Chi (e come) ha inventato i numeri immaginari e complessi?

Daino Equinoziale, Luglio-2022

Seconda edizione di un saggio da me scritto inizialmente in risposta a una domanda comparsa su Quora, che così chiedeva: *da quale scienziato è stato introdotto il numero complesso ?*

CHI (E COME) HA INVENTATO I NUMERI IMMAGINARI E COMPLESSI?

(Nel seguito, poiché non voglio schierarmi qui sulla controversia, se i numeri siano una scoperta o un'invenzione, preferisco scrivere invenzione/scoperta, senza fare una scelta. La mia personale opinione, che non occorre discutere qui, è che i numeri siano una scoperta, piuttosto che un'invenzione.)

I. Preparazione del panorama.

La domanda comparsa su Quora è un po' una sorpresa. Al giorno d'oggi, i numeri complessi sono in qualche modo accettati come parte dell'universo matematico, qualcosa che qualsiasi matematico dà per scontato, come l'aria per gli esseri umani. Così, non ci si interroga sui nomi degli innumeri scienziati che hanno contribuito all'invenzione/scoperta dei numeri naturali, e d'altra parte sarebbe inutile, perché si sono perduti nella notte dei tempi. I matematici che hanno inventato i numeri immaginari, invece, sono noti, ma i loro nomi ci sembrano insignificanti, e quindi sono sconosciuti o mal noti alla maggior parte delle persone che pure si occupano di matematica. Ciò è strano, soprattutto in Italia, perché si dimentica sovente che questa è una gloria dimenticata, del tutto italiana. Possiamo tranquillamente dire che per una quarantina d'anni i numeri immaginari e complessi furono studiati solo in Italia, dove furono scoperti/inventati. Non fu un'invenzione da poco: credo che, dopo la lunga e laboriosa invenzione/scoperta dei **numeri naturali**, l'invenzione/scoperta dei numeri immaginari (e relativi numeri complessi), *a posteriori*, sia **la seconda invenzione/scoperta più importante** nella storia della matematica, superando di gran lunga per importanza qualsiasi altro teorema o congettura matematica, inclusa la soluzione di qualsiasi presente o futuro "problema del Millennio", anche presi tutti insieme.

I numeri immaginari sono una sorta di spartiacque. Chi non ne sa niente, non se ne interessa, e (se ne sente parlare) si domanda scetticamente: "A che possono mai servire i numeri immaginari?", è condannato a ripiegare dallo spartiacque, a conoscere il minimo possibile di matematica, cioè le quattro operazioni, e a dimenticarle gradualmente grazie ai telefoni cellulari, che hanno tutti una calcolatrice incorporata. Egli rinuncia così al paesaggio prodigioso che si apre una volta raggiunto lo spartiacque, e in genere dimentica anche da dove lui stesso proviene.

E’ difficile immaginare la matematica o la fisica moderna senza numeri complessi. Suggerisco di dare un’occhiata al sito https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number, nella sezione “Applicazioni”, estremamente concisa, in cui poche parole individuano interi campi della matematica. Tanto per dare qualche esempio, mancherebbero o zoppicherebbero molte parti popolari della matematica: non ci sarebbero i più interessanti frattali (per esempio quello di Mandelbrot), non ci sarebbero – a prima vista - tre dei Clay Millennium Problems (ma ce ne sarebbero altri) e in particolare – orrore! – non esisterebbe la congettura di Riemann. La teoria del controllo e l’analisi dei segnali sarebbero severamente limitate, perché le varie trasformate (segnatamente quella di Fourier) non esisterebbero. La fisica sarebbe in buona parte confinata alla fisica classica, antecedente al 1900. Mentre non mancherebbe gran parte della relatività (ristretta e generale), mancherebbe all’appello la meccanica quantistica quale si intende oggi (saremmo fermi al primitivo modello di Bohr per l’atomo), la fisica nucleare o subnucleare sarebbe anch’essa a livello elementare, e finalmente non ci sarebbe nessun gatto di Schroedinger che nella sua scatola si domanda perplesso se è vivo o morto.

Seguire esclusivamente l'aritmetica classica e il calcolo delle variabili reali è come guidare in una mattinata di fitta nebbia lungo il rettilineo di un'autostrada nella pianura padana. Lungo la strada ci sono alberi, ponti, stazioni di servizio, città, motel, fast-food. Ma qualsiasi strada che si diparte dall’autostrada è bloccata al suo ingresso da segnali di "Vicolo cieco". Dietro alle facciate degli edifici c’è il vuoto. Di tanto in tanto c'è anche un blocco di polizia e un agente che dice minaccioso: "Ingresso vietato". Non si può uscire dall’autostrada, e una fitta nebbia ci convince che oltre quei segni c'è la “Terra del Nulla Matematico Assoluto”.

Fig.1

II. Originalità della scoperta dei numeri immaginari.

Oltre a quella prima ragione per rimanere stupefatti di fronte alla scoperta/invenzione dei numeri complessi, ce n'è una seconda. *Che io sappia, non c'è alcun accenno nella storia, che alcun matematico, di qualsiasi cultura, sia essa cinese, o indiana o araba, abbia mai avuto la più pallida idea dell'esistenza di numeri immaginari e complessi, oltre ad una ristretta cerchia, ben localizzata nel tempo e nello spazio, che vedremo.* Che io sappia, l'unico che, più che scoprire i numeri immaginari, mancò l'occasione di farlo, fu **Erone Alessandrino**, fine del I secolo dopo Cristo (A Complex Mistake?)

Vale la pena spiegare perché, a mio parere, Erone Alessandrino mancò l'idea di concepire i numeri immaginari (sul fatto che l'abbia mancata credo che l'opinione degli storici della matematica sia pressoché unanime).

Nella sua "*Stereometria*", Erone diede la formula per il calcolo dell'altezza (h) di un *frustum*, o tronco di piramide a base quadrata, dati i lati del quadrato di base (a), del quadrato superiore (b), e la lunghezza della congiungente di un estremo del quadrato di base con l' estremo corrispondente del quadrato superiore (c).

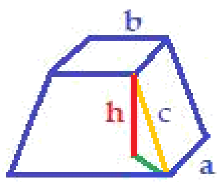


Fig.2

La formula è facilmente ricavabile, (si veda, in caso di disperazione, https://plus.maths.org/content/how-high-your-frustum-0) ed è:

$$h = \sqrt{c^2 - \frac{(a-b)^2}{2}}$$

Intuitivamente, che c non possa essere inferiore ad una data lunghezza, lo si vede disegnando il tronco di piramide schiacciato su un piano. È chiaro che esistono valori di c troppo piccoli, insufficienti a congiungere i vertici A-B, per cui il disegno del tronco di piramide corrispondente non può essere fatto. Se invece ***c*** è maggiore della distanza A-B, allora possiamo costruirci due tronchi di piramide, uno "sopra al foglio", con altezza $h > 0$, e uno al di sotto con $h < 0$. Perché due? Perché estraendo la radace quadrata di h^2 si ottengono due valori +h e –h.

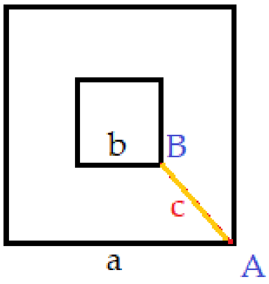


Fig.3

Erone diede alcuni esempi validi, e, per motivi non noti, diede anche il risultato per a=28, b = 4, c= 15. Inserendo questi valori, si trova che

$$h = \sqrt{225 - 288} = \sqrt{-63}$$

Poiché le equazioni quadratiche nei secoli avevano fornito diversi risultati contenenti radici quadrate di numeri negativi, impossibili come soluzioni, essendo noto che nessun numero, positivo o negativo, elevato al quadrato, produce un risultato negativo, è quasi certo che Erone non fu il primo a trovarsi davanti a un problema del genere. La mia impressione è che Erone volesse dimostrare un risultato pratico, cioè che, dati i valori di *a,b,c,* il geometra non aveva bisogno di lambiccarsi il cervello e la fantasia a trovare un "frustum" con le misure date, ma doveva solo verificare se, applicando la formula magica, il valore di h risultasse eguale alla radice di un numero positivo, o di un numero negativo. *Nel secondo caso non si poteva costruire il frustum con quei valori di a, b, c – risultato tutt'altro che disprezzabile.* Ma, secondo il manoscritto esistente, Erone (e mi parrebbe assai strano), oppure un volonteroso (ma ignorante) copista semplicemente scrisse $h = \sqrt{+63}$. (= $3\sqrt{7} = 7.93$,) che è un errore, fatto senza giustificazione – e lasciato ovviamente senza seguito. Invece penso che Erone volesse proprio dimostrare con un esempio la validità della sua formula quando *c* è troppo piccolo. In effetti mi sembra che il metodo algebrico sia meno diretto di quello grafico illustrato dalla fig.3: se il tratto c non copre *almeno* per intero la distanza AB, il tronco di piramide non può essere costruito.

A parte questo interrogativo su Erone, non fu mai in corso una ricerca duratura, universale e senza successo della soluzione di problemi che implicassero i numeri immaginari. Infatti, mentre la natura e l'esperienza accompagnavano come una tenera *babysitter* la scoperta delle proprietà dell'aritmetica e della geometria classiche, sospingendo i matematici lungo l'asse reale, il rettilineo di Fig.1, natura ed esperienza sembravano opporsi a qualsiasi tentativo di discostarsi dalla "via classica", cioè dall'asse reale, come se fosse "innaturale". Ad esempio, l'invenzione/scoperta dello zero e dei numeri negativi era stata richiesta dalla pratica della mercatura, con acquisti e vendite, dei cambiavalute, degli usurai, che prendevano a prestito e prestavano denaro; quella dei numeri irrazionali e trascendenti era nata dal desiderio di calcolare la diagonale del quadrato, o di eseguire la "quadratura del cerchio" o di risolvere simili antichi problemi; il calcolo infinitesimale era apparso per risolvere i due problemi gemelli (si scoprì poi che in pratica i due problemi erano l'uno l'inverso dell'altro) di tracciare le tangenti a curve (continue) e di calcolare le aree delle figure piane. L'aritmetica era "incoraggiata" dalla geometria e tutte queste scoperte erano, per così dire, inevitabili. Infatti, fino al diciassettesimo secolo circa, una "dimostrazione geometrica" era considerata necessaria per validare qualsiasi risultato algebrico. In parole povere, una soluzione che non poteva essere disegnata era impossibile.

