



*Chi ha inventato i numeri
immaginari e complessi?*

Daino Equinoziale, aprile 2022

Risposta (un po' ampliata) a una domanda comparsa su Quora:

Chi ha inventato i numeri immaginari e complessi?

Buona domanda, perché si dimentica sovente che questa, che probabilmente in matematica è la seconda scoperta (o invenzione) in ordine di importanza, dopo quella dei numeri naturali, è una gloria dimenticata, del tutto italiana. Possiamo tranquillamente dire che per una cinquantina d'anni i numeri immaginari e complessi furono studiati solo in Italia, e mentre oggi veniamo informati che in ogni campo della matematica i primi sono stati gli Arabi, o gli Indiani, o i Cinesi, in nessuna cultura appare l'intuizione dell'esistenza dei numeri immaginari o complessi. Che io sappia, l'unico che, più che scoprire i numeri immaginari, mancò l'occasione di farlo, fu **Erone Alessandrino**, fine del I secolo dopo Cristo ([A Complex Mistake?](#)) (1)

Il fatto è che mentre la natura, la geometria, e l'esperienza in vari settori pratici spingevano al *progresso sulla "linea" dei numeri reali* (naturali, interi (positivi e negativi - questi ultimi accettati assai tardi), razionali e irrazionali, trascendenti, finiti e infinitesimi (questi ultimi abbandonati fino alla comparsa dei numeri surreali di Conway, 1974), reali - canonizzati da Cantor solo nel 1872), la medesima natura, geometria ed esperienza vietavano di procedere sulla via dei numeri complessi. Penso che oltre a Erone furono molti quelli che, nel risolvere un'equazione di secondo grado, si imbatterono nella radice quadrata di un numero negativo: questa, per quanto se ne sapeva, non esisteva, e quindi era interpretata come il modo della matematica di dire ai suoi cultori "**l'equazione è insolubile**". E si poteva provare che aveva perfettamente ragione.

Il vantaggio delle radici quadrate, che di norma risolvevano le equazioni di secondo grado, era che effettivamente, se c'era una radice quadrata di un numero negativo, ne uscivano due soluzioni, entrambe impossibili, cioè l'equazione non aveva soluzioni, sentenza inappellabile.



Girolamo Cardano

Per quanto ne so, il primo a cercare di andare oltre fu **Girolamo Cardano (1501-1576)**. Egli pubblicò nel 1545 un testo che sperava restasse fondamentale della nuova algebra (2), e citò il problema di trovare due numeri la cui somma è $x + y = 10$, e il prodotto $xy = 40$. Questo era uno dei modi più antichi di arrivare a un'equazione di secondo grado, in questo caso

$$x^2 - 10x + 40 = 0.$$

L'equazione, se non ci si arresta alle radici quadrate, dà come risultato due numeri,

$$5 \pm \sqrt{-15}$$

Ma Cardano non si fermò qui, come tutti i suoi predecessori, ed eseguì la somma, che dà 10, e il prodotto, usando la regola $(a+b)(a-b)$, che dà 40. Dunque il risultato algebrico era esatto, ma nessun geometra avrebbe potuto disegnare un rettangolo con lati $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$, e nessun falegname avrebbe potuto costruire un tavolo con quei due lati. Cardano chiamò i numeri "sostituti", e concluse: *"Così procede la sottigliezza aritmetica, fino a questo estremo, che è tanto sottile quanto inutile"*.

Nella sua *Ars Magna*, dove sono stampate per la prima volta le formule per la risoluzione delle equazioni di terzo grado (dovuta questa a **Scipione Del Ferro**, circa 1515, e **Niccolò Tartaglia**, 1535) e di quarto grado (dovuta al precoce genio matematico **Ludovico Ferrari**, a cui il compito fu affidato dal suo mentore, Cardano, intorno al 1540), egli non include i numeri immaginari o sostituti. Vale la pena sottolineare che per diversi decenni le soluzioni delle equazioni di terzo e di quarto grado furono monopolio degli algebristi italiani.



Scipione del Ferro



Niccolò Tartaglia



Ludovico Ferrari

La frase citata, e il silenzio sui "numeri sostituti" nell'*Ars Magna*, hanno suggerito ad alcuni che Cardano ripudiò i numeri immaginari, e quindi non può esserne detto lo scopritore. Il fatto è che continuò a studiarli in opere successive e dimostrò che essi non potevano essere

né numeri positivi né negativi. Tuttavia li trattava come se avessero una loro esistenza. Piccoli passi, ma passi in un mondo nuovo. E si noti che ai suoi tempi, neanche i numeri negativi erano accettati dai matematici "seri", e perfino Leibniz accettava la qualifica di "false", data da Descartes alle soluzioni negative delle equazioni.

L' "**Ars Magna**" fu pubblicata nel 1545, ma già da alcuni anni Cardano si era nuovamente imbattuto nei numeri immaginari, e questa volta lo scontro era stato frontale. Nel marzo del 1539 egli aveva finalmente ottenuto da Tartaglia la sospirata formula per la soluzione dell'equazione di terzo grado (3), anche se era stato costretto a impegnarsi a non pubblicare il risultato prima che Tartaglia lo avesse fatto (4). Subito si era gettato ad esplorare l'equazione, verificando la validità della formula di Del Ferro-Tartaglia. Durante questo esercizio si imbatté nella ormai ben nota (a chi è nota) equazione (*)

$$x^3 - 15x = 4$$

con soluzione

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt[3]{-121}}$$

Di fronte alle due radici quadrate di -121, Cardano non sapeva esattamente che fare. In agosto si risolse a chiedere lumi a Tartaglia. Questi, già pentito di aver rivelato la formula "segreta" a Cardano, lo trattò a male parole. *Ma il problema era assai più grave, e scuoteva i fondamenti stessi della fede dei matematici nell'algebra.* Cardano sapeva infatti che (come si può subito verificare) il valore $x = 4$ risolve l'equazione. Come era possibile che l'algebra avvertisse i suoi cultori che l'equazione era insolubile e con questa menzogna tentasse di distoglierli dallo scoprire che 4 è una soluzione? Non si poteva neanche più credere all'algebra, cioè alla matematica, la scienza esatta per eccellenza? Per ora, questo caso ebbe il nome di "*casus irreducibilis*".

Entra qui in scena **Raffaele Bombelli (1526–1572)**, l'ultimo dei cinque grandi algebristi italiani del Rinascimento. Questi era un giovane ingegnere civile, ammiratore e, alla lontana, discepolo di Cardano. Penso che si dedicò alla matematica quasi come hobby, che lo portò a scrivere in italiano, ad uso dei matematici dilettanti (come suggerisce nel titolo), un'**Algebra**, probabilmente intorno al 1550. L'opera fu pubblicata nel 1572, con la promessa di aggiungervi due altri volumi, promessa che restò per allora incompiuta (5). Per quanto Cardano si fosse trasferito a Roma nel 1571, non mi risulta che vi incontrò Bombelli.



Rafael Bombelli

Bombelli utilizzò un suo formalismo efficiente (che però fu presto soppiantato da quello di **Viète** (6)) e diede un'organica presentazione della soluzione delle equazioni del terzo e del quarto grado. In particolare trattò il **casus irreducibilis**.

Con notazione moderna (la lettera **i** per indicare la radice quadrata di -1 risale a **Euler**, 1707-1783, duecento anni dopo), la soluzione dell'equazione (*) è scritta:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$$

La soluzione x , per Bombelli, non poteva essere altro che un "**numero complesso**", di cui possiamo considerarlo l'inventore (o lo scopritore), cioè composto di una parte reale e di una parte immaginaria, e lo stesso dovevano essere i due addendi. Questa è un'affermazione che include anche i numeri reali "puri" e i numeri immaginari "puri," se l'altro addendo è nullo. Inoltre, Bombelli aveva notato che i due radicandi erano "**complessi coniugati**," altra sua scoperta, cioè avevano parti reali eguali e parti immaginarie di segno opposto. Infine, Bombelli aveva scoperto che una potenza (qui, per esempio la potenza 3, o anche $1/3$) di un numero complesso coniugato era il complesso coniugato della potenza. In altre parole, i due addendi dovevano essere i complessi coniugati l'uno dell'altro e si poteva scrivere $x = (P+iQ) + (P-iQ) = 2P$, numero reale.

Restava solo da determinare i valori P e Q . La "norma" di $P+iQ$ (e $P-iQ$) è, per definizione, $(P+iQ)(P-iQ) = P^2 + Q^2$. Questo è un numero reale, su cui si possono eseguire le normali operazioni, inclusa l'estrazione di radice.

Quindi, il prodotto

$$\sqrt{2 + 11i} \sqrt{2 - 11i} = \sqrt{4 + 121} = 5 = P^2 + Q^2$$

Bombelli afferma che per la soluzione procedette "a tentoni". Forse tentò anzitutto con numeri interi (dopo tutto già sapeva che la soluzione doveva essere 4) e notò che 5 può essere scomposto in un solo modo in due quadrati, cioè 4 e 1. Ciò significa che i numeri dovevano essere o $1 + 2i$ o $2 + i$ e rispettivi complessi coniugati. Calcolando il cubo di $P + iQ$ avrebbe dovuto ottenere $2 + 11i$. Eguagliando le parti reali e le parti immaginarie, ottenne con facile esercizio che solo la soluzione $(2 + i)$ e $(2 - i)$ era valida, **e la somma dei due numeri complessi coniugati è 4, come dovevasi dimostrare.**

Questo risultato apparve poco meno che miracoloso. Da una formula irta di radici quadrate e cubiche esce un numero intero, anzi, il numero intero che si può verificare essere la soluzione dell'equazione (in realtà l'equazione ha due altre soluzioni reali, ma negative, e quindi, "false" secondo i criteri del tempo.)

Fu come il crollo di una diga: Viète trovò un formalismo più efficace, **Descartes** battezzò i numeri, che Cardano aveva battezzato "**sofistici**" e Bombelli "**silvestri**" (5), come **immaginari**. **Euler** introdusse, come annunciato la **lettera i** (6) per indicare la radice quadrata di -1, la cosiddetta unità immaginaria. Ne nacque anche la "più bella formula della matematica" (così chiamata da vari entusiasti):

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Wessel, Argand e Gauss presentarono una rappresentazione vettoriale dei numeri complessi in un apposito "piano complesso", simile al piano Cartesiano, in cui però l'asse y è l'asse immaginario. Altre rappresentazioni seguirono: coppie ordinate di numeri; matrici. Ne venne una marea di teoremi e di risultati, che completarono risultati incompleti. Si ebbe anche un intero "calcolo con variabili complesse", che ampliarono anche lo studio dell'aritmetica (per esempio con gli interi Gaussiani e con la teoria analitica dei numeri, e la funzione Zeta di Riemann per soprappiù) e, finalmente, anche della geometria (elementi complessi del piano cartesiano; rette isotrope etc.). E' come se la matematica, prima dei numeri immaginari, fosse stato un viaggio lungo una strada rettilinea, per esempio in val Padana, immersa in fitta nebbia, che permette solo di vedere sì e no la strada. Con i numeri complessi sorge il Sole e a poco a poco si svela un panorama grandioso, fino alle Alpi e agli Appennini.

Ma, mentre si era stabilito finalmente anche un ponte con la geometria, che accettava elementi che non potevano essere disegnati, **mancava una connessione con la natura**. Infatti, fino al Novecento, non ci si era ancora imbattuti in problemi che si potessero risolvere unicamente ricorrendo ai numeri complessi. Questi erano solo un espediente comodo in fisica matematica, che aiutava a trattare in modo compatto taluni problemi, ad esempio le onde. In certo senso, la matematica parlava ormai il linguaggio dei numeri complessi, mentre la natura si ostinava a parlare il linguaggio dei numeri reali (e in pratica razionali).

Tutto ciò cambiò in un batter d'occhio, nel quinquennio 1925–1930, in quanto **Schroedinger** nel 1925 produsse l'equazione che porta il suo nome ed è la base della meccanica

quantistica non relativistica, mentre Dirac nel 1928 produsse la sua equazione, che è alla base della meccanica quantistica relativistica:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (\text{Schroedinger equation, 1925})$$

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0 \quad (\text{Dirac equation, 1928})$$

In entrambe compare l'insostituibile i , il che lasciò perplesso Schroedinger (per non parlar del suo celebre gatto), che continuò a considerarla una sorta di macchia in una bella teoria. Ma c'era poco da fare. La fisica che sta alla base del nostro universo parla anch'essa il linguaggio dei numeri complessi.

Certamente nessuno dei combattivi algebristi del Rinascimento italiano poteva immaginare un futuro simile per la loro invenzione (o scoperta?). Tuttavia, mi piace pensare che Bombelli abbia fatto il suo lavoro monumentale sui numeri complessi perché aveva intravisto il nuovo mondo che stava per aprirsi davanti ai futuri matematici e fisici.

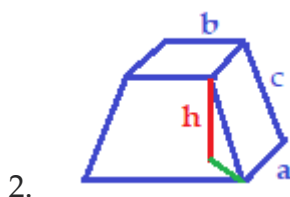
Non sarebbe stato l'unico italiano che, **mutatis mutandis**, ebbe una grandiosa visione, durante il Rinascimento italiano.



Simbolica rappresentazione della matematica con i soli numeri reali

NOTE

1. Erone, nella sua *"Stereometria"*, diede la formula per il calcolo dell'altezza (h) di un tronco di piramide a base quadrata, dati i lati del quadrato di base (a), del quadrato superiore (b), e la lunghezza della congiungente di un estremo del quadrato di base con l'estremo corrispondente del quadrato superiore (c).



La formula è facilmente ricavabile, (<https://plus.maths.org/content/how-high-your-frustum-0>) ed è:

$$h = \sqrt{c^2 - \frac{(a - b)^2}{2}}$$

Erone diede alcuni esempi validi, e, per motivi non noti, diede anche il risultato per $a=28$, $b = 4$, $c= 15$. Inserendo questi valori, si trova che $h = \sqrt{225 - 288} = \sqrt{-63}$. Non è chiaro se Erone si fermò qui, come tutti avrebbero fatto, concludendo che un tronco di piramide con quelle misure era impossibile, ciò che secondo me era lo scopo di Erone dimostrare. Invece, o lui (e mi parrebbe strano), o un volonteroso copista semplicemente scrisse $h = \sqrt{+63}$. ($= 3\sqrt{7} = 7.93$), che è un errore, fatto senza giustificazione – e senza seguito.

2. Titolo: "*Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus* " (anche nota come *Ars magna*), Nuremberg, 1545,
3. Questa soluzione gli era stata data sotto forma di un "capitolo" di 25 versi, in terzine incatenate, dal celebre inizio: "**Quando che 'l cubo con le cose appresso....**", dove la "cosa" è l'incognita. Bisogna ricordare che a quel tempo non esisteva il nostro pratico formalismo, a cui diede inizio il Viète cinquant'anni più tardi.
4. La pubblicazione dell'*Ars Magna* fu occasione di una furiosa polemica tra Tartaglia e Cardano, quest'ultimo per interposta persona, cioè il brillante allievo Ferrari. La polemica si prolungò fino al 1548, e Tartaglia ne uscì soccombente. Ma questa è un'altra, pur avvincente, storia.
5. *L'Algebra, opera di Rafael Bombelli da Bologna, divisa in tre libri con la quale ciascuno da sé potrà venire in perfetta cognitione della teoria dell'Aritmetica*), 1572. Altri due libri restarono manoscritti, furono scoperti nel 1923 e furono pubblicati nel 1929.
6. Viète nei riguardi dei numeri immaginari fu assai guardingo, e si credette in passato che non li considerasse molto. Essi tuttavia appaiono più o meno indirettamente in taluni problemi geometrici da lui presentati. Del resto, la sua ingegnosa soluzione dell'equazione di terzo grado per mezzo di funzioni trigonometriche sembra suggerire che *Viète voleva aggirare il casus irreducibilis*, anziché affrontarlo direttamente utilizzando il calcolo con numeri complessi.

7. L'attribuzione dell'invenzione del simbolo i per indicare l'unità immaginaria, non è così diretta, né l'adozione avvenne d'un tratto. A quanto pare Euler se ne servì solo in un manoscritto del 1777, tardi, si pensa, perché precedentemente Euler aveva adottato i per indicare un numero infinito (Wallis aveva preferito il segno ∞ , che rimase) o addirittura un numero *tendente* a infinito, includendo nel simbolo il concetto di "limite per numero tendente ad infinito". Il manoscritto di Euler fu pubblicato nel 1794, dopo la sua morte avvenuta nel 1783.

Secondo il Boyer, fu l'adozione di i da parte di Gauss nelle sue "*Disquisitiones arithmeticae*", del 1801, a fissare una volta per tutte il simbolo i come unità immaginaria. (*A history of mathematics*, by Carl Benjamin Boyer, 1991). Confesso che la citazione delle *Disquisitiones Arithmeticae* non mi sembra corretta: ho scorso il libro, forse affrettatamente, e non ho trovato la i (o meglio, di i ne ho trovate, ma nel giusto contesto). Del resto, ancora nel 1815, Gauss, nell'articolo in cui porgeva una seconda dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra (la prima era del 1799), usava il simbolo $\sqrt{-1}$. Tuttavia, nel 1821, nella *Theoria residuorum biquadraticorum*, Gauss introduce gli interi gaussiani, e usa decisamente la i ("indicando con i , d'ordinario (*pro more*) la $\sqrt{-1}$."). Se si vuole far risalire a Gauss la propagazione del simbolo i , probabilmente questo è il saggio a cui occorre far riferimento.

Ma Cauchy, nel suo celebre "*Cours d'Analyse*" (1821), usa ancora e soltanto $\sqrt{-1}$.

8. Penso che il nome "silvestri" sia stato suggerito a Bombelli da una frase che Cardano aveva posto nella sua Algebra: "*non si possono fare operazioni e non si può andare a caccia (venari) della sua natura*", con una metafora sulla caccia. I numeri sofisticici erano da Bombelli paragonati ad animali capaci di restare nascosti nella selva.

FIGURE:

Due esempi di ciò che succede ad estendere al campo complesso concetti matematici tradizionalmente limitati al campo reale.

1) Numeri primi

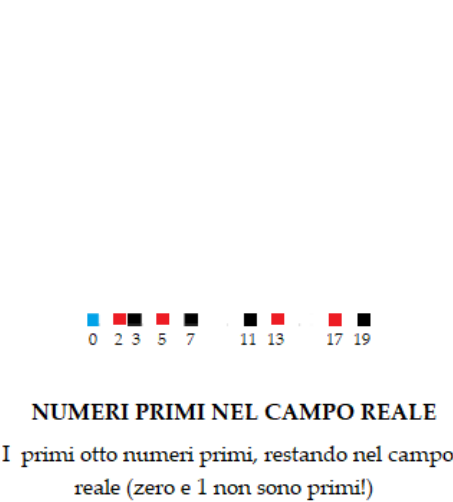
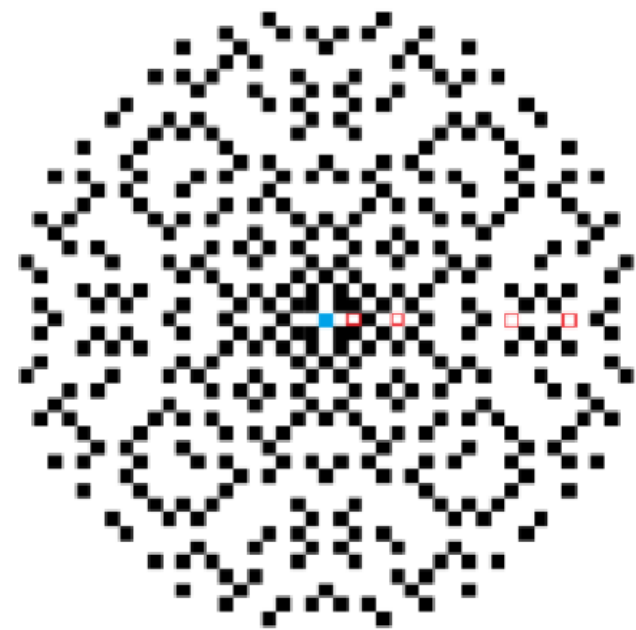


Fig 1.1



NUMERI PRIMI GAUSSIANI, estesi al piano complesso.

I numeri in rosso non sono più primi; in compenso abbiamo guadagnato i numeri primi negativi, oltre a quelli complessi.

Fig.1.2

2) La funzione Zeta di Riemann, o $\zeta(s)$, ove $s = \sigma + it$

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{Eq.2.1}$$

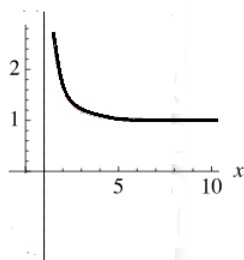


Fig.2.1

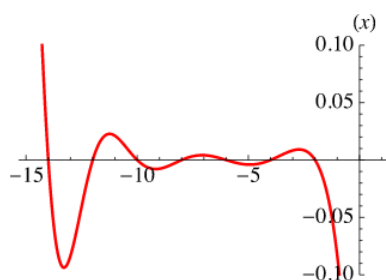


Fig.2.2

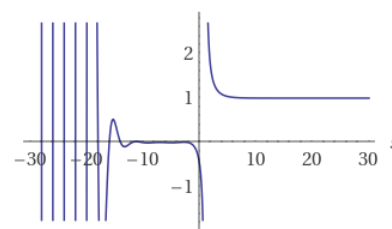


Fig.2.3

Fig.2.1: la funzione Zeta quale risulta da Eq 2.1, per s reale. In altre parole, la funzione Zeta come sarebbe se non si conoscessero i numeri immaginari.

Fig.2.2: Estensione a valori di Zeta per s negativo, che possono ottenersi estendendo la Zeta al campo complesso.

Fig.2.3: La funzione Zeta sull'asse reale, ottenuta unendo Fig.2.1 e 2.2. Si notino le diverse scale.

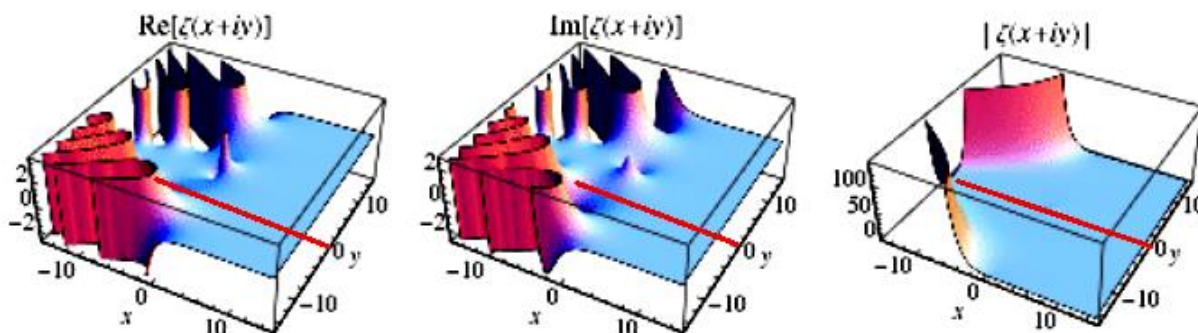


Fig.2.4

Parte reale, parte immaginaria e modulo della funzione complessa $\zeta(x+iy)$. In rosso l'asse reale, sul quale conosciamo i valori della funzione reale, dati in Fig.2.3 (si noti che sul piano azzurro nelle tre figure per la parte reale, la parte immaginaria e il modulo o valore assoluto, le tre funzioni hanno valore (altezza) =1

(<https://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html>)

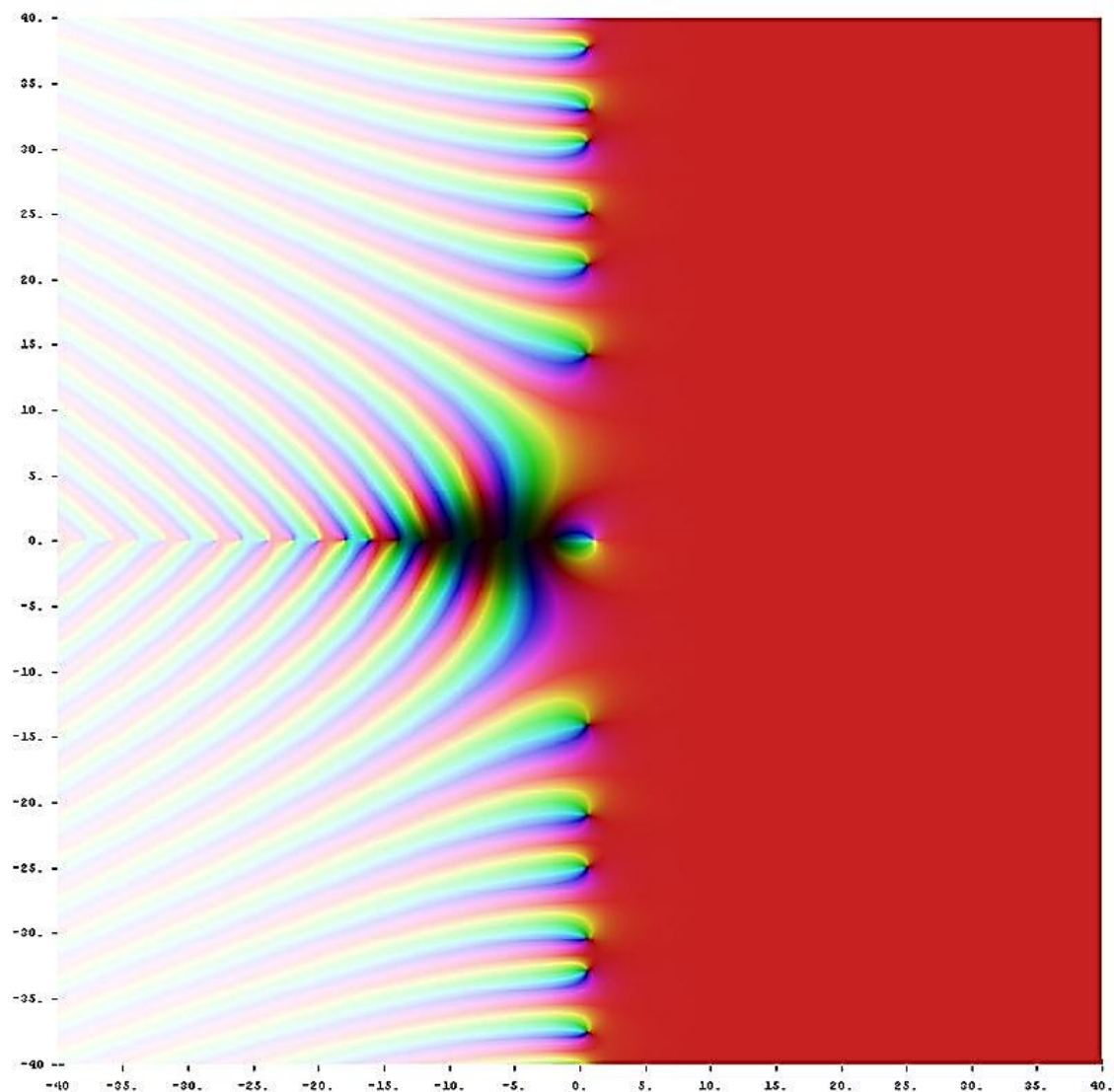
Una figura riassuntiva è data in

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1b/Complex_zeta.jpg

Autore: Jan Homann, Public domain, via Wikimedia Commons

Le spiegazioni non sono molte, né del tutto chiare. Una spiegazione abbreviata, e neppure essa del tutto chiara, si trova in https://de.wikipedia.org/wiki/Riemannsche_Zeta-Funktion. Ma almeno si può ottenere un'idea di quello che succede attribuendo valori

complessi alla s in Eq.2.1. I famosi zeri soli dei punti neri discernibili agli estremi delle “lingue” (in realtà catene di montagne altissime) provenienti da sinistra.



Grafici e diagrammi sul piano complesso mi paiono impressionanti. Si pensi ora che la funzione Zeta si estende all'infinito...