona.*

- *Va a farti friggere.*

(1) Il problema dei sette ponti di Koenigsberg fu risolto da Euler nel 1736, forse il primo teorema della topologia moderna.
(2) La frase (in tedesco "Tische, Stühle und Bierseidel" , fu fatta propria da Hilbert, e gli è attribuita, ma non ho trovato una fonte scritta.)

Descartes aveva una soluzione per il problema della definizione di punti, rette (e piani): per lui, ad esempio, un punto di un piano era semplicemente una coppia ordinata di numeri (x,y) , il primo dei quali è l'ascissa, il secondo l'ordinata. E la retta? La retta era identificata da tre numeri (a,b,c), con la notazione che i tre numeri potevano essere moltiplicati o divisi per lo stesso numero, ed avrebbero individuato la stessa retta.
E con questo, il problema della definizione degli enti punto e linea (nel piano) era, o sembrava, soddisfacentemente risolto. Descartes avrebbe potuto risolvere i suoi problemi senza fare un solo disegno che utilizzasse rozzi modelli di rette e di punti, seguìto in questo da Lagrange che si vantava di non aver inserito una sola figura ("*On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage*") nel suo testo di *Meccanica analitica* (Ed. 1833). In quanto a Hilbert, era al corrente del metodo di Descartes, e se ne servì anche lui occasionalmente per indicare punti, rette e piani.

Il programma di **Hilbert** era naturalmente assai più ampio, non riguardando solo la geometria euclidea. Esso consisteva nel formalizzare tutte le teorie matematiche esistenti attraverso un insieme finito di assiomi, e dimostrare che questi assiomi non conducevano a contraddizioni (da Wikipedia). Ma Hilbert era troppo ottimista e nel 1930 Gödel devastò il suo ideale assiomatico con un paio di teoremi, uno dei pinnacoli dell'ingegno umano, di cui si occuperanno quelli che studieranno logica. *Tuttavia, recenti sviluppi, basati un algoritmo "di prova" sviluppato da A.*

Tarski, avrebbero messo al sicuro la geometria Euclidea, che resterebbe valida nella concezione, se non nella formulazione, di Hilbert.

2. Applicazione pratica (si fa per dire).

Vorrei ora dare un'applicazione dell'opinione di Hilbert che enti qualsiasi (come boccali di birra, tavoli e sedie) gli andrebbero bene, pur che rispettino gli assiomi della geometria. Limitandoci alla geometria del piano, dei suoi assiomi (qui non tutti riportati) fanno parte tre "assiomi di incidenza", che sono le leggi a cui devono soddisfare gli elementi della sua geometria:

1) Per ogni coppia di punti A, B passa una e una sola retta r.
2) Per ogni retta r, c'e (almeno) un punto P che non giace su r.
3) Per ogni retta r e per un punto P che non giace su di essa passa una e una sola retta s sulla quale giace P che non ha alcun punto in comune con r (questa retta s è la parallela a r).

Ora, per rispettare queste tre leggi, che derivano dalla nostra geometria Euclidea, **non occorre il piano di Euclide formato da infiniti punti e su cui si possono tracciare infinite rette. Basta un numero finito di oggetti**. Inoltre, non occorre che questi oggetti siano punti e linee. E non occorre che gli oggetti "punti" giacciano sugli oggetti "rette", ma possono avere con le rette una relazione (fissa) qualsiasi. Infine, è ovvio che a questa geometria non si applicano gli "assiomi di continuità".

Supponiamo di avere la seguente tabella dei colori delle maglie (classiche) delle squadre di calcio.

Si chiama "tavola di incidenza", ma non ci formalizziamo sul nome.

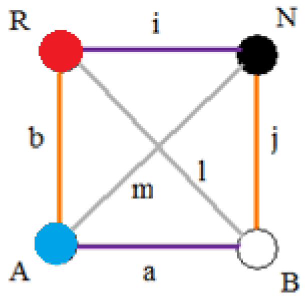
	Juventus	Milan	Bari	Bologna	Lazio	Inter
Bianco	●		●		●	
Nero	●	●				●
Rosso		●	●	●		
Azzurro				●	●	●

Tav.1

Agli incroci della riga "colore" con la colonna "squadra" abbiamo messo un "●" se il colore è presente nella maglia della squadra e niente se il colore non è presente.
Ora si noterà che, *per la nostra scelta di colori e di squadre,* i tre "assiomi di incidenza" sono rispettati, se per "punti" intendiamo i colori, e per "rette" le squadre.
1) Per ogni coppia di punti-colori passa una e una sola retta-squadra. Esempio: il Milan è l'unica squadra con maglia rossonera.
2) Per ogni retta-squadra c'è un punto-colore (almeno) che non compare sulla maglia. Esempio: la maglia del Bologna non contiene il bianco (e neanche il nero).
3) Per ogni retta-squadra e un punto-colore che non compare nella maglia della detta squadra, c'è una e una sola retta-squadra sulla cui maglia compare quel colore e che non ha punti-colori comuni con la maglia della retta-squadra in questione. Questa è la "parallela". La Juventus risulta quindi "parallela" al Bologna, il Milan alla Lazio etc.
Inoltre, due squadre non parallele hanno uno e un solo colore in comune. Questo colore è l'intersezione delle due squadre. Esempio: Lazio e Bologna si intersecano nell'Azzurro (sembra quasi il titolo di una canzone).
Questa, dunque è la nostra geometria. Che poi possa servire a migliorare il gioco del calcio in Italia ne dubito.

Notiamo che le squadre e rispettive maglie sono state scelte, e sono gli elementi primitivi della nostra geometria, perché obbediscono a una parte degli assiomi di Hilbert sul piano (senza contraddire gli altri). Avessimo scelto altre squadre con maglie diverse, i nuovi enti potrebbero non rispettare gli assiomi di Hilbert, per cui essi non potrebbero valere come enti primitivi della geometria assiomatica di Hilbert.

Ogni tipo di relazione definita da una tabella come la nostra ha lo stesso modello geometrico, il "modello minimo", che contiene in tutto quattro punti e sei rette. Il modello è "minimo" in quanto non si può costruire un modello che soddisfi ai tre "assiomi di incidenza" con meno di quattro punti e sei rette (qualunque cosa questi oggetti siano).
Si tratta di una "geometria finita" il cui modello può essere disegnato in diversi modi. Due esempi:



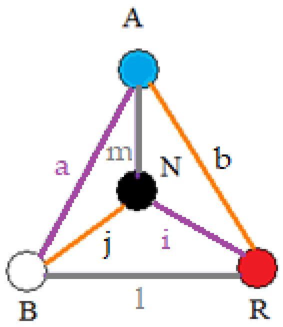


Fig.2

Le linee dello stesso colore sono parallele. Nel diagramma di sinistra, **le due linee grigie (l, m)** sembrano incontrarsi, ma il punto di incrocio non fa parte della nostra geometria, che ha solo quattro punti. Quindi possiamo dichiarare che le due rette sono parallele, perché non hanno punti (da noi riconosciuti) nella nostra geometria.

*Si possono dare altri insiemi di assiomi ed altri modelli di "geometrie finite". Ciò che importa, naturalmente, è che, avendo mostrato che i "punti" A, B, C..; a, b, c.. possono essere colori e squadre di calcio e qualsiasi altra cosa, si vede che i "**concetti o enti primitivi** "non solo non possono essere definiti, ma – poiché se ne possono dare infiniti sistemi - non esistono, e i nomi punti, rette, piani, nella geometria assiomatica sono pure convenzioni.*

Accenno ad un altro esempio, che i lettori volonterosi potranno esplorare a loro piacere.
Supponiamo di sostituire gli assiomi del piano affine a quello euclideo con assiomi della geometria proiettiva. Come sappiamo, la differenza più appariscente è che in geometria proiettiva due rette hanno sempre un punto in comune, **sia esso ordinario o all'infinito**. Inoltre, assiomi e teoremi della geometria proiettiva (del piano) hanno la simpatica caratteristica della dualità, cioè un assioma/teorema valido può essere trasformato in un secondo assioma/teorema altrettanto valido semplicemente scambiando fra loro le parole punto e retta. Ciò che è sorprendente è che anche la dimostrazione del teorema duale rimane valida, scambiando le parole punto e retta nel corso della dimostrazione.

Abbiamo così tre nuovi assiomi di incidenza, di cui i tre primi sono evidentemente duali:

1) Due punti distinti qualsiasi appartengono ad un'unica retta (altro modo di dire che dati due punti si può tracciare una ed una sola retta che li congiunge);

2) Due rette distinte qualsiasi appartengono ad un unico punto (altro modo di dire che due rette distinte si incontrano sempre in un solo punto). Il verbo “appartenere” è scelto perché va bene per entrambi gli assiomi (1) e (2).
3) Esistono quattro punti, nessun terzetto dei quali appartiene alla stessa retta (questo assioma ha il suo duale. Quale?)

Se si vuol fare un modello finito di questa geometria, quattro punti non bastano più e ne occorrono almeno sette. Possiamo prevedere che, per avere dualità completa, in ogni modello occorrerà un numero di rette eguale a quello dei punti. Se ci accontentiamo di sette punti e sette rette, il minimo, abbiamo il “Piano di Fano” (Gino Fano fu un matematico Italiano), un oggetto apparentemente semplice, che qui mi limito a disegnare in forma geometrica, lasciandone l’esplorazione a chi lo desidera.

Si noti che i tre punti E, F, D   appaiono su una linea che noi non chiameremmo retta, ma piuttosto circolo o qualcosa del genere. Bene, per chi accetta questa geometria con questi assiomi – la retta EFD è una retta esattamente come le altre. Bisogna dunque notare che la rappresentazione data nel diagramma è assai imprecisa, perché dà l’impressione che il punto G sia in mezzo, in posizione privilegiata, e la retta EFD sia un cerchio.

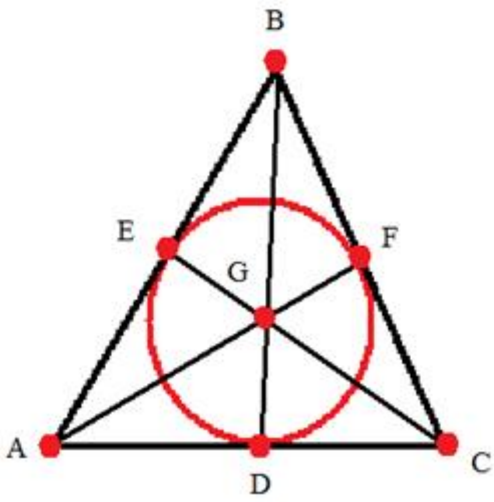


Fig.3

Il sistema è perfettamente duale: sette punti, sette rette; tre punti per retta, tre rette per punto. Non ci sono rette parallele. Potete dilettarvi a costruire la “tavola di incidenza”, sette per sette. E poi potete ribattezzare i sette punti del diagramma come volete mantenendo le stesse “incidenze”, per esempio come ho fatto in figura qui sotto. Ora il sistema ha le stesse proprietà, ma G non è più in centro e EFD è diritta come piace a noi (ma AGF ora è un cerchio).

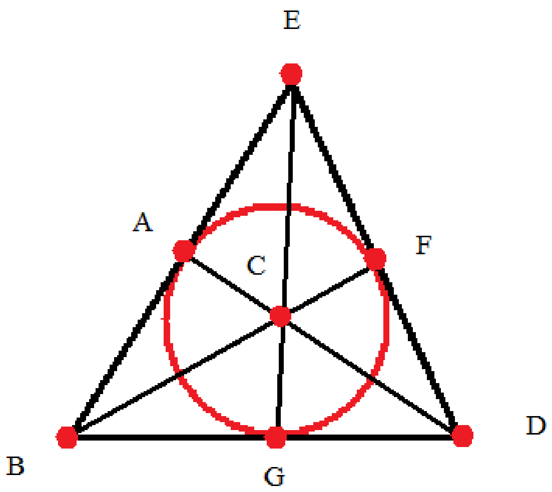


Fig.4

3. Geometria analitica nel modello minimo.

Torniamo al modello minimo nel cosiddetto *piano affine* (nel quale si possono sviluppare quegli argomenti della geometria euclidea che non richiedono l'uso dei concetti di misura degli angoli e di rapporto tra due segmenti non paralleli). Osservandolo così com'è, uno può restare estatico di fronte all'eleganza intrinseca del risultato, ma si può anche chiedere: "E poi?" La geometria, come la conosciamo noi, è una macchina per produrre teoremi. E qui non è che ci vengano in mente molti teoremi da dimostrare (non che non ce ne siano!)

Per far vedere un modo di procedere, possiamo introdurre un po' di geometria analitica. Per questo mi riferirò al bel testo introduttivo di S. Ferri "Elementi di geometrie finite" (Microsoft Word - capitolo 2 intero.doc (eiris.it)).

Ora, come il numero di punti del modello minimo è quattro, così non ci occorre l'intero armamentario del **campo dei numeri reali** per indicare le coordinate di un punto su un piano. Bastano quattro coppie di due numeri interi. Si può dimostrare che la nostra geometria finita con 4 punti può diventare una geometria analitica basata su un "campo numerico finito di numeri interi" con 2 elementi, rispettivamente 0 e 1. I nostri 4 punti avranno le coordinate: (0,0), (0,1), (1,0), (1,1), e lavoreremo sulle loro relazioni.

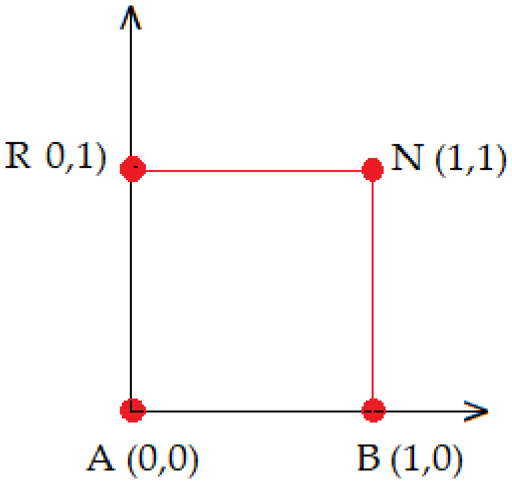


Fig.5

In quanto alle tavole che ci serviranno per le operazioni addizione e moltiplicazione, nonché sottrazione, divisione e quadrato, esse sono tutte operazioni “modulo due”. Per una discussione un poco più approfondita, si veda ad esempio la mia risposta alla domanda su Quora:

« Come sarebbe la matematica se esistessero solo dieci numeri?” ricalcata sul il mio saggio

https://dainoequinoziale.it/scienze/matematica/2020/12/31/aritmeticacinque.html.

Anche se tutti i risultati provengono dai resti della divisione per due dei risultati a cui siamo abituati, val la pena saper fare i conti rapidamente. **Uno dei meno ovvii è il fatto che l’opposto di 1, che chiameremo -1 è eguale a 1, perché 1+1 =0**, e l’opposto di un numero, sommato al numero originale, per definizione dà zero. In quanto al quadrato rosso, ci ricorda che in un “campo” non esiste l’inverso dello zero.

Somma

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Opposto

-	0
0	0
1	1

Prodotto

x	0	1
0	0	0
1	0	1

Inverso

1/x	
0	
1	1

Quadrato

^2	
0	0
1	1

Fig.6

Studiamo le rette, che, come sappiamo, sono in tutto sei (le combinazioni di quattro punti a due a due), costituite da 2 punti. Le rette sono equazioni lineari del tipo ax+by +c = 0, dova a,b,c possono prendere cisascuna due valori, il che darebbe otto possibilità, ma escludiamo i due casi a = b = c =0 e a =b = 0, che non presentano né la x né la y e quindi non sono rette. Abbiamo quindi sei rette. Vediamone solo qualcuna “per forza bruta”, e poi il lettore, se esiste e ci si diverte, è invitato a provare a fare il resto. Segniamo con un “Sì” o un “No” se l’equazione è soddisfatta o meno da un dato punto:

Equazione	a,b,c	A=0,0	R= 0,1	B= 1,0	N=1,1
x+y	1,1,0	**Sì**	No	No	**Sì** (1+1=0)
x+y+1	1,1,1	No	**Sì** (1+1=0)	**Sì** (1+1=0)	No (1+1+1=1)

Tav.2

Ripetendo il (facile) esercizio per le sei rette, si possono verificare alcuni fatti: (1) ogni retta contiene due punti (lo sapevamo); (2) per ogni punto passano tre rette (per esempio, per l'origine passano le rette x=0, y = 0, e x+y =0.

Elenco qui, per i meno volonterosi, per esercizio e per ulteriore uso, le sei rette del nostro sistema:

Nome	Equazione	I due punti per cui passa
a	x=0	(0,0), (0,1)
b	y=0	(0,0), (1,0)
c	x+1=0	(1,0), (1,1)
d	y+1=0	(0,1), (1,1)
e	x+y=0	(0,0), (1,1)
f	x+y+1=0	(1,0), (0,1)

Tav.3

Ma c'è di più. Possiamo anche considerare le "coniche"!

Che cos'è una conica, in geometria analitica? È l'insieme di punti che soddisfano un'equazione di secondo grado nelle due variabili x e y. Molte coniche sono degeneri; per esempio, sono coniche degeneri le coppie di rette eguali o coincidenti, incidenti o parallele. Le chiameremo tutte coniche, le quali, disponendo di soli quattro punti, non assomiglieranno neanche da lontano alle curve continue studiate da Apollonio di Perga.

Una conica, degenere o meno, sarà data dalla soluzione di un'equazione della forma:

$$a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + \ a_{12}x\,y + \ a_{13}x + a_{23}y + \ a_{33} = 0$$

dove i sei coefficienti a $_{i\,j}$ possono solo valere 0 oppure 1. Di qui si può dedurre quante sono le coniche possibili. I sei coefficienti, possono assumere ciascuno due valori. Quindi il totale di possibili coppie di valori è 2^6 = 64 coniche (tra degeneri e non degeneri). Ma se i tre coefficienti di secondo grado, $a_{11}\,, a_{22}\ e\ \ a_{12}$ sono nulli, noi non abbiamo più un'equazione di secondo grado. Le equazioni per cui i primi tre coefficienti sono nulli sono otto, e quindi il numero totale di equazioni da considerare è 64-8=56. (A parte le sei rette che già conosciamo, queste terne di coefficienti includono la (0,0,0), e la (0,0,1), che non sono rette.)

Di queste cinquantasei coniche, quante sono degeneri, cioè sono il prodotto di due rette? Il conto non è difficile: si tratta in pratica del *numero di elementi* ***distinti*** *di una matrice simmetrica 6 x 6*:

aa	ab	ac	ad	ae	af
ba	**bb**	bc	bd	be	bf
ca	cb	**cc**	cd	ce	cf
da	db	dc	**dd**	de	df
ea	eb	ec	ed	**ee**	ef
fa	fb	fc	fd	fe	**ff**

Tav.4

Le caselle fuori dalla diagonale sono 6 x 5 = 30, da dividersi per 2 = 15. A queste si aggiungono le caselle della diagonale, che sono 6, totale 21. (La formula generale è M = n(n-1)/2+n.) Questo ci lascia con 56-21 = 35 equazioni di secondo grado. Come si può verificare, tra queste 35 equazioni, quattro sono soddisfatte da tre punti, dodici da due punti, sedici da un solo punto, tre da nessun punto. Se una data equazione di secondo grado che non si spezza nel prodotto di due equazioni lineari è soddisfatta da tre dei nostri punti, affermiamo che essa rappresenta un'*ellisse*. Se i punti che soddisfano l'equazione sono due, allora affermiamo che la curva rappresenta una *parabola*. Infine, se l'equazione è soddisfatta in un solo punto diremo che essa è l'equazione di un'iperbole. Delle equazioni che non hanno alcuna soluzione diremo brevemente in seguito.

L'identificazione delle ellissi, parabole e iperboli, può essere in qualche modo resa euristica dicendo che le equazioni delle coniche non degeneri sono tutte soddisfatte da tre punti, tra i quali zero, uno o due punti sono all'*infinito*. Ma la retta all'infinito finora non fa parte della nostra geometria, e penso che a questo livello sia meglio non complicare le cose ulteriormente, e accettare le identificazioni date sopra come definizioni.

Ora, si può procedere a scrivere le 56 coniche e a identificare le coniche degeneri. Personalmente credo che, visto il piccolo numero di rette (6) sia più proficuo eseguire tutti i prodotti come da Tavv.3-4. In effetti, la fattorizzazione non è del tutto immediata. Ad esempio:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + 1 = (x + y + 1)^2.}$$

Possibile? Dimostrazione: (x+y+1)(x+y+1) = x^2 + y^2 + xy + xy + x +x+y+ y +1. Ma xy+xy dà invariabilmente 0, che proviene o da 0+0 o da 1+1. Lo stesso vale per x+x= 0, y+y = 0 indipendentemente dail valore di x o di y. Ne risulta che x^2 + y^2 +1=0 ovvero x^2 + y^2 =1 è una conica doppiamente degenere, prodotto di due rette coincidenti, entrambe costituite dai punti (1,0) e (0,1), come da Tav.2 E questa conclusione elimina ogni parvenza di cerchio dalla nostra geometria minimale. Incidentalmente, come regola pratica, tutte le volte che, eseguendo un prodotto secondo le regole abituali, troviamo due termini eguali o un fattore 2 (come per esempio moltiplicando (x+1)(x+1) = x^2+ 2x +1 , si può ricordare che nella nostra aritmetica finita 2 = 0, e quindi (x+1)(x+1) = x^2+1 (regola che abbiamo implictamente usato più sopra).

Consiglio senz'altro di scrivere ordinatamente le 56 equazioni possibili, di identificare i 21 prodotti delle sei rette e di verificare quali delle 35 equazioni restanti sono ellissi, quali sono parabole e quali sono iperboli, osservando semplicemente da quanti punti sono soddisfatte.

Esaminiamo ora alcuni casi esemplari, dando i valori 0 o 1 ai vari coefficienti a_{11} , a_{22} , a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{33}.

Equazione	a_{11} , a_{22} , a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{33}	A=0,0	R= 0,1	B= 1,0	N=1,1	Conica
x^2+y^2 +xy+x=0	1,1,1,1,0,0	**Sì**	No	**Si**	**Sì**	Ellisse
x^2+y^2 +xy= 0	1,1,1, 0,0,0	**Si**	No	No	No (1+1+1=1)	Iperbole
x^2+y^2 + x+1=0	1,1,0,1,0,1	No	**Sì**	No	**Sì**	Parabola
x^2 + x + 1=0.	1,0,0,1,0,1	No	No	No	No	?

Tav.5

(Si potrebbe quasi chiamare la curva x^2+ y^2 + x +1 = 0 "La parabola del Milan"…)

Ci sono i casi delle **coniche degeneri**, come la $y^2 + y = 0$, che si sdoppia nel prodotto $(y=0)(y+1=0)$. Tra queste, la retta $y=0$ passa per i punti (0, 0) e (1,0); la $y+1=0$, che è eguale alla $y = 1$, per i punti (0,1) e (1,1). Questa conica degenere si spezza quindi in due rette che passano per un totale di **quattro** punti, e sono parallele (come è evidente dal nostro diagramma). Dato che ogni retta passa per due dei nostri punti, due rette possono passare per quattro punti se sono parallele; per tre punti se si intersecano (ma il punto di intersezione conta per due); per due punti se coincidono, come abbiamo visto (e ogni punto conta per due).

Infine, come annunciato, ci sono anche **tre coniche anomale,** come la $x^2 + x + 1=0$, che ho elencato al quarto posto in Tav.5. Nessun punto giace su questa conica, come nessun punto giace sulla gemella $y^2 + y + 1=0$, e nessuno sulla $x^2 + y^2 + x + y + 1=0$. Il caso è analogo a quello della conica $x^2 + y^2+1=0$ nel campo reale, per soddisfare la quale bisogna passare al campo complesso. Con qualche opportuno ampliamento si possono trovare anche punti che giacciono su queste coniche anomale, ma se restiamo nel nostro campo finito, dobbiamo accettare questa anomalia così come è.

E a questo punto mi pare che possa bastare, non senza avvertire che queste geometrie finite hanno anche loro i loro bravi campi di applicazione, anche se non nel gioco del calcio.

Così, anche qui credo di aver appena dischiuso la porta su un giardino, forse segreto per molti, che ha i suoi cultori. Il giardino, comunque, non è chiuso a chiave, è aperto per tutti coloro che vi sono interessati.