Per quanto riguarda i numeri **immaginari,** la stessa geometria ne negava l'esistenza, e ne abbiamo visto un primo esempio. Più in generale, fino al XVI sec., nessun problema in geometria o in natura sembrava in attesa di una soluzione, che potesse essere data ***solo*** in termini di numeri immaginari. Ora, fin da quando furono introdotte le equazioni algebriche di secondo grado, ogni tanto apparivano delle "soluzioni", che includevano la radice quadrata di qualche numero negativo. Ma in quei casi, tanto la geometria quanto l'esperienza negavano l'esistenza stessa di soluzioni, e la comparsa della radice quadrata di un numero negativo veniva presa come un'indicazione che non esisteva alcuna soluzione.

Giusto per riportare un esempio celebre di quel che intendo, supponiamo di voler determinare i lati x e y di una tavola rettangolare il cui perimetro 2x +2y è 20, e l'area xy è 40, in unità appropriate.

La somma di due lati contigui è quindi x+y = 10, il prodotto è xy =40. Apparentemente, fin dai tempi più antichi, un paio di equazioni come quelle che ho appena dato, erano una delle forme più comuni per introdurre *le equazioni quadratiche*. Secondo Wikipedia , i matematici babilonesi, già al tempo della III dinastia di Ur, 2112-2004 aC, introducevano le equazioni algebriche di secondo grado come soluzioni del problema di trovare due numeri x e y tali che x + y = p, e xy = q. Oggi risolveremmo il nostro sistema ponendo y =10-x e risolvendo l' equazione **x (10-x) = 40** , cioè 10x-x ^{2}=40, o, ancora meglio: $\boldsymbol{x^2}$**- 10x+40 =0** . La formula risolutiva generale era stata derivata da tempo, presumibilmente col metodo del completamento dei quadrati, e in una forma o nell'altra era conosciuta sin dai tempi dei Sumeri intorno al 2000 aC come (con moderna notazione):

$$x_{1,2=} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nel nostro caso , a =1, b= -10, c=40 e le soluzioni sono:

$$x_{1,2=} \frac{10 \pm \sqrt{100 - 160}}{2} = 5 \pm \frac{2\sqrt{-15}}{2} = 5 \pm \sqrt{-15}$$

Quindi, vediamo che il risultato algebrico è contraddetto o impossibile da applicare in pratica (o in geometria). Non può esserci alcuna soluzione. Pertanto, l'interpretazione comune era che quando appariva la radice quadrata di un numero negativo, questo era il modo della natura di avvertire che il problema era insolubile. Un tale decreto della natura veniva accettato dai matematici come perfettamente ragionevole, e la risposta data come la più soddisfacente, persino desiderabile. **Non si vedevano ragioni, quindi, per indagare ulteriormente sulla natura della radice quadrata dei numeri negativi, che significava semplicemente "NON C'È SOLUZIONE".**

Il vantaggio delle radici quadrate, che di norma risolvevano le equazioni di secondo grado, era che, effettivamente, se appariva una radice quadrata di un numero negativo, ne uscivano due soluzioni, entrambe impossibili, cioè l'equazione non aveva soluzioni, sentenza inappellabile. Non c'era bisogno di andare oltre. **Altre soluzioni non esistevano.**

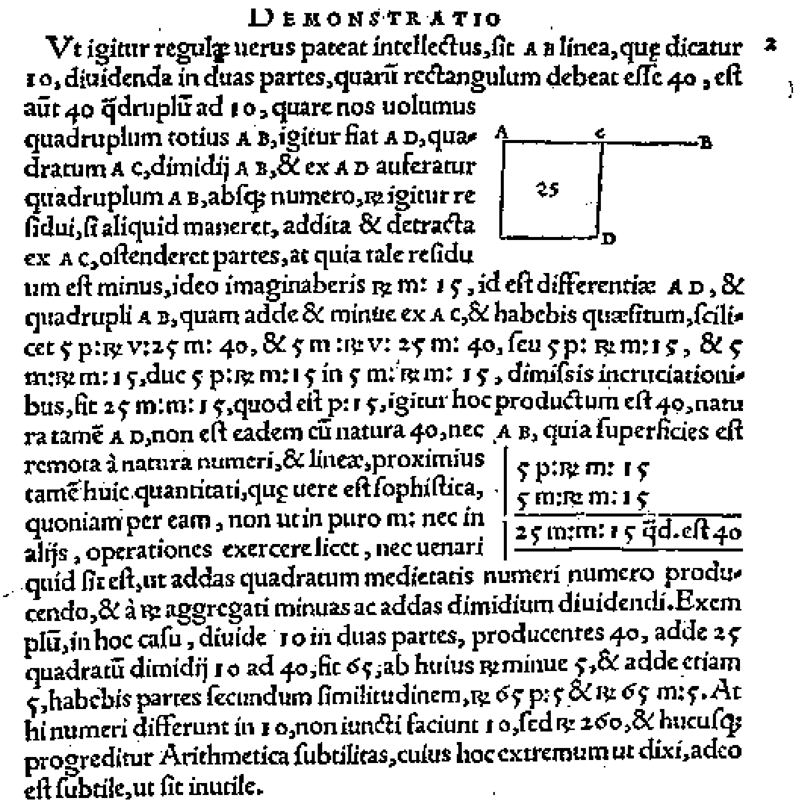
Girolamo Cardano

Fig.4

Per quanto ne so, il primo a cercare di andare oltre fu **Girolamo Cardano (Pavia, 1501-Roma, 1576)**. Egli pubblicò nel 1545 un testo che sperava restasse fondamentale della nuova algebra (*Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus* (1545),) e citò proprio il problema di trovare due numeri la cui somma è x + y = **10**, e il prodotto xy=**40**.

L'equazione **x^2- 10x+40 =0,** che abbiamo annunciato come risolvente del problema**,** se non ci si lascia spaventare dalle radici negative, dà come risultato due numeri, $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$. Questo , Cardano lo sapeva da tempo.

Ma Cardano non si era fermato qui, come i suoi predecessori, ed aveva eseguito la somma, che dà **10**, e il prodotto , usando la regola **(a+b)(a-b)** , che dà **40**. Dunque il risultato algebrico era esatto, ma nessun geometra avrebbe potuto disegnare un rettangolo con lati **5 + √(-15) e 5 - √(-15)**, e nessun falegname avrebbe potuto costruire un tavolo con quei due lati.



DEMONSTRATIO

Vt igitur regulæ uerus pateat intellectus, ſit A B linea, quę dicatur 10, diuidenda in duas partes, quarũ rectangulum debeat eſſe 40, eſt aũt 40 q̃druplũ ad 10, quare nos uolumus quadruplum totius A B, igitur fiat A D, quadratum A C, dimidij A B, & ex A D auferatur quadruplum A B, abſq; numero, ℞ igitur reſidui, ſi aliquid maneret, addita & detracta ex A C, oſtenderet partes, at quia tale reſiduum eſt minus, ideo imaginaberis ℞ m: 15, id eſt differentiæ A D, & quadrupli A B, quam adde & minue ex A C, & habebis quæſitum, ſcilicet 5 p: ℞ v: 25 m: 40, & 5 m: ℞ v: 25 m: 40, ſeu 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15, duc 5 p: ℞ m: 15 in 5 m: ℞ m: 15, dimiſſis incruciationibus, fit 25 m: m: 15, quod eſt p: 15, igitur hoc productum eſt 40, natura tamẽ A D, non eſt eadem cũ natura 40, nec A B, quia ſuperficies eſt remota à natura numeri, & lineæ, proximius tamẽ huic quantitati, quę uere eſt ſophiſtica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in alijs, operationes exercere licet, nec uenari quid ſit eſt, ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo, & à ℞ aggregati minuas ac addas dimidium diuidendi. Exemplũ, in hoc caſu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25 quadratũ dimidij 10 ad 40, fit 65; ab huius ℞ minue 5, & adde etiam 5, habebis partes ſecundum ſimilitudinem, ℞ 65 p: 5 & ℞ 65 m: 5. At hi numeri differunt in 10, non iuncti faciunt 10, ſed ℞ 260, & hucuſq; progreditur Arithmetica ſubtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeo eſt ſubtile, ut ſit inutile.

5 p: ℞ m: 15
5 m: ℞ m: 15
25 m: m: 15 q̃d. eſt 40

Fig.5

Nel riquadro è dato il prodotto di **5 p**(lus) **R**(adix) m(inus) 15 (prima riga), moltiplicato 5 m(minus) R(adix) m(inus) 15 (seconda riga) (eguale) 25 m(inus) m(inus) 15, quod est 40 (terza riga)
Si noti nella penultima riga la frase (vedi oltre la traduzione*):"Et huqusque progreditur Arithmetica subtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeao est subtilis , ut sit inutile*."
Nell'undicesima riga dal fondo il numero immaginario è detto *"quantitas sophistica"*, nome che temporaneamente attechì. Subito dopo si legge che "non si possono fare operazioni come se fossero numeri negativi o altri, *nec venari quid sit* (né andare a caccia di cosa sia la loro natura.)

Abbiamo qui, riprodotto nel riquadro, uno dei primi, se non il primo prodotto pubblicato di due numeri complessi (coniugati).

Cardano chiamò i numeri così trovati *"sofistici"*, e concluse: "***Così procede la sottigliezza aritmetica, fino a questo estremo, che è tanto sottile quanto inutile***" (ultima frase in figura).

Di conseguenza, dopo questo primo assaggio, che fa di Cardano lo scopritore dei numeri complessi (anche se giudicati inutili), la scoperta definitiva dei numeri immaginari e complessi non poteva essere altro che il risultato di una sorta di gioco.

E, in certo senso, così fu.

III. Alla ricerca della soluzione dell'equazione di terzo grado.

III.1 Le equazioni di secondo grado non creano problemi

Ben presto nella storia della matematica divenne noto un elenco di tutte le equazioni solubili di secondo grado, in cui **tutti i coefficienti dovrebbero essere interi positivi** e **solo soluzioni positive possono essere accettate.** Secondo **Al-Khwarizmi** , IX secolo, c'erano sei di queste equazioni esemplari:

1) $ax^2 = bx$
2) $ax^2 = c$
3) $bx = c$ (non proprio un'equazione quadratica)
4) $ax^2 + bx = c$
5) $ax^2 + c = bx$
6) $ax^2 = bx + c$

Un matematico moderno sarebbe forse sorpreso dal numero di queste equazioni che altro non sono che varie forme dell'equazione:

$$ax^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0$$

Ma occorre ricordare che i numeri negativi non erano ancora accettati universalmente dai matematici "accademici". Nelle equazioni elencate da Al-Khwarizmi tutte le lettere, comprese le incognite, devono rappresentare quantità positive.
Non si rida del libro *al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb* ***al-jabr*** *wa al-muqābala*,(" *Liber algebrae et almucabala*,") scritto da Abū Jaʿfar Muḥammad ibn Mūsā **al-Khwārizmī**: le due parole scritte in rosso sono rimaste nella matematica: **al-jabr** ("completamento") divenne *algebra*, mentre **al-Khwarizmi** ("nato a Khwarizm") divenne *algoritmo*. Al-Khwarizmi era persiano, alcuni sospettano addirittura zoroastriano, ma scrissse il suo manuale, che ne fece il fondatore dell'algebra, in arabo.

Un modo per vedere le soluzioni "geometricamente " è , ad esempio, prendere l'equazione (4) ed eseguire alcune manipolazioni, sempre possibili, ottenendo

$x^2 + 2px = q$, dove $p = \frac{b}{2a}$ e $q = \frac{c}{a}$.

Graficamente, (i) x^2 è un quadrato con lato sconosciuto e (ii) 2px sono due rettangoli di lati p e x (l'incognita); sul lato destro abbiamo una quantità, che può essere disegnata come un opportuno quadrato con i lati $\sqrt{q}$. L'equazione appare, geometricamente, come:

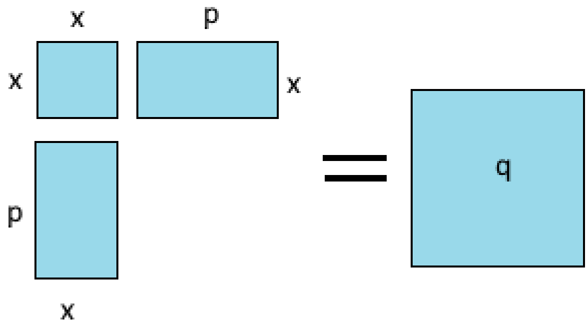


Fig.6a
Forma grafica dell'equazione $x^2 + 2px = q$

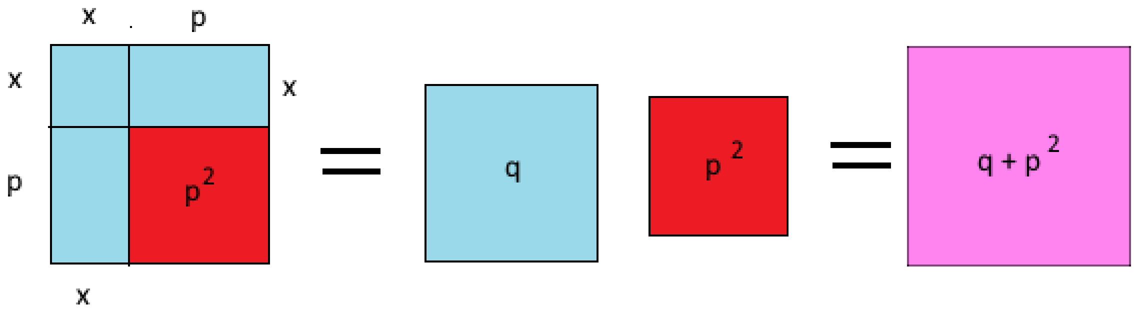


Fig. 6b
La soluzione: sommare p^2 ad entrambi i membri, fondere $q+p^2$ nel quadrato rosa con lati $\sqrt{(q+p^2)}$, da cui $\sqrt{(q+p^2)} = x+p$, che conduce alla formula risolutiva
$x = -p + \sqrt{(q+p^2)}$,

I primi matematici si resero conto molto presto del fatto che **se q è negativo (o, se non si vogliono numeri negativi, se l'equazione è $x^2+2px+q = 0$)** , allora $-q+p^2$ è minore di p^2, il che produrrebbe **valori negativi** di x. A quei tempi, come già detto e ripetuto, le soluzioni negative non erano accettate. Ma, peggio ancora, $-q+p^2$ stesso potrebbe risultare negativo, e nella nostra formula apparirebbe la temuta radice di un numero negativo.

$$x = -p + \sqrt{(-q+p^2)},$$

Nessun numero, sia esso positivo o negativo, può avere un quadrato negativo. Non solo, ma nella nostra soluzione grafica non avremmo nemmeno potuto disegnare un "quadrato negativo". Un'area negativa non era ospite gradito nella geometria euclidea.
Pertanto, la formula algebrica confermava un fatto ben noto, e i matematici potevano convivere felicemente con l'idea che le radici quadrate dei numeri negativi che compaiono nella formula risolutiva dell'equazione quadratica **significavano che una soluzione non esisteva. Un corollario era che l'equazione $x^2+2px+q = 0$, in cui si richiede che x, p, q siano numeri positivi, o produce solo radici negative (inaccettabili) o è impossibile, e quindi non compare nell'elenco delle equazioni solubili riportato sopra.**

III. 2 Entrano in scena le equazioni di terzo grado.

Le cose cambiarono quando i matematici rivolsero seriamente la loro attenzione alle equazioni di terzo grado, cioè equazioni del tipo:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Il problema delle cosiddette equazioni "cubiche" era stato il sogno e l'incubo dei matematici per quasi 2000 anni, in tutte le culture, e furono tentate soluzioni di ogni genere. I lettori interessati possono vedere la storia completa su https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation . I matematici di maggior successo produssero soluzioni, con innumeri metodi ingegnosi, di una serie di casi speciali. Forse il progresso più significativo fu fatto dal poeta-matematico persiano **Omar Khayyam** (1048-1131) - *Ghiyāth ad-Dīn Abu'l-Fatḥ ʿUmar ibn Ibrāhīm al-Khayyām Nīshāpūrī* . Nishapuri significa che era nato nella città di Nishapur nel Khorasan, Al Khayyam significa "il fabbricante di tende", ovvero che o lui o suo padre erano fabbricanti di tende. Quindi, entrambe le denominazioni, Khayyam e Al-Khayyam sono accettabili.

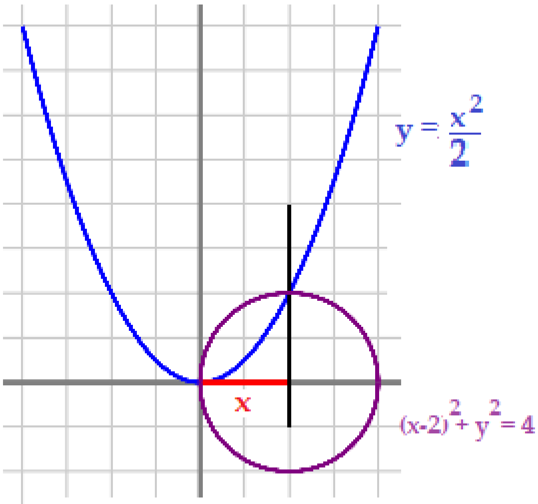
Questi classificò le equazioni cubiche algebriche in tre equazioni binomiali (per lo più lineari), nove equazioni trinomie (per lo più quadratiche) e sette tetranomi (tutti cubici), tutti insieme 19 tipi di equazioni. Concluse che ci sono quattordici diverse equazioni cubiche, che *non possono essere ridotte* a equazioni di grado minore.

Queste sarebbero ora scritte come :

(1) $x^3 = c$
(2) $x^3 + bx = c$
(3) $x^3 + c = bx$
(4) $x^3 = bx + c$
(5) $x^3 + c = ax^2$
(6) $x^3 + ax^2 = c$
(7) $x^3 = ax^2 + c$
(8) $x^3 + ax^2 = bx + c$
(9) $x^3 + c = ax^2 + bx$
(10) $x^3 + ax^2 + bx = c$
(11) $x^3 = ax^2 + bx + c$
(12) $x^3 + bx = ax^2 + c$
(13) $x^3 + bx + c = ax^2$
(14) $x^3 + ax^2 + c = bx$

Anche qui tutti i coefficienti sono positivi e si suppone che x sia positivo. Khayyam affermò che le 14 equazioni, che non possono essere ridotte a equazioni di grado inferiore (a loro volta tutte solubili con righello e compasso), sono solubili utilizzando le proprietà delle curve di secondo ordine, cioè delle curve chiamate *"sezioni coniche"*, che erano state studiate dai Greci, in particolare da **Apollonio di Perga** (262 aC al 190 aC), più di mille anni prima.

Un esempio è fornito in Wikipedia (https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation) e altrove:



Soluzione dell'equazione
$x^3 + 4x = 16$,
secondo Omar Khayyam

Fig.7

Khayyam non conosceva la geometria analitica e la deduzione dei valori numerici era più complicata. Chiaramente, soprattutto se zero non è considerato una soluzione valida, la radice è x = 2 (come si può facilmente verificare direttamente) La dimostrazione che l'equazione del terzo grado può essere divisa nelle due equazioni per la parabola e per il cerchio, usando la geometria analitica, sconosciuta a Khayyam, è semplice e viene fornita in https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation . L'equazione dell'intersezione è l'equazione di partenza, di terzo grado.Vedi **Appendice I.**

Attraverso le intersezioni di curve coniche, Al Khayyam poteva risolvere graficamente tutti i quattordici casi. Tuttavia, per trovare i valori numerici delle radici, doveva utilizzare tabelle numeriche relativamente grossolane e metodi di interpolazione quando necessario. Pertanto, i disegni potevano essere esatti, ma i valori numerici, in generale, potevano essere attendibili solo fino a un certo punto. Khayyam dovette riconoscere il fatto che, mancando una formula simile a quella per le equazioni di secondo grado, il "problema aritmetico generale" era ancora irrisolto, aggiungendo che *"Forse qualcun altro che verrà dopo di noi potrebbe trovarla [la soluzione aritmetica] anche nel caso in cui non sono presenti solo le prime tre classi di potenze, cioè il numero, la cosa e il quadrato"*. La "Cosa" è l'incognita, la nostra x. Vedi Appendice VIII per un breve glossario) Il testo evidentemente suggerisce che Khayyam predisse la soluzione anche di equazioni di grado superiore al terzo.

Omar Khayyam viveva tempi difficili. Ci racconta di aver proseguito gli studi in compagnia di un piccolo gruppo, mentre i Tartari stavano già incominciando a invadere il suo paese. Nel 1258 Baghdad fu presa e saccheggiata e molti studiosi fanno risalire la fine dell '"età dell'oro" dell'Islam al 1350. Non ci furono più importanti contributi alla matematica dal mondo islamico, che aveva dominato la cultura occidentale per quasi trecento anni.

III.3 Dal Khorasan all'Italia (Forse qualcun altro che verrà dopo di noi…)

Era ora la volta dell'Italia rinascimentale (secc. XV-XVI).

Scipione del Ferro *Nicolò Tartaglia* *Lodovico Ferrari*

" Forse qualcun altro che verrà dopo di noi potrebbe …" (Omar Khayyam, XIII sec.)

Fig.8

Solo gli storici della scienza possono immaginare quanto fosse di moda la matematica durante il Rinascimento italiano. I matematici "che erano riusciti" si guadagnavano da vivere come astrologi (potenzialmente la professione meglio pagata), o ingegneri civili/militari (in campo militare si occupavano di canali, delle fortificazioni e della nuova arte balistica, necessaria all'artiglieria appena introdotta nell'arte bellica.) Oltre all'impegno nelle loro professioni, facevano anche ricerche proprie, quasi per gioco. C'erano scuole di matematica, e spesso i capi delle scuole si sfidavano con formali "*cartelli di sfida*". In tali casi, una scuola o uno studioso proponeva agli avversari una serie di problemi matematici e l'altra scuola o studioso proponeva i propri problemi. Era sottinteso che chi proponesse un problema doveva saperne dare la soluzione, pena la squalifica. A tali pubblici dibattiti, che potevano durare per giorni, presenziarono spesso i maggiori intellettuali dell'epoca, ma, cosa sorprendente, in alcuni casi, la fama dei contendenti poteva attirare un pubblico molto più ampio e meno specializzato. I vincitori guadagnavano credito e migliori possibilità di un buon impiego in una delle varie corti che esistevano in Italia a quel tempo. Spesso si scommetteva anche denaro sonante. Uno dei risultati inevitabili di un tale ambiente fu che, il più delle volte, i metodi matematici per ottenere risultati eccellenti erano tenuti segreti. Niente "*publish or perish – pubblica o muori*", ma piuttosto "*Don't publish, or you perish – non pubblicare, o muori*".

> Ho sentito solo di un caso in cui si creò una situazione simile: avvenne in Giappone durante il periodo Edo (1603-1857), quando il Giappone era chiuso all'influenza esterna. La matematica nazionale, che si sviluppò (quasi) in maniera autonoma, ebbe il nome di ***Wasan.*** Anche le sfide matematiche e la segretezza furono ampiamente utilizzate, e talvolta le soluzioni erano scritte su tavolette votive appese in un tempio. In questo contesto vale la pena menzionare il nome di **Seki Takakazu** (circa 1642-1708), un samurai di genio, che è considerato il maggiore esponente della matematica classica Giapponese.

Per inciso, i problemi e le soluzioni erano espressi in parole, fondamentalmente perché **il formalismo che usiamo ora fu introdotto, e variamente esteso, quasi un secolo dopo,** principalmente da **Viète** (1540-1603) e migliorato da **Cartesio** (1596-1650).

III.4 La soluzione, finalmente.

Verso il 1510, forse nel 1515, **Scipione del Ferro (Bologna, 1465 - Bologna, 1526),** docente allo *Studium (=Università)* di Bologna, per primo ottiene la soluzione generale di un particolare tipo di equazione cubica, la cosiddetta "cubica depressa", priva del termine x^2, ovvero:

$$a_3x^3 + a_1x + a_0 = 0$$

La formula generale da lui scoperta per la soluzione della cubica depressa,

$x^3 + px + q = 0$ era (probabilmente) data da :

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Almeno, questa fu la formula pubblicata nel 1545 da Cardano, che, come vedremo, aveva avuto in mano il quaderno di appunti di Del Ferro.

Essa poteva risolvere la maggior parte delle altre equazioni "cubiche depresse", escludendo il caso in cui il termine sotto radice *quadrata* è negativo, caso che presto sarà chiamato *"casus irreducibilis" (Il caso irriducibile)***.** Sembra che Del Ferro sia stato il primo a pensare che la soluzione dell'equazione cubica dovesse comportare l'estrazione di radici terze. Fino al suo tempo, a quanto pare, si credeva (o sperava) che le radici quadrate sarebbero state sufficienti.

Del Ferro non sapeva di essere il primo essere umano in possesso della **soluzione del caso generale,** perché tutte le equazioni cubiche, con una semplice sostituzione di variabili, possono essere ridotte alla forma depressa.

> Penso sia il caso di introdurre un inciso: sono sempre turbato dal modo frettoloso con cui si enunciano molte sostituzioni , senza dire come si ottengono. Eppure, in genere è facile. In questo caso basta sostituire x = y+ A, nell'equazione non depressa e determinare A *in modo tale che i termini di secondo grado in y si annullino*. I termini di secondo grado che vogliamo rendere eguali a zero, derivanti dallo sviluppo del cubo di y +A, sono $(\boldsymbol{a_3}(\boldsymbol{3A}) + \boldsymbol{a_2})\boldsymbol{y^2} = \boldsymbol{0}$ →A= - $\frac{a_2}{3a_3}$ e quindi la sostituzione **x= y - $\boldsymbol{\frac{a_2}{3a_3}}$** è quel che ci occorre.

La scoperta di questa trasformazione fu pubblicata da **Gerolamo Cardano (1501-1576)** nel suo fondamentale libro " *Ars Magna* ", o più precisamente *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus* (1545), ma, a quanto pare, egli non fu il primo a usare quella sostituzione.

> Penso che Viète potrebbe essere stato ispirato da quella trasformazione per proporre la sostituzione x = w –p /(3w) nell'equazione depressa, che dà immediatamente il risolvente quadratico, che vedremo più avanti (la sostituzione di Viète fu pubblicata per la prima volta, credo, nel 1591, quando ormai la soluzione dell'equazione cubica era nota da decenni).

Scipione del Ferro scelse di non pubblicare la formula risolutiva. Grazie alla sua "arma segreta", poteva esibirsi in pubblico e vincere sfide. A quanto pare il suo stipendio fu quadruplicato proprio grazie a questa invenzione. Si narra però che, in punto di morte, decise di comunicare il suo segreto ad un suo allievo, **Antonio Maria del Fiore o Fior** , veneziano, suo allievo prediletto, ottimo contabile, ma a quanto pare non matematico di prim'ordine. Del Ferro lasciò in eredità anche un prezioso taccuino, oggi perduto, al proprio genero, **Annibale della Nave**. Contrariamente alla leggenda da me riportata, secondo cui affidò il suo segreto solo ad Antonio del Fiore, e solo in punto di morte, sembra che vi fossero più di una persona, amici e allievi di Scipione, i quali tutti avevano giurato di mantenere il segreto. In ogni caso, *per vent'anni la soluzione dell'equazione cubica restò nota solo all'interno di un ristretto circolo centrato sullo* ***Studium*** *di Bologna.*

Del Fiore decise di fare soldi usando la formula segreta. Con lo pseudonimo di " *Floridus* ", sfidò uno dei massimi matematici del suo tempo**, Nicolò Fontana** , meglio noto come **Tartaglia** , o "il Balbuziente", 1499-1557. Il soprannome, che lo stesso Tartaglia adottò, gli fu dato in seguito a più ferite da sciabola al volto (mascella e palato) che il povero ragazzino ricevette da un soldato francese durante il sacco della sua città, Brescia (18-25 febbraio 1512) . Dopo la sua ferita (in realtà cinque ferite alla testa) non poté più parlare correttamente. Una folta barba nascondeva le cicatrici.

A insaputa, penso, di Del Fiore, Tartaglia aveva scoperto nel 1530 la soluzione generale di una diversa equazione cubica,

$$x^3 + ax^2 = b$$

che gli era stato proposta dal sua amico Zuanne da Coi (Giovanni de' Tonini da Collio(?)). Tartaglia, avendo saputo tramite amici che Del Ferro aveva risolto l'equazione

$$a_3x^3 + a_1x = a_0$$

si aspettava di essere sfidato su quel tipo di equazioni cubiche e, secondo il suo racconto, sebbene fino ad allora non avesse approfondito l'argomento, in circa una settimana scoprì la soluzione di Del Ferro in modo indipendente. Più precisamente, scrisse nei suoi "*Quesiti et inuentioni diuerse, 1554* (Libro IX, Quesito n. XXV), che fece la sua scoperta il 12 febbraio 1535 (si noti però che la Repubblica di Venezia aveva un calendario che iniziava il 25 marzo, per cui la data "*more veneto*" riportata da Tartaglia nel suo poemetto è il 12 febbraio 1534).

Aggiunse anche di essere stato inconsapevolmente spronato a studiare attentamente l'equazione depressa dalle vanterie di Antonio del Fiore. In ogni caso è un dato di fatto che quando i matematici sanno che un risultato matematico è stato ottenuto, anche senza aiuto tendono a trovarlo autonomamente. Nel nostro caso, il consenso è che **l'idea chiave nella soluzione (algebrica) dell'equazione cubica e quartica è la separazione della soluzione attesa x in due incognite legate dalla relazione x = y + z , o anche x=z - y, o qualcosa del genere.** Altre sei o sette somme furono esplorate in seguito da Cardano (si veda il quasi indecifrabile "*De Regula Aliza, 1570*",) ma, alla fine, **x=z-y,** cioè **z = x+y,** sembra essere la scelta più popolare nei libri di testo moderni. (Appendice II.)

Da dove venne questa idea cruciale? Se dovessi scrivere un testo di fantamatematica, direi che Del Ferro, o chi per esso, aveva esaminato a fondo il meccanismo della soluzione dell'equazione quadratica

$$x^2 + 2px = q$$

Il concetto base era di "completare il quadrato". Dunque, in un'equazione cubica, il concetto base poteva essere quello di "completare il cubo". Ma quale cubo? Andando ancora più a fondo nel meccanismo della soluzione dell'equazione quadratica, si vedeva che anche lì "in principio" esisteva la somma $x + y = z$: in effetti, se $q > 0$, occorreva aggiungere qualcosa a x^2 , per trovare la soluzione. E di lì, penso, nacque l'idea. Vediamo che cosa poteva esser scritto sul taccuino di Del Ferro (perduto).

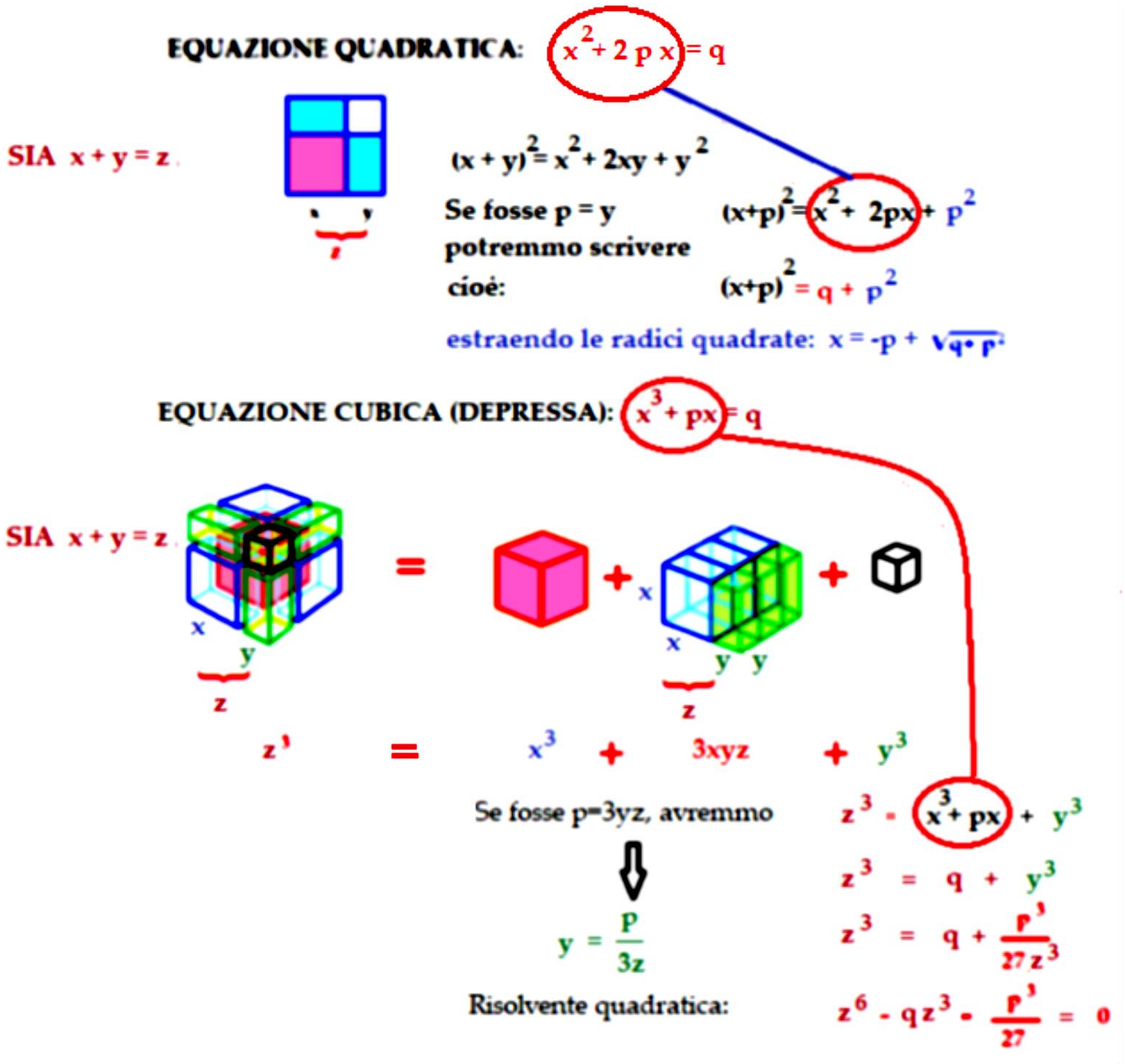


Fig.9

Nonostante nell'equazione risolvente "quadratica" appaia una sesta potenza, si osservi che di fatto l'equazione è **quadratica** in z^3. Trovate le due soluzioni per z^3 con la formula usuale per la soluzione delle equazioni quadratiche, ed estrattane la radice cubica, una loro opportuna combinazione sarà la soluzione dell'equazione iniziale (Appendice II). Si noti che y e z sono legate in due modi:

$$y\,z = \frac{p}{3} \quad \text{e} \quad z^3 - y^3 = \mathrm{q}$$

Per cui se è nota z, anche y risulta determinata, e in due modi.

Ma torniamo alla disfida, che non fu pubblica, Floridus-Tartaglia: i due contendenti si proposero l'un l'altro trenta problemi. I trenta problemi proposti da Antonio Del Fiore richiedevano tutti la soluzione di una "cubica depressa", come aveva intuito Tartaglia.

Tartaglia invece affermò di aver proposto a Del Fiore una varietà di problemi, che dimostravano la vastità delle sue conoscenze. Ma mentre conosciamo i trenta quesiti di Del Fiore, Tartaglia rivelò a vari amici e a Cardano solo alcuni dei suoi quesiti, tutti del genere $x^3 + m\,x^2 = n$. Gli altri, disse che non poteva ricordarli, ma che erano comunque depositati presso il notaio Zambelli. È possibile. In effetti, la storica "disfida" (sfida) avvenne a Venezia, nel febbraio 1535 (la data ufficiale della sfida è il 22 febbraio ,) quando entrambi i contendenti depositarono le loro trenta domande presso la studio di Jacomo Zambelli, notaio a Venezia, con quaranta-cinquanta giorni di tempo per presentare le risposte. Convennero che ogni contendente avrebbe pagato un banchetto all'avversario per ogni problema che non avesse saputo risolvere.
Tartaglia risolse tutti i problemi di Del Fiore in un paio d'ore, mentre Del Fiore non risolse nessuno dei problemi di Tartaglia. Questi condonò i 30 banchetti al perdente, che fu comunque umiliato e, a quanto si dice, avrebbe giurato vendetta.

In quel tempo **Girolamo Cardano** era a Milano: era un ricco matematico (infatti era un medico e astrologo rinomato, entrambe professioni ben pagate, se fortunate, e inoltre ingegnere e matematico di prim'ordine) e godeva la protezione di persone influenti. Venne a conoscenza della sfida, intuì che dei due contendenti solo Tartaglia poteva avere un metodo per risolvere l'equazione cubica e cercò di trovare la soluzione da solo. Non ci riuscì. Allora, nel gennaio del 1539, iniziò a mandare lettere a Tartaglia chiedendo, supplicando, minacciando, nella speranza di ottenere la soluzione dell'equazione cubica. Il fatto era che Cardano stava preparando la sua *Ars Magna* e desiderava includervi anche la soluzione dell'equazione di terzo grado. Tartaglia resistette, ma alla fine cedette, nella speranza di essere presentato da Cardano ad alcuni dei suoi potenti amici. Il 25 marzo 1539, in Milano, Cardano "in casa sua" ottenne il metodo (non solo la formula), ma dovette giurare che non lo avrebbe divulgato. Il metodo gli fu confidato sotto forma di una poesia di 25 versi in realtà un poemetto in terzine dantesche, chiamato "*capitolo*". Esso è diviso in tre parti che spiegano la soluzione dei tre diversi tipi di equazione cubica depressa (si noti che ora scriviamo m per p e n per q):

1) $x^3 + mx = n$, *cioè "cubo e cose"*

7) $x^3 = mx + n$, *cioè "cubo solo"*

11) $x^3 + n = mx$, *cioè terzo caso.*

1. *Quando chel cubo con le cose appresso*
   Se agguaglia à qualche numero discreto
2. *Trouan dui altri differenti in esso.*

3. *Dapoi terrai questo per consueto*
   Che'llor produtto sempre sia eguale
4. *Alterzo cubo delle cose neto,*

5. *El residuo poi suo generale*
   Delli lor lati cubi ben sottratti
6. *Varra la tua cosa principale.*

7. *In el secondo de cotesti atti*
   Quando che'l cubo restasse lui solo
   Tu osseruarai quest'altri contratti,

8. *Del numer farai due tal part'à uolo*
   Che l'una in l'altra si produca schietto
9. *El terzo cubo delle cose in stolo*

10. *Delle qual poi, per communprecetto*
    Torrai li lati cubi insieme gionti
    Et cotal somma sara il tuo concetto.

11. *El terzo poi de questi nostri conti*
    Se solue col secondo se ben guardi
12. *Che per natura son quasi congionti.*

13. *Questi trouai, & non con paßi tardi*
    Nel mille cinquecentè, quatroe trenta
14. *Con fondamenti ben sald'è gagliardi*

15. *Nella citta dal mar'intorno centa.*

Poiché si riducono tutti allo stesso metodo generale, una volta ammessi i coefficienti negativi, offro la traduzione e l'analisi dei primi nove versi, che coprono il primo caso: $x^3+px=q$.

Verso	Tartaglia	significato	Esempio: $x^3+6x=20$
1	Quando che'l cubo con le cose appresso	x^3+mx	, x^3+6x
2	Se agguaglia a qualche numero discreto	$= n$	$=20$
3	Trovan dui altri differenti in esso	$n = u - v$	$20 = u - v$

4	Dapoi terrai questo per consueto		
5	Che'l lor produtto sempre sia eguale	$uv =$	$uv=$
6	Al terzo cubo delle cose neto. (Probabile errore: dovrebbe esser scritto cubo del terzo delle cose neto)	$= (m/3)^3 = m^3/27$	$(6/3)^3 = 216/27 = 8$
		Qui Tartaglia sottintende che Cardano sappia risolvere (come abbiamo visto) l'equazione di secondo grado che risulta alle condizioni u-v=v, u v= $m^3/27$, la "risolvente di Tartaglia" $\mathbf{y^2 - ny = m^3/27}$ $y_1 = n/2 + (n^2/4+m^3/27)^{1/2}$ $y_2 = n/2 - (n^2/4+m^3/27)^{1/2}$	Sostituendo u - v in uv, si ottiene $(20-v)v=8$ E quindi $v^3 + 20v - 8 = 0$ Le cui soluzioni sono $v_{1,2} = -10 \pm \sqrt{108}$ e la radice positiva è: $v = \sqrt{108} - 10$ e, dato che u - v=20 $u = \sqrt{108} + 10$
7	El residuo poi suo generale	$(y_2)^{1/3} - (y_1)^{1/3}$	
8	Delli lor lati cubi ben sottratti Lati cubi = radici cubiche (ben= il minore dal maggiore)		
9	Varrà la tua cosa principale.	$x = (y_2)^{1/3} - (y_1)^{1/3}$	$x = (\sqrt{108} + 10)^{1/3} - (\sqrt{108} - 10)^{1/3}$

Tartaglia si scusa per la non perfetta forma del capitolo. Come spiega nel suo documento (*Quesito XXXIV, Libro IX dei "Quesiti e inventioni diverse" edizione del 1554*), era sua abitudine scrivere i suoi risultati in versi per poterli ricordare meglio.

Va detto che il capitolo omette il punto principale del metodo seguito per ottenere questa soluzione. Si lavora unicamente sui coefficienti, e poi, d'improvviso, salta fuori la formula per l'incognita x, cioè $x = u^{1/3} - v^{1/3}$. Come si spiega? La mia impressione è che Tartaglia volesse fuorviare Cardano, dandogli un procedimento oscuro che magicamente conduceva alla formula corretta. Si direbbe che Tartaglia fosse partito dal risultato per x, poi avesse sostituito i due cubi con termini lineari, avesse riscritto l'equazione del sesto grado come un'equazione del secondo grado, e infine avesse fatto vedere come questa equazione potesse essere ottenuta spezzando il termine noto in due termini, eliminando il legame con l'incognita, da cui era partito.

Se si guarda la Fig.9, pag.17, la giustificazione dell'improvviso passaggio $x = (y_2)^{1/3} - (y_1)^{1/3}$ è evidente. Nel poemetto, invece, non c'è alcuna giustificazione. Non è il termine noto che va scomposto nella somma (qui differenza) di due termini, ma l'incognita, proprio come nelle equazioni di secondo grado, il che porta naturalmente a scomporre il termine noto in due cubi: $n = U^3 - V^3$ (fig 9, e Appendice II).

III.5 Difficoltà nell'applicazione della soluzione.

La prima cosa che Cardano fece, una volta che Tartaglia gli ebbe dato la formula risolutiva, fu dimostrarla. Anche lui si era accorto che Tartaglia gli aveva dato qualcosa in più della formula, ma non abbastanza per capire il metodo usato per trovarla. Nella sua "*Artis Magnae*" (pag.29b), Cardano scriverà che " *ipse [Tartaglia], cum nobis rogantibus tradidisset, suppressa demonstratione*…"(ce la consegnò, avendone soppresso la dimostrazione). Ma nel decifrare il "capitolo", Cardano riuscì rapidamente.

A questo punto incominciò a fare esperimenti con la formula datagli da Tartaglia, applicata dapprima all'equazione

$$x^3 + mx = n$$

Proseguendo nel mio esercizio di fantamatematica penso che Cardano abbia iniziato a controllare sistematicamente la validità della formula Del Ferro-Tartaglia, semplicemente partendo dalla soluzione (i numeri naturali), e ricostruendo l'equazione. Probabilmente fece una tavola in cui x andava da 1 a N, e per ogni valore di x, m andava da 1 a M. Di qui si calcolava facilmente il valore di n nell'equazione. Come risultato si sapeva che tutte le equazioni proposte avevano una soluzione intera, e si sapeva quale (cosa che talvolta sembra stupire chi racconta questa storia) (Appendice III).

Nell'applicare la formula di Tartaglia alle equazioni di cui sapeva la soluzione, Cardano si trovò confrontato soprattutto con tre problemi.

1) Poteva succedere che, partendo da una equazione costruita su una soluzione nota, col metodo di Del Ferro-Tartaglia, si trovasse una soluzione differente. In effetti sappiamo che un'equazione di terzo grado ha sempre tre radici, almeno una delle quali è reale. Questo non era un problema grave, che di solito poteva essere risolto combinando diversamente le radici quadrate e cubiche.

2) C'erano equazioni costruite su una semplice soluzione, che richiedevano calcoli complicati per ritrovarla. A questi calcoli si dedicarono tanto Cardano quanto Tartaglia.

Un esempio caratteristico era proprio l'equazione presentata più sopra., ad illustrazione del poemetto di Tartaglia., cioè $x^3 + 6x = 20$, che poteva anche essere costruita sulla soluzione **x = 2** (8+12=20). Per essa, la formula di Tartaglia: porgeva, come si è visto, la soluzione:

$$x = (\sqrt{108} + 10)^{1/3} - (\sqrt{108} - 10)^{1/3}$$

Molti casi di questi radicali doppi cubici si presentavano regolarmente, anche per le equazioni più semplici, e quindi Tartaglia e Cardano e loro allievi si diedero da fare per trovare un modo di risolverli. In particolare si applicarono all'equazione appena citata, che fu uno degli oggetti della loro corrispondenza. Si trattava di trovare un binomio il cui cubo fosse eguale a $\sqrt[2]{108} \pm 10$. Nel caso in esame, la soluzione era abbastanza semplice. Notando che 108 = 3 x 36, si poteva scrivere, *per il binomio con segno positivo*: $6\sqrt[2]{3}$ +10

Ora, $(a + \sqrt[2]{b})^3 = a^3 + 3a^2\sqrt{b} + 3ab + b\sqrt{b}$. In altre parole, doveva essere:

$$a^3 + 3ab = 10$$
$$3a^2 + b = 6$$

Ma, come si vede, la radice di tre che compare nel binomio non può esser ridotta in altra radice, cioè b =3. Quindi $a^3 + 9a = 10;\ 3a^2 + 3 = 6.$ Dalla seconda equazione si vede che

$$a^2 + 1 = 2,\ \ cio\grave{e}\ a = \pm 1$$

Se invece si prende il termine con segno negativo, si ottiene che $(\sqrt[2]{b} - a)^3 = -a^3 + 3a^2\sqrt{b} - 3ab + b\sqrt{b} = 6\sqrt[2]{3} - 10$ e le equazioni da cui estrarre a sono le stesse. **Quindi le nostre due soluzioni possono solo essere $\sqrt[2]{3} + 1$ e $\sqrt[2]{3} - 1$, con differenza =2, come era noto.**

Il terzo problema, il più importante, lo consideriamo nel paragrafo seguente.

III.3 Compare il "casus *irreducibilis*."

Fin qui, le difficoltà erano di ordine algebrico "classico". Il modo di risolvere i radicali doppi fu elaborato , e certo non era una banalità, a quei tempi. Tuttavia Cardano notò che c'era di peggio, in quanto varie equazioni ricadevano nel "casus irreducibilis".

Dopo di aver usato valori positivi per m, probabilmente incominciò a sperimentare con numeri negativi, oppure, poiché i numeri negativi non erano graditi a quel tempo, con le equazioni della forma

$$x^3 = mx + n$$

(tutti i coefficienti sono positivi). Ad esempio, **mettendo x= 4** , notò che per m=16, n=0. Pertanto, il caso m=16 era una sorta di spartiacque tra un numero finito di valori positivi e un numero infinito di valori negativi (inaccettabili nel 1500) di n (intero). Era logico partire da lì: per m =17 avrebbe ottenuto n = -4, inaccettabile . D'altra parte, per m=15 ottenne n = 4 . Perciò x= 4 era la radice dell'equazione

$$(*) \qquad \boldsymbol{x^3 - 15\,x = 4}$$

Qui Cardano dovette verificare la formula Del Ferro-Tartaglia, e trovò qualcosa di strano: la soluzione generale di

$$(A1) \qquad x^3 + mx = n \quad \text{ovvero} \quad x^3 + 3px - 2q = 0$$

(riscritta in modo più terso) era:

$$(S1) \qquad x = z - y = z + u = \sqrt[3]{-q + \sqrt[2]{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt[2]{q^2 + p^3}}$$

Cioè, per noi (con q = - 2, p = -5)

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt[2]{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt[2]{-121}}$$

Anche nelle equazioni di secondo grado, come abbiamo visto, ci si può imbattere in radici quadrate di numeri negativi, ma queste compaiono in entrambe le soluzioni, il che permette di concludere che una soluzione reale non esiste, e il sistema rimane coerente. **Il problema era che nel caso dell'equazione di Cardano era noto che l'equazione aveva almeno una soluzione reale x = 4** (infatti ha tre soluzioni reali, ma quelle negative a quei tempi non contavano. (Vedi Appendice IV)) Quindi si doveva concludere che la formula Del Ferro-Tartaglia-(e pure Cardano) era in qualche modo sbagliata, *perché* ***la presenza di radici quadrate di numeri negativi indicava che una soluzione non esisteva, mentre nel caso trovato da Cardano si poteva provare che esisteva.*** **Ora, questo era un fatto inaudito, perché colpiva alla base la fiducia dei matematici nell'algebra. Con la presenza di una radice quadrata impossibile, l'algebra sembrava voler nascondere con una menzogna l'esistenza di una soluzione positiva facilmente verificabile.**

Cardano scrisse (4 agosto 1539) a Tartaglia chiedendogli se sapeva cosa stesse succedendo, e ricevette una risposta offensiva, probabilmente perché Cardano alla fine non aveva presentato Tartaglia ai suoi potenti amici, in particolare al famoso Alfonso d'Avalos, marchese del Vasto (1502-1546). Ma il fatto è che lo stesso Tartaglia non sapeva cosa rispondere.

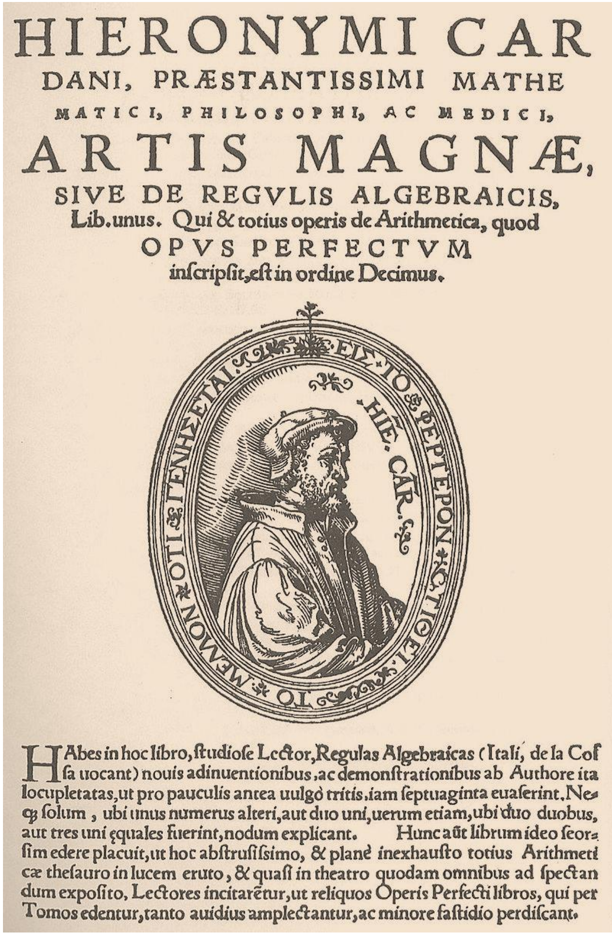
> In questa storia c'è anche una stranezza. Praticamente tutti coloro che parlano del caso che suggerì l'esistenza dei numeri immaginari riportano, come me, l'equazione $\boldsymbol{x^3 - 15\,x = 4}$**.** Lo stesso Bombelli lavorò, come vedremo, su questa equazione.
> Però nel libro di Tartaglia, l'equazione che mandò in crisi Cardano (e Tartaglia), citata nella breve lettera del 4 agosto 1539, è l'equazione $\boldsymbol{x^3 - 9x = 10}$**, le cui soluzioni sono x = - 2 (e anche $\boldsymbol{1 - \sqrt{6}}$, $\boldsymbol{1 + \sqrt{6}}$),** l'unica radice positiva essendo l'ultima. Evidentemente Cardano, nella "Ipotesi di Tavola" (Appendice III) lavorò audacemente anche sulle radici negative (inaccettabili), perchè è assai improbabile che abbia lavorato su $\boldsymbol{1 + \sqrt{6}}$ e affini. Ad ogni modo, una volta notata la stranezza, non ne parlerò più, perché questa equazione scompare dalla storia, pur presentando anch'essa il "casus irreducibilis".

Quindi, le equazioni che presentavano radici quadrate di numeri negativi furono dette appartenere al "**casus irreducibilis",** e furono lasciate in attesa di soluzione. Cardano non ne parlerà nella sua *Artis Magnae.*

Cardano intanto attendeva che Tartaglia pubblicasse la sua soluzione, per poter pubblicare la sua "*Artis Magnae*", mentre Tartaglia non si muoveva, anzi spiava Cardano, che non si azzardasse a pubblicare il suo capitolo. A questo punto Cardano non sapeva che fare. Voleva pubblicare il suo libro, che ora conteneva anche un notevole bonus. **Ludovico Ferrari** (1522-1565) era un orfano che, all'età di 14 anni, era stato mandato a Cardano come servitore. Cardano, notando che il servitorello sapeva leggere e scrivere, si rese conto delle potenzialità del ragazzo (era probabilmente il vero genio matematico del suo tempo) e gli insegnò latino, greco e matematica. **Quindi gli propose di studiare la soluzione dell'equazione quartica. Ferrari trovò la soluzione nel 1540, all'età di 18 anni.** Ma ancora una volta c'era un problema, perché la sua soluzione riduceva la soluzione della quartica a quella di un'equazione cubica (la risolvente di Ferrari), e né lui né il suo mentore Cardano potevano pubblicare la soluzione completa per il giuramento fatto da Cardano a Tartaglia.

Veniamo ora al 1543. Cardano aveva appreso (forse grazie a una soffiata di Fiore, una sorta di vendetta per la sconfitta del 1535) che a Bologna Annibale della Nave, genero di Del Ferro, era in possesso del prezioso taccuino di quest'ultimo, che dimostrava che Del Ferro aveva scoperto la soluzione dell'equazione cubica una ventina di anni prima di Tartaglia. Cardano, in viaggio a Firenze insieme al suo allievo Ferrari, si fermò a Bologna per far visita ad Annibale della Nave, che fu con lui assai cortese e gli mostrò il taccuino di Del Ferro (ora perduto). Una forma della soluzione l'abbiamo da un documento scritto da **Pompeo Bolognetti,** epigono di Del Ferro (Appendice V). Essa non differisce da quella di Tartaglia, ma non dà il minimo cenno, né diretto, né fuorviante, di come la formula sia ottenuta.

Finalmente Cardano ritenne di poter pubblicare la soluzione dell'equazione cubica facendo riferimento alla scoperta del Del Ferro, senza infrangere il giuramento fatto a Tartaglia. Di conseguenza, pubblicò il suo *" Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus " (noto anche come Ars magna), Norimberga , 1545,* che molti considerano il libro di fondazione dell'algebra moderna, un libro che finalmente diceva qualcosa di radicalmente nuovo.



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib.unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Fig.10

In esso, Cardano includeva le soluzioni dell'equazione cubica e quartica, ***citando sia Del Ferro che Tartaglia come scopritori della soluzione dell'equazione cubica***.

Da questo deve risultare chiaro che Cardano non si riteneva, né voleva essere ritenuto lo scopritore della soluzione, anche se la scoperta gli viene attribuita in diversi testi moderni: si parla infatti di "formule cardaniche". Male, molto male. Nonostante il riconoscimento di Cardano, Tartaglia andò su tutte le furie e accusò Cardano di aver violato il giuramento fatto, di non pubblicare la soluzione dell'equazione prima di lui. Ne risultò una violenta lite (ovviamente matematica), in cui non Cardano, ma il suo allievo più giovane e forse più brillante, Ferrari, combatté al suo posto contro Tartaglia. Cardano era ora considerato il principale matematico vivente al mondo (occidentale, ma penso che non ci fossero molti competitori altrove) e poteva evitare di prendere parte alla lite. L'ultima sfida Ferrari-Tartaglia ebbe luogo il 10 agosto 1548. Tartaglia (che, con impegno assiduo e degno di miglior causa, era riuscito a farsi nemici ovunque) non fu autorizzato a presentare le sue risposte in forma scritta, e la sua difficoltà di esprimersi a parole, dovuta alla sua antica ferita, giocò contro di lui. Inoltre, forse non era in grado di competere con Ferrari, più giovane e più brillante, se non più capace. Tartaglia, vedendo l'aria che tirava, partì da Milano la prima notte della sfida, lasciando così irrisolta la gara. Tuttavia, la sua partenza fu giudicata ignominiosa, e la vittoria fu aggiudicata al Ferrari, evento che segnò l'inizio del declino di Tartaglia.

IV. 1 soluzione del *"casus irreducibilis"*.

Nell'*Artis Magnae,* Cardano non tratta il *casus irreducibilis*, ma, a pag. 31b del testo annuncia che il caso sarà trattato (insoddisfacentemente) nel suo futuro libro "*De Regula Aliza*" (o "regola per il caso insolubile", dove *Aliza* è una parola all'uopo derivata approssimativamente dal greco dal Cardano). Il libro, pubblicato nel 1570, fu da tutti, incluso l'acuto Bombelli, giudicato oscuro. A dir poco.

Entra qui in scena **Raffaele Bombelli** (Bologna, 1526– Roma, 1572/73), l'ultimo dei cinque grandi algebristi italiani del Rinascimento. Questi era un giovane ingegnere civile, ammiratore e, alla lontana, discepolo di Cardano, con cui ebbe uno scambio di lettere. Penso che si fosse dedicato alla matematica quasi come hobby, il che lo portò a scrivere in italiano, ad uso dei matematici dilettanti (come suggerisce nel titolo), un'*Algebra*, probabilmente intorno al 1550. L'opera fu pubblicata nel 1572, con la promessa di aggiungervi due altri volumi, promessa che restò per allora incompiuta (Appendice VI)

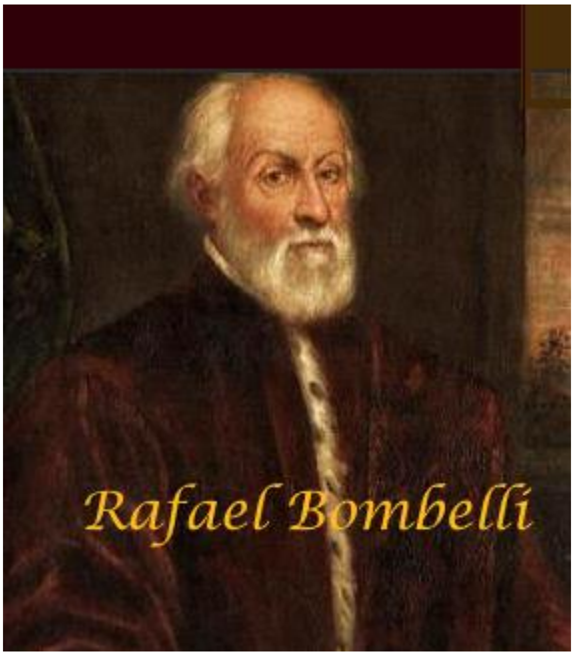


Fig. 11
Ritratto di Rafael Bombelli, di anonimo. Mi pare però poco credibile, perché Bombelli morì non ancora cinquantenne.

Per quanto Cardano si fosse trasferito a Roma nel 1571, non mi risulta che vi abbia incontrato Bombelli.

Bombelli riteneva che i numeri "sofisticati" scoperti da Cardano, lungi dall'essere "sofisticati", fossero un terzo tipo di numeri, né positivi né negativi, ma con diritti uguali a quelli degli altri numeri. Come nel caso dei numeri positivi e negativi, (+a e –a), ciò che per Bombelli distingue i nuovi numeri è il segno. Egli pertanto inventò due segni, "più di meno, p.di.m., + di -" e "meno di meno, m.di.m., - di -", che identificano i nuovi numeri. Modernamente, ma con una certa mancanza di coerenza, i nuovi numeri compaiono moltiplicati per +i o –i, l'unità immaginaria, positiva o negativa, notazione introdotta da Eulero (Appendice VII)).

Inventati i due nuovi segni, Bombelli produsse la nuova "regola dei segni", che combinava ora quattro segni, sedici casi (Ne trascrivo la parte nuova, insieme alla sua interpretazione in termini di i ("via" sta per "per"):

Più via più di meno, fa più di meno:	$(+)(+i) = i$
Meno via più di meno, fa meno di meno.	$(-)(+i) = -i$
Più via meno di meno, fa meno di meno.	$(+)(-i) = -i$
Meno via meno di meno, fa più di meno.	$(-)(-i) = +i$
Più di meno via più di meno, fa meno.	$(+i)(+i) = -1$
Più di meno via men di meno, fa più.	$(+i)(-i) = +1$

Meno di meno via più di meno, fa più. $(-i)(+i) = +1$
Meno di meno via men di meno, fa meno. $(-i)(-i) = -1$

Nel mondo attuale, nonostante gli straordinari progressi della matematica, ci sono ancora persone che scrivono a blog di matematica chiedendo ragione della regola **meno per meno eguale più**, della quale non riescono a capacitarsi. Qui vediamo che quasi cinquecento anni fa un ingegnoso matematico diede regole più complicate, che riguardavano segni nuovi o comunque entità nuove. Come fece? Penso che il suo ragionamento sia partito da calcoli di cui si sapeva il risultato, come, ad esempio, quello di Cardano (pag.7), secondo cui $(5+\sqrt[2]{-1}\sqrt[2]{15})(5-\sqrt[2]{-1}\sqrt[2]{15})$ *doveva* essere eguale a 40, e quindi più per pdm =pdm (+(+i) = +i); meno per pdm = mdm (-(+i)= -i . $(5 + i\sqrt[2]{15})(5 - i\sqrt[2]{15})$ *doveva* essere eguale a +40, da cui (+i)(-i) =(pdm)(mdm)= + (cioè +1).

Stabilita la base, Bombelli dà le regole per eseguire tutte le operazioni possibili al suo tempo con i numeri identificati dai due nuovi segni **più di meno (+ di -) e meno di meno (- di -).** Bombelli crede evidentemente che, *eseguendo qualsiasi operazione,* i risultati non potranno mai richiedere di essere espressi in termini di una nuova specie di numeri, o di altri nuovi segni. Quindi sembra sostenere implicitamente l'idea che numeri composti di una parte (diremmo oggi) reale e di una parte immaginaria (preceduta da uno dei due nuovi segni), costituiscano la forma più generale dei numeri dell'algebra, almeno per il suo tempo. ***Si tratta dei futuri numeri complessi, di cui Bombelli è giustamente considerato l'inventore/scopritore***, sebbene, come abbiamo visto, Cardano sia probabilmente stato il primo a eseguire qualche calcolo con essi .

Senza dare loro un nome specifico (ciò che fece Gauss nel 1831, che li chiamò "complessi"), Bombelli compì per primo l'opera notevole di darne un trattamento completo. La sua maestria algebrica, nel dare regole ed esempi di questo nuovo calcolo, lasciò ammirato Leibniz, che apprese l'algebra dalla sua *Algebra,* e lo chiamò *"perelegantem" e "egregium certe artis analyticae magistrum". (elegantissimo e di certo eccezionale maestro dell'arte analitica.*

Secondo alcuni Bombelli chiamò "*silvestri*" i numeri complessi. Certo non diede loro questo nome sistematicamente, e se si trova nella sua *Algebra* mi è sfuggito. Se il fatto è vero, penso che il nome "silvestri" sia stato suggerito a Bombelli dalla frase che Cardano aveva posto nella sua *Artis Magnae* (vedi Fig.5, pag 8): "*non si possono fare operazioni e non si può andare a caccia (**venari**) della loro natura*", con una metafora sulla caccia. I numeri sofistici sarebbero quindi stati paragonati da Bombelli ad animali che si nascondono nella selva.

Pare che egli abbia dato il nome di "*numeri congionti*" ai numeri complessi coniugati: che li abbia battezzati o no, ne sfruttò le proprietà. Ad esempio, come vedremo, trovò che, moltiplicando un numero per il suo complesso coniugato (usando la nota regola (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 ne risulta un numero reale (quella che oggi si chiama la norma (o il suo quadrato)).

Ma, cosa più importante in questo contesto, Bombelli aveva osservato che (noi ci serviremo della moderna notazione di Eulero) si può scrivere la soluzione dell'equazione (*) di pag 22, ($\boldsymbol{x^3 - 15\,x = 4}$) come:

$$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$

Ora, come si è detto, i suoi studi sulle operazioni con numeri complessi lo avevano portato a concludere che esistevano numeri "congionti" (i nostri complessi coniugati) che differivano solo per il segno della parte immaginaria. Egli trovò *che il complesso coniugato di una potenza di un numero complesso è uguale alla potenza del complesso coniugato del numero.* In altre parole, segnando con una lineetta il complesso coniugato,

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

Per noi, che viviamo nel XXI secolo, la dimostrazione è poco meno che banale, perché possiamo usare le notazioni preferite da Eulero

$$z = \rho\, e^{i\theta} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \rho\, e^{-i\theta}$$

Le cui α-esime potenze

$$\rho^\alpha e^{\alpha i\theta} \text{ and } \rho^\alpha e^{-\alpha i\theta}$$

sono complessi coniugati l'uno dell'altro, ϱ essendo reale.

Pertanto, essendo *2 + 11 i* e *2-11 i* due complessi coniugati, anche le loro potenze α= 1/3 devono essere complesse coniugate. Quindi, posto

$$\boldsymbol{\sqrt[3]{2+11i} = P + iQ}$$

deve essere $\boldsymbol{\sqrt[3]{2-11i} = P - iQ}$, e la somma di un numero complesso e del suo complesso coniugato dà il doppio della parte reale, in questo caso 2P, che è un numero reale.

Tale osservazione dovrebbe essere sufficiente a dimostrare che anche la formula Del Ferro – Tartaglia dà risultati reali quando necessario, ma, solo per completezza, resta da dimostrare che nel nostro caso x = 4. Anche in questo caso Bombelli poté usare i suoi risultati (e noi possiamo usare lo stesso teorema citato). Prendendo il complesso coniugato e moltiplicandolo per il numero originale si ottiene, a sinistra:

$\sqrt[3]{2+11i}\ \sqrt[3]{2-11i}\ =\ \sqrt[3]{4+121}\ = 5$

A destra: $(P + iQ)(P - iQ) = P^2 + Q^2$

Mettendo insieme:

$$(1) \quad 5 = P^2 + Q^2$$

D'altro canto, $2 + 11i = (P + iQ)^3 = P^3 + 3iP^2Q - 3PQ^2 - iQ^3$

che si divide in due equazioni, una per la parte reale e una per la parte immaginaria:

$$(2) \quad 2 = P^3 - 3PQ^2$$

$$(3) \quad 11 = 3P^2Q - Q^3$$

Abbiamo quindi tre equazioni in due incognite. Basta sceglierne due. Bombelli stesso incita a risolvere le equazioni "*a tentoni* ", cioè "per tentativi". Facciamolo. Chiaramente, se si assume che sia P che Q siano interi, il risultato è immediato: la somma di due quadrati vale 5 solo se essi sono 4 e 1, dando 2 e 1 come soluzioni per P e Q. Ma quale è P e quale è Q?

Se inseriamo P=2 e Q = 1 nelle equazioