RIFLESSIONI SULL’INFINITO

Risposta a una domanda comparsa su Quora: Che riflessioni si generano nella tua mente quando mediti sul concetto di "infinito"?

Constant Signs	Gödel Number	Meaning
$\sim$	1	not
$\vee$	2	or
$\supset$	3	If . . . then
$\exists$	4	There is an . . .
$=$	5	equals
0	6	zero
s	7	The immediate successor of
(	8	punctuation mark
)	9	punctuation mark
,	10	punctuation mark

Fig.1

Valori assegnati da Gödel ad alcuni simboli logici.
(da Neumann e Nagel: Gödel’s Proof, 1958)

Molte riflessioni.

Ad esempio, ogni tanto mi trovo a riflettere sulla codificazione di una parola per mezzo dei numeri primi. Il metodo si chiama anche Gödelizzazione, dal nome del suo illustre inventore. Si noti che non parlo di crittografare, ma solo codificare una parola. In questo caso, ad esempio, una parola viene trasformata in un numero, e chiunque, almeno in linea di principio, la potrà decodificare senza difficoltà basandosi su un antico teorema di aritmetica (Lemma di Euclide, Teorema ”fondamentale dell’aritmetica” di Gauss).

L’idea di partenza è semplice: i numeri primi sono infiniti e noti o in linea di principio identificabili fino all’infinito. Supponiamo di creare una semplice tavola di sostituzione delle lettere dell’alfabeto e altri simboli con numeri. Per esempio: A=1, B=2, C=3, D=4 etc. (Credo che bastino centomila numeri per codificare qualsiasi simbolo che sia o sia stato usato nella scrittura umana, considerando che i Cinesi, da soli, ne hanno fabbricati circa 45000.)

Noi conosciamo ormai un bel numero di numeri primi in ordine uno dietro l'altro. Oggi (2022) credo che il numero primo più grande noto (senza saltarne alcuno) abbia almeno 10^{18} cifre.

Supponiamo di voler codificare la parola ADA. Costruiamo il numero $2^1 3^4 5^1 = 810$. Dico che questo da solo codifica ADA. Come? Risposta: scomponendo il numero in fattori primi (il teorema fondamentale dell'aritmetica ci assicura che ogni numero ha un'unica scomposizione in fattori primi) troviamo le tre coppie (base, esponente) = (**2**,1); (**3**, 4); (**5**,1), in cui le basi sono i tre primi numeri primi in ordine numerico partendo da 2, e gli esponenti provengono dalla tavola di sostituzione dell'alfabeto e altri simboli abbozzata sopra.

Notiamo due punti importanti:

1) Se cambiamo l'ordine delle lettere, il numero cambia. Per esempio AAD = $2^1 3^1 5^4 = 3750$.

2) Come mostra il punto (1), non è che il metodo assicuri un'economia di caratteri. Anzi, proprio al contrario: ad esempio, la parola "uzzo" (a proposito, che significa?), sarebbe codificata come $2^{19} 3^{21} 5^{21} 7^{13}$ = 25337331758659069590525000000000000000000, con poco guadagno di spazio.

Ma c'è di più. L'intera Divina Commedia, con 408476 caratteri, a cui bisognerebbe aggiungere almeno gli spazi (ma è inutile andare per il sottile) (https://edizionidodici.wordpress.com/2008/01/11/analisi-statistica-della-divina-commedia-1/)

termina con la lettera E, che nel nostro caso vale 5. Quindi l'ultimo *fattore* nella Divina Commedia vale (408476-esimo numero primo = 5931313)^5 = 7340982917681527403100279038967793.

Tanto per esercizio, e per introdurre almeno un concetto poco noto, osservo che il prodotto dei numeri primi consecutivi fino all'ennesimo primo p_n si chiama ***primoriale*** ed è scritto come $p_n\#$. Inoltre, un teorema afferma che, asintoticamente:

$$p_n\# \sim e^{n \ln(n)}$$

Nel nostro caso, $n = 408476$ e $n\, ln(n) = 5.28\ 10^6$.

Nella Divina Commedia la nostra semplice codificazione implica che ogni numero primo abbia un esponente. *Faute de mieux* si può calcolare un *esponente medio* φ dato dalla seguente formula, che rappresenta la media dei valori numerici delle lettere dell'alfabeto pesati con la loro frequenza (in lingua italiana):

$$\varphi = \sum_{k=1}^{21} k(w(k)$$

Le frequenze w(k) sono estratte da https://it.wikipedia.org/wiki/Analisi_delle_frequenze .

Esse sono le frequenze delle lettere nell'italiano moderno, non quelle del 1300. Tuttavia, non conosciamo esattamente le lettere usate da Dante, e ci sono (piccole) differenze nelle varie edizioni. Per l'Italiano moderno, ottengo φ = 9.83. Dunque il Numero di Gödel per la Divina Commedia, GDC, è all'incirca:

$$GDC = (Exp(5.28\ 10^6))^{9.83} = 8.27 \times 10^{22540925}$$

Questo è un numeretto con 22540925 cifre (circa), che non scriverò, perché occuperebbe 11270 pagine di 2000 caratteri l'una. Molte. E questo solo per la Divina Commedia.

Ma possiamo ubriacarci di grandi numeri pensando di rilegare in un unico volume e codificare in un unico numero l'intera Libreria del Congresso o la British Library, che catalogano entrambe tra 170 e 200 milioni di documenti, anche se non tutti lunghi come la Divina Commedia. Eppure tutti i documenti potrebbero essere recuperati senza ambiguità da quest'unico numero, scomponendolo in fattori primi. Lascio come compito all'interessato la valutazione di questi grandi numeri. Il paziente potrà poi meditare sul fatto che questi numeri non sono neanche l'inizio dell'infinito. E non sarebbe neppure la biblioteca di Babilonia cara a Borges, perché, decodificando il numero, si otterrebbe una collezione di tutte le opere della biblioteca presa in esame, opere esistenti, e non una serie di collezioni di lettere dell'alfabeto e simili, prese a caso, che normalmente non avranno alcun significato.

Tutto ciò è solo per dare un 'idea del cammino che vogliamo seguire. Il numero di Gödel non fu certo inventato per questi giochetti, ma come meccanismo per identificare (con un sol numero e in modo univoco) un enunciato in un sistema logico, utilizzato per la dimostrazione dei suoi celebri teoremi. Certamente i simboli logici e matematici finora inventati sono meno di 1000, anche se non sono certo che restino così pochi nei possibili millenni a venire (in Fig.1 è riprodotta la condificzione dei primi dieci simboli utilizzata da Gödel).Va bene che ci vorrebbe il suo tempo, ma non si sa mai – qui siamo alle soglie dell'infinito e dell'eternità. Un esempio lo troviamo su en.wikipedia, per la quale secondo la codificazione riportata da Nagel e Neumann, **0=0** viene codificato come 243000000. Scomponendo, si trovano in ordine le coppie (2,6), (3,5), (5,6), da cui si deduce che 0 viene codificato con 6, e "=" con 5, come da Fig.1.

D'altra parte qui non siamo interessati all'uso che Gödel fece di questo meccanismo. Troppo difficile. Più modestamente possiamo accettare che il suo sistema possa codificare gli enunciati di tutti i teoremi della matematica, e magari anche la loro dimostrazione.

Ma quanti sono i teoremi della matematica? La domanda può essere considerata più o meno imprecisa, ma il problema può essere aggirato calcolando invece quanti articoli di ricerca matematica (non *sulla* ricerca matematica, e quindi non unicamente divulgativi) vengono correntemente pubblicati. Secondo valutazioni abbastanza precise (Association of Research Libraries (http://www.arl.org/sc/subversive/viii-a-researchers-perspective.shtml): Reference: https://www.physicsforums.com/threads/how-many-theorems-are-there-in-mathematics.323235/) intorno al 2010 venivano pubblicati annualmente circa 50000 articoli all'anno, e il numero raddoppiava ogni 10 anni. Ne risulterebbero, pubblicati fino al 2010, circa 1000000 articoli (più altri 500000 nei dieci anni successivi?) Non tutti, naturalmente, introducono in matematica un nuovo teorema, ma per una stima grossolana ciò non importa.

Tuttavia, supponendo di averli rilegati tutti insieme, e che ogni articolo sia lungo in media 20000 caratteri, avremmo bisogno di conoscere 20 miliardi di numeri primi. In verità ne basteranno assai meno, se codificheremo solo gli enunciati dei teoremi nuovi dimostrati nei vari lavori, ma tanto vale. Come ho scritto più sopra, noi conosciamo i numeri primi almeno fino a 10^{18} (il numero cresce abbastanza regolarmente), largamente sufficienti per codificare tutti gli articoli di matematica sinora prodotti , uno dietro l'altro.

Ora supponiamo di limitarci a costruire soltanto gli enunciati, e di non rilegarli insieme, ma di considerarli uno alla volta. E, in qualche modo, di considerarli tutti. Tutti saranno quindi della forma (finita):

$$2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}7^{\delta}\ldots$$

E noi possiamo procedere verso l'infinito in modo ordinato, cioè allungando l'enunciato (aumentando ordinatamente il numero di numeri primi che lo costituiscono) e dando tutti i valori possibili agli esponenti, da 0 al massimo, che corrisponde al numero di simboli matematici e logici esistenti. Naturalmente, solo una piccola percentuale dei numeri naturali così ottenuti corrisponderebbe a un enunciato formalmente corretto di un teorema.

Gli enunciati andrebbero dimostrati, ma noi possiamo pensare di affidarne la dimostrazione agli uomini, se si tratta di teoremi semplici, o, in futuro, ad altri calcolatori, operanti con la famosa AI, in grado di dimostrare teoremi dagli enunciati lunghissimi (sto parlando di enunciati di migliaia di pagine) o dalla dimostrazione lunghissima. D'altra parte, potremmo anche trovare, prima o poi, le dimostrazioni opportunamente gödelizzate, e, una volta trovate, si tratterebbe solo di verificarne la validità. (Devo notare che , mentre l'enunciato può essere gödelizzato, non è detto che la dimostrazione possa esserlo anch'essa: forse altri metodi di dimostrazione "informali" esistono. Non lo si può escludere.) Ad ogni modo, un teorema formalmente corretto può avere solo quattro risposte: "Mal formulato, Vero, Falso, Non decidibile". I primi li possiamo scartare, ma quelli che danno una delle tre successive risposte *in ogni caso* esprimono una nuova verità matematica. La più insidiosa è l'ultima risposta, che con la sua comparsa richiederebbe di aprire due o più rami alternativi della matematica, come le varie geometrie che furono introdotte dalla non–decidibilità del V. Postulato di Euclide, (esistenza e unicità di una parallela a una retta per un punto dato fuori di essa) trasformato in teorema.

La domanda che allora si presenta è se, poiché i numeri sono infiniti, possiamo ***escludere*** che, camminando verso l'infinito, noi continuiamo a trovare, verosimilmente in media sempre più distanti fra loro, numeri naturali che codificano *sempre nuovi* enunciati matematici, formalmente validi e ben formulati, anche se da dimostrarsi, che per la loro gödelizzazione richiedono numeri primi di ordine sterminato, ben al di là di ciò che esseri umani o artificiali inventati dall'uomo possano decodificare. In altre parole se possiamo escludere l'esistenza di tre serie infinite di teoremi veri, o falsi, o non decidibili. Per conto mio penso che ciò non si possa escludere, e continuerò a non crederlo, a meno che non compaia un teorema che dimostra che al di là di un dato numero Ω, grande quanto basta, non esistono più altri numeri naturali che, decodificati, aggiungano l'enunciato di un teorema matematico nuovo e valido alla già sterminata popolazione dei teoremi noti.

In verità, mi sembrerebbe assai presuntuoso dire che siamo già vicini ad aver scoperto tutto in matematica, e che non possono esistere, nell'infinito reame dei numeri, infiniti numeri che codificano verità matematiche che non si conoscono ancora, o, addirittura, che non si conosceranno mai. E intendo che non solo non le conosceranno mai gli uomini, ma non potranno neppure essere decifrate da calcolatori grandi come l'intera Galassia, non necessariamente per incapacità, ma, come vedremo, almeno per pura mancanza di tempo.

So bene che quanto ho scritto non dimostra nulla, ma a mio parere dà un forte sostegno ad una comune interpretazione dei teoremi di Gödel, che la matematica ha prospettive di sviluppo infinito.

Ma quale affermazione si potrebbe fare circa ***l'esistenza*** di queste entità matematiche così lontane da noi e praticamente per sempre irraggiungibili? Possiamo dire che esse esistono anche se sono inconoscibili? A me pare che, soprattutto se non le potremo conoscere mai, dobbiamo dedurre che esse, non solo esistono, ma hanno un'esistenza propria, indipendente da noi, e ciò renderebbe altamente improbabile la teoria che *tutti quanti* i numeri sono inventati dagli uomini. Come si può affermare di aver inventato ***qualcosa*** che nessun essere, naturale o artificiale, potrà mai conoscere, se non altro perché, anche se l'universo è eterno, come affermano i moderni modelli cosmologici che hanno maggior credito oggi, le presenti teorie prevedono che esso sia largamente invivibile dopo un limitato (…) periodo di tempo? **(NOTA 1).** Come si può affermare che noi stessi, limitati esseri umani, abbiamo già inventato o inventeremo questi infiniti ***qualcosa*** che ci trascenderanno per sempre?

Concludo dicendo che l'esistenza dei numeri e delle verità matematiche che con loro abbiamo connesso, è evidentemente un'esistenza diversa dalla nostra. Queste entità matematiche, a cominciare dagli umili numeri naturali, sono immateriali, eterne, indistruttibili, possono essere perfette e immutabili nel tempo, sono in ogni luogo (tutti hanno eseguito o stanno eseguendo l'addizione 2+2=4, senza che la provvista di 2 si esaurisca.) Per quanto ne sappiamo, l'unica proprietà che queste entità non posseggono, è l'autocoscienza. Hanno però, comunque, un'esistenza simile a quella delle idee platoniche, in particolare non senzienti. Gödel stesso sembra aver avuto un'opinione del genere, con la sua affermazione: "*Classi e concetti…possono essere concepiti come oggetti reali…che esistono indipendentemente dalle nostre definizioni e costruzioni. Mi sembra che assumere che tali oggetti esistano sia legittimo quanto l'assumere che esistano corpi fisici, e perciò che ci sia altrettanta ragione di credere nella loro esistenza*" (K. Gödel, citato da Nagel e Neumann, pag.100.)

Non credo che l'esistenza richieda l'esistere in un luogo. I numeri, che per me esistono, sono in ogni luogo, che è quasi come dire "in nessun luogo". Tuttavia, penso che Platone avrebbe detto che abitano l'Iperurano, come tutti gli archetipi.

La differenza tra l'Iperurano dei numeri e quello del "divino" (così lo chiamavano anche filosofi che non concordavano con lui)" Platone, è che, come si è detto, i numeri, per quanto ne sappiamo, sono entità non senzienti, e non abbiamo idea di quali altre entità esistano e abitino nel loro Iperurano o altri simili, ammesso che ce ne siano.

NOTA 1. A questo proposito, si può vedere, per una chiara e per quanto possibile esauriente esposizione, l'articolo "Timeline of the far future" https://en.wikipedia.org/wiki/Timeline_of_the_far_future. Questa è riassunta in italiano nella "Cronologia del futuro lontano", https://it.wikipedia.org/wiki/Cronologia_del_futuro_lontano

Secondo il primo riferimento, l'umanità si estinguerà totalmente al più tardi tra 100 milioni d'anni. Ma, se ci sembra troppo poco, intorno a 10^{43} anni da ora (giorno più giorno meno) tutti i nucleoni sarebbero decaduti, e i soli oggetti che sopravviverebbero nell'universo sarebbero i Buchi Neri, luoghi ove la vita umana e il funzionamento dei computer richiederebbero non trascurabili aggiustamenti.