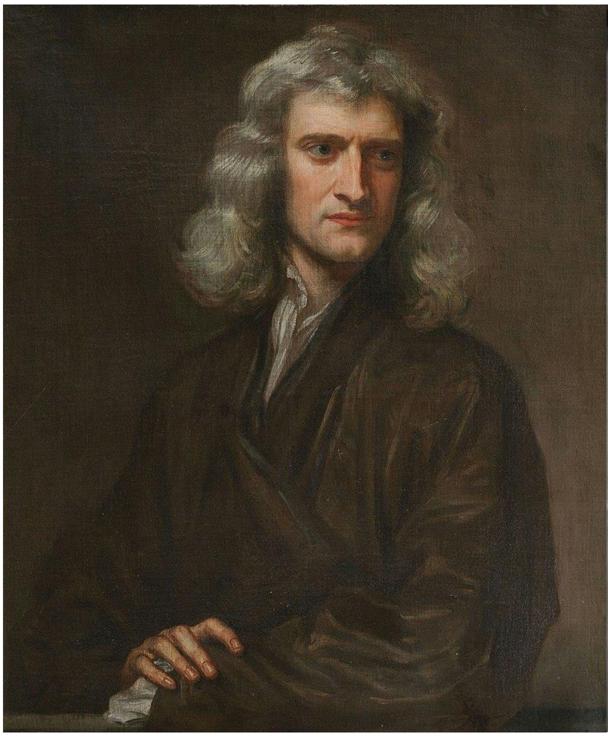
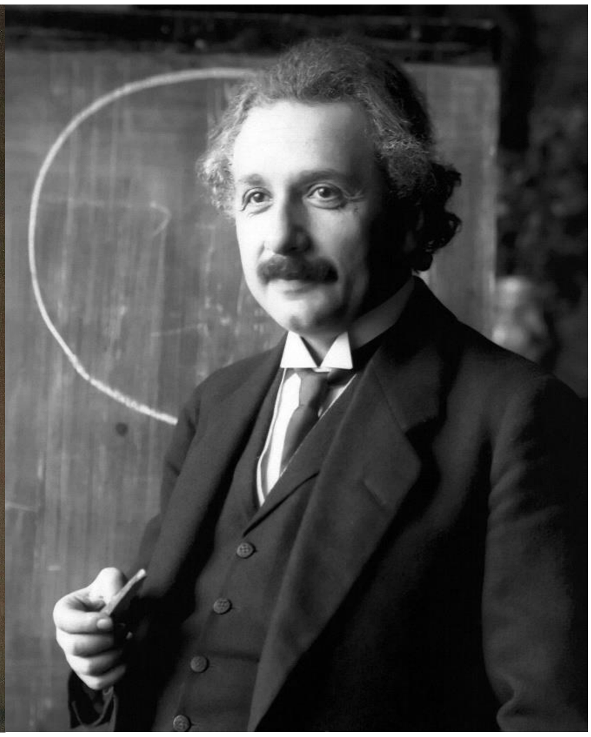
# Espressione relativistica di F=ma



$\mathcal{F} = ma$



$\mathcal{F} = ?$

Daino Equinoziale

Inverno 2022, anno III dell’Era Covid.

*Premessa*

*Questo mio saggio è, con qualche aggiunta, la mia risposta alla domanda, comparsa su Quora: "Qual è l'espressione relativistica di **F**=m**a**?"*

**Risposta breve**: a rigore, la risposta formalmente corretta è quella data da altri, sia in italiano che in inglese:

$$\boldsymbol{f} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \qquad (1)$$

Chi si accontenta di una risposta formale, può smettere di leggere qui. Tuttavia, *coloro che conoscono un minimo di Relatività Ristretta* non possono essere soddisfatti. Le grandezze $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{p}$ e $t$ per basse velocità, piccole distanze, e brevi intervalli di tempo si riducono alle variabili classiche. Tuttavia, usciti da questo dominio, si entra nel vivo della relatività ristretta, e in base all'espressione (1), formalmente valida, secondo il Rindler (classico testo didattico di introduzione alla Relatività ristretta), in base alla (1) non si può fare alcuna diretta predizione ("*no immediate prediction can be made from (1) at all*".)

**Risposta lunga**.

### 1. *Introduzione*

La risposta lunga può essere vista come un esercizio da libro di testo di relatività ristretta, della quale si suppongono *quindi* noti i fondamenti: (i) la riduzione del tempo da parametro universale a una variabile (quasi) sullo stesso piede dello spazio, grazie alla quale dovremo trattare lo spazio e il tempo come un unico spazio-tempo in *quattro dimensioni*; (ii) l'invarianza dell'*intervallo* spazio –temporale tra due *eventi* nel passaggio da un sistema inerziale ad un altro; (iii) l'esistenza (che discende dalla precedente) delle "trasformazioni di Lorentz" che permettono di derivare le nuove componenti di qualsiasi vettore (e tensore) in un nuovo sistema di riferimento inerziale. Per un sistema che si muova rispetto a quello originale di velocità v lungo l'asse x, esse sono

$$A'_1 = \gamma(v)\left(A_1 + i\frac{v}{c}A_4\right),\ A'_2 = A_2,\ A'_3 = A_3,\ A'_4 = \gamma(v)\left(A_4 - i\frac{v}{c}A_1\right)$$

Dove $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ è il noto *fattore di Lorenz.* Si noterà che ho usato l'ormai desueta, ma tanto comoda, metrica di Minkowski, che, invece di introdurre l'armamentario del calcolo tensoriale, con indici covarianti e controvarianti, si limita a dichiarare che il tempo $t$ è sostituito da una variabile immaginaria, *ict.*

Per rendere l'espressione (1) relativistica dobbiamo quindi aggiungere una quarta componente al vettore classico **f**, e dobbiamo rassegnarci al fatto che la forza, la quale nella meccanica newtoniana era invariabile nel passaggio da un sistema inerziale a un altro, come lo erano il tempo e la massa, diventerà dipendente dalla velocità relativa dei due sistemi, secondo quanto si otterrà applicando le trasformazioni di Lorentz. In realtà, l'intera meccanica newtoniana, essendo Galileo-invariante, non può essere Lorentz-invariante, e va interamente riformulata.

Le principali difficoltà nell'estensione della (1), che si può anche scrivere in componenti come

(1b) $$f_i = \frac{d}{dt}\left(m\,\frac{dx_i}{dt}\right) \qquad i=1,2,3$$

erano le seguenti:

I. **La forza newtoniana non è un quadri-vettore (vettore a quattro componenti).** Quindi la definizione in termine di tri-vettori, siano essi $\boldsymbol{p}$ o $\boldsymbol{v}$, è monca. Occorreva trovare un'appropriata quarta componente, che facesse della forza (vettore a tre dimensioni) un quadrivettore. La formula (1) è quindi incompleta.

II. **La derivata rispetto al tempo,** che non è più un parametro universale ma una coordinata come le altre, non è un'operazione che garantisce la covarianza, cioè, per le cognizioni richieste a questo punto, non garantisce che i risultati, nel passaggio da un sistema inerziale a un altro, siano quelli dati dalle trasformazioni di Lorentz.

III. **In meccanica classica c'erano tre concetti di massa ,** che potevano esser fatti coincidere usando opportune unità di misura. Questi erano: (i) la massa come "quantità di materia", detta anche "massa propria", che noi indicheremo con $m_0$; (ii) la massa "inerziale" come espressione della "resistenza alla forza"; (iii) la massa come "carica" sensibile alla gravitazione universale. Quale delle tre possibili interpretazioni di "m" è corretta? Oppure, chi ci garantisce che la scelta sia indifferente, come nella meccanica classica?

## 2. *Tempo proprio*

Vedremo il punto I fra poco. Per il punto II, (derivata rispetto al tempo,) avendo il tempo perduto la sua universalità ed essendo diventato una componente del quadrivettore spazio-tempo (quasi) come le altre, dovette essere sostituito da un parametro *scalare*, cioè a una sola componente, il **tempo proprio**, che proviene dalla definizione di **intervallo** tra due eventi a distanza spazio-temporale infinitesima, applicata al moto di una particella che muove a velocità **u**.

Per calcolare questo tempo proprio utilizzeremo la cosiddetta "metrica di Minkowski", secondo la quale il quadri-vettore è risolto in un tri-vettore "spazio", e una componente "tempo", *assegnando a quest'ultima, quarta componente del quadrivettore distanza, un valore immaginario (**r**, ict). Estenderemo questa tecnica, ove possibile, alla quarta componente di* ***qualsiasi quadri-vettore relativistico****.*

Si ha allora che un quadri-vettore spostamento infinitesimo nello spazio-tempo è scritto come ($dx_1$, $dx_2$, $dx_3$, $dx_4$), dove $\mathbf{x_4 = ict}$, e l'"intervallo" ha la forma della classica distanza basata sul teorema di Pitagora, ma, svolto, introduce un addendo negativo:

$$\boldsymbol{ds^2} = \boldsymbol{dx_1^2} + \boldsymbol{dx_2^2} + \boldsymbol{dx_3^2} + \boldsymbol{dx_4^2} = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$$

Come già osservato, questa notazione, che fa del passaggio da un sistema inerziale a un altro una *rotazione* di un angolo immaginario nello spazio-tempo, è oggi sorpassata, ma è sempre valida, come ho detto, per ottenere risultati rapidi ai primordi della relatività, senza passare per le gioie e amarezze del calcolo tensoriale.

**Il tempo proprio è definito come** $d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2}$

$$\mathbf{d\tau^2} = -\frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2 = dt^2(1 - (dx^2 + dy^2 + dz^2))/(c^2\, dt^2) = \mathbf{dt^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}$$

Ne risulta che $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} = \gamma(u)$, dove $\gamma(u)$, è il "fattore di Lorentz" che abbiamo appena incontrato in (1).

### *3. Quadri-velocità*

A questo punto diviene lecito derivare rispetto al tempo proprio la distanza, ottenendo una velocità *covariante*, data da

$$U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{dx_\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma(u)\frac{dx_\mu}{dt} = \gamma(u)(\boldsymbol{u}, ic). \quad \mu=1,2,3,4$$

La notazione $\gamma(u)(\boldsymbol{u}, ic)$ va quindi intesa nel senso che il quadri-vettore è stato risolto in un tri-vettore "spazio", e una componente "tempo", immaginaria, secondo quanto richiede la "metrica di Minkowski", e la quarta componente risulta da

$$U_4 = \frac{dt}{d\tau}\frac{d(ict)}{dt} = i\gamma(u)c$$

Si può anche proseguire su questa strada e derivare rispetto al tempo proprio la velocità covariante, ottenendo un'accelerazione covariante data da $A_\mu = \frac{dU_\mu}{d\tau}$.

Sfortunatamente qui abbiamo una complicazione in più, in quanto anche $\gamma(u)$ va derivato rispetto al tempo. Noi eviteremo questa complicazione. (Gli interessati possono vedere la pagina https://www.youmath.it/lezioni/fisica/teoria-della-relativita-ristretta/3402-forza-relativistica.html)

Notiamo che il formalismo di Minkowski ci dice subito che **$U^2$ = - $c^2$.** Infatti, scrivendo come ***r*** la parte "spazio" di componenti **x,y,z** e come ***u*** la velocità di componenti $\dot{\boldsymbol{x}}, \ \dot{\boldsymbol{y}}, \ \dot{\boldsymbol{z}},$ abbiamo $U^2 = \gamma^2(u)\ (\mathbf{u}+ic)(\mathbf{u}+ic) = (u^2 - c^2)/(1-u^2/c^2) = -c^2$

(Altri autori danno come risultato $+c^2$, avendo definito $d\tau^2 = +\frac{ds^2}{c^2}$: in tutte queste convenzioni, l'importante è la coerenza).

## 4. *Quadri-momento*

Alla velocità di una particella è connesso il momento, tanto nel campo tradizionale (tri-vettori) quanto in quello relativistico ristretto (quadrivettori), e questo lo si fa introducendo la massa. Ci serviremo qui della cosiddetta "massa a riposo" di valore $m_0$.

Abbiamo allora il quadrivettore $P_i = m_0 U_i = m_0\gamma(u)(\boldsymbol{u}, ic)$. Qui possiamo fare un trucco, cioè unire il $\gamma(u)$(che proveniva dalla derivata d/dτ) al fattore $m_0$, ponendo cioè $m = m_0\gamma(u)$, e portando il tutto entro parentesi. Fin qui non è detto che $m_0$ sia un parametro costante. Esso è bensì uno scalare, invariante per trasformazioni di Lorentz, ma per ora non ci occorre ancora sapere quale sia la dipendenza temporale. Abbiamo così:

$P_i = m_0 U_i = m_0\gamma(u)(\boldsymbol{u}, ic) = (m\boldsymbol{u}, imc) = (\boldsymbol{p}, imc)$

Formalmente, il tri-vettore ***p*** sembra il medesimo della meccanica tradizionale, ma *m* è diventato tutt'altra cosa, in quanto è $m = m_0\gamma(u)$, novità densa di sorprese.

Un esame della quarta componente del quadri-vettore momento, porge:

$P_4 = imc = i\, m_0\gamma(u)c$

## 5. *Quadri-forza o Forza di Minkowski*

Possiamo ora costruire il quadrivettore forza:

$$F_i = \frac{dP_i}{d\tau} = \gamma(u)\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}, imc) = \gamma(u)\left(\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}, ic\frac{dm}{dt}\right) = \gamma(u)\left(\boldsymbol{f},\ ic\frac{dm}{dt}\right)$$

Ecco dunque la forma corretta della forza nella relatività ristretta, completa di quattro componenti. Essa è anche detta "Forza di Minkowski" ed è un quadri-vettore "covariante", cioè (per noi) che si trasforma secondo le formule delle trasformazioni di Lorentz.

D'altra parte si può dimostrare (ciò che non è sorprendente) che $F_i = m_0 A_i = m_0\frac{dU_i}{d\tau}$.
Insomma, tutto torna.

A questo punto (seguendo il classico Rindler e altri) si può fare l'ipotesi, finora non necessaria, che $m_0$ sia costante. Per avere qualche informazione in più sulla quarta componente del quadrivettore forza, possiamo fare la derivata rispetto al tempo proprio del prodotto $U^2 = -c^2$ , da cui risulta che $2\,\frac{dU_i}{d\tau}U_i = 0$ cioè $A_i\,U_i = 0$, o anche, considerando che $m_0$ è costante, $F_i\,U_i = 0$. Cioè, forza e velocità (quadrivettori) sono ortogonali. Scrivendo in componenti:

$F_i\,U_i = \gamma(u)\left(\boldsymbol{f}, ic\,\frac{dm}{dt}\right)\gamma(u)(\boldsymbol{u}, ic) = \gamma^2(u)\left(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u} - c^2\,\frac{dm}{dt}\right) = 0$, ove $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}$ è il consueto prodotto interno di due tri-vettori.

Ora, $\gamma(u)$ è sempre maggiore di 0 (anzi, di 1) , il che ci porge l'utile risultato:

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u} = c^2\frac{dm}{dt}$$

Da questo risultato seguono diverse considerazioni.

i) Per quanto riguarda la quadri-forza, o forza di Minkowski, abbiamo un'espressione alternativa della quarta componente:

$$F_i = \gamma(u)\left(\boldsymbol{f},\ ic\,\frac{dm}{dt}\right) = \gamma(u)\left(\boldsymbol{f},\ i\frac{\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}}{c}\right)$$

ii) da $\mathbf{f} = \frac{d(m\boldsymbol{u})}{dt}$ segue

$\boldsymbol{f} = m\,\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \frac{\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}\boldsymbol{u} = m\,\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}\boldsymbol{u}$ **,**

risultato secondo il quale, in generale, la forza "ordinaria", cioè la componente tri-vettore, non è nella direzione dell'accelerazione. Lo è solo se la velocità è zero (per un istante) o se la forza è parallela o perpendicolare alla velocità.

Per rendere il risultato più simile alla legge di Newton, e rispondere più direttamente alla domanda in questione, è meglio scriverlo come

$$m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} - \frac{\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}\boldsymbol{u}$$

**Questo dimostra come non valga più la celebre legge di Newton $\boldsymbol{f} = m\,\boldsymbol{a}$, se non in casi particolari,** (ad esempio se la forza è operpendicolare alla velocità). Naturalmente, il denominatore $c^2$ assicura che per piccole forze e velocità, la legge di Newton rimane valida.

iii) Spezzando il risultato in una componente parallela **alla velocità** "p" e una trasversa "t", abbiamo

$m$ $(\boldsymbol{a}_p + \boldsymbol{a}_t) = m_0\, \gamma(u)\, (\boldsymbol{a}_p + \boldsymbol{a}_t) = \boldsymbol{f}_p + \boldsymbol{f}_t - \frac{u^2}{c^2} \boldsymbol{f}_p$ e, separando le componenti:

a) $m_0\, \gamma^3(u)\, \boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{f}_p$
b) $m_0\, \gamma(u)\, \boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{f}_t$

In altre parole, la forza parallela e la forza trasversa (in cui le forze sul piano possono essere sempre scomposte) appaiono agire su due masse diverse, che ricevettero i nomi di "massa parallela" ($= m_0\, \gamma^3(u)$) e "massa trasversa", ($= m_0\, \gamma(u)$), notazione che era più popolare in tempi passati.

iv) Considerando che

$$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dE}{dt} = c^2 \frac{dm}{dt}$$

Troviamo che un incremento di energia corrisponde a un incremento di massa. Cioè, $dE = d\,(mc^2)$, il che suggerisce un **postulato, che tutta l'energia sia dovuta alla massa,** e quindi $E = mc^2$ ($= m_0\, \gamma\, c^2$), formula che Einstein considerava essere il risultato più profondo della teoria della relatività ristretta.

In quanto alla quarta componente del momento, $P_4 = imc$, essa diviene $P_4 = iE/c$.

La quadri-forza diventa:

$$F_i = \gamma(u)(\mathbf{f},\ i\frac{1}{c}\frac{dE}{dt})$$

vi) **Le formule di trasformazione** nel passaggio da un sistema inerziale ad un altro in moto relativo con velocità v lungo l'asse x, con $u_1$ = componente della velocità della particella lungo l'asse x, sono:

$$f'_1 = \frac{f_1 - \frac{v}{c^2}\frac{dE}{dt}}{1 - \frac{u_1 v}{c^2}}$$

$$f'_2 = \frac{f_2}{\gamma(v)(1 - \frac{u_1 v}{c^2})}$$

$$f'_3 = \frac{f_3}{\gamma(v)(1 - \frac{u_1 v}{c^2})}$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)' = \frac{\frac{dE}{dt} - v f_1}{1 - \frac{u_1 v}{c^2}}$$

Come esempio, dimostrerò la formula per $f'_1$.

Anzitutto, si veda la formula della trasformazione di Lorenz della forza di Minkowski, che è la formula solita:

$$F_i = \gamma(u)\left(\boldsymbol{f},\ i\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}\right)$$

Per qualsiasi quadri-vettore, le trasformazioni per passare da un sistema inerziale a un'altro che si sposta a velocitù v lungo l'asse comune x, sono quelle già date in 1.:

$$A'_1 = \gamma(v)\left(A_1 + i\frac{v}{c}A_4\right),\ A'_2 = A_2,\ A'_3 = A_3,\ \ A'_4 = \gamma(v)\left(A_4 - i\frac{v}{c}A_1\right)$$

Per cui, nel caso della forza di Minkowski, abbiamo ad esempio, per la prima componente:

$$\gamma(u')f'_1 = \gamma(v)\gamma(u)[f_1 - \frac{v}{c^2}\frac{dE}{dt}]$$

Ci occorre quindi un'espressione per $\frac{\gamma(v)\gamma(u)}{\gamma(u')}$, dove, ricordiamolo, u è la velocità della particella nel sistema inerziale di partenza, e u' è la velocità della particella nel sistema in moto relativo v rispetto al sistema originale. Si può dimostrare che, nella configurazione da noi scelta,

$$\frac{\gamma(u')}{\gamma(u)} = \gamma(v)(1 - \frac{uv}{c^2})$$

Dove $\frac{uv}{c^2}$ può essere più in generale scritto come $\frac{u_1 v}{c^2}$, per un moto in cui **u** non è diretta lungo l'asse x, e $u_1$ è la componente di **u** lungo l'asse x.

Da questo risulta:

$$\frac{\gamma(u\prime)}{\gamma(u)}f'_1 = \boldsymbol{\gamma(v)}(1 - \frac{u_1 v}{c^2})f'_1 = \boldsymbol{\gamma(v)}\ [f_1 - \frac{v}{c^2}\ \frac{dE}{dt}]$$

Da cui:

$$f'_1 = \frac{f_1 - \frac{v}{c^2}\frac{dE}{dt}}{(1 - \frac{u_1 v}{c^2})}$$

Resta da dimostrare il risultato $\frac{\gamma(u\prime)}{\gamma(u)} = \gamma(v)(1 - \frac{uv}{c^2})$.

Questo lo si ottiene dall'invarianza dell'intervallo, che sta alla base della relatività ristretta:

$$(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 - (c\,dt')^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (c\,dt)^2$$

Ponendo in evidenza $(dt')^2$ a sinistra e $(dt)^2$ a destra:

$$(dt')^2 \left[\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt'}\right)^2 - c^2\right] = (dt)^2 \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - c^2\right]$$

Più sinteticamente, introducendo le velocità $\boldsymbol{u'}$ e $\boldsymbol{u}$, e cambiando segno nei due membri dell'equazione

$$(dt')^2\left(c^2 - u'^2\right) = (dt)^2(c^2 - u^2\ )$$

Ora introduciamo la formula della trasformazione di Lorentz per dt' (= $\gamma(v)\left(dt - v\frac{dx}{c^2}\right) =$

$dt\,\gamma(v)\left(1 - v\frac{u}{c^2}\right)$) e scambiamo i due membri, ricordando che, in un caso generale, di u è attiva solo la componente lungo l'asse x, $u_1 = dx/dt$

$$(dt)^2(c^2 - u^2) = (dt)^2\gamma(v)^2\left(1 - v\frac{u_1}{c^2}\right)^2(c^2 - u'^2)$$

Ora ci si può liberare di $(dt)^2$, e si ottiene

$$\frac{(c^2 - u^2)}{(c^2 - u'^2)} = \gamma(v)^2\left(1 - v\frac{u_1}{c^2}\right)^2$$

Dividendo per $c^2$ numeratore e denominatore del membro di sinistra ed estraendo la radice quadrata , si ottiene:

$$\sqrt{\frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{\gamma(u')}{\gamma(u)} = \gamma(v)\ \left(1 - v\frac{u_1}{c^2}\right)$$

**Che è quanto volevasi dimostrare.**

Come si vede, per ottenere queste formule bisogna ricavare le formule di trasformazione del "fattore di Lorentz" nel passare da un sistema inerziale a un altro, ciò che richiede una certa quantità di spazio e di lavoro, tanto più che penso che la trasformazione del fattore di Lorentz sia, di tutta la cinematica elementare della relatività ristretta, la relazione meno ovvia. Ma, soprattutto, occorre notare che le formule non hanno la forma delle trasformazioni di Lorentz come le conosciamo. E questo è un altro problema, se si vuole lavorare con la forza newtoniana invece che con la forza di Minkowski, in quanto **per la forza newtoniana occorre utilizzare le speciali formule di trasformazione date in (vi),** per il passaggio da un sistema inerziale a un altro. Per questo, l'uso della forza newtoniana non è frequente in relatività ristretta, e, torno a dire, in fin dei conti la mia "risposta lunga" è lo svolgimento di un esercizio non banalissimo, quasi fine a se stesso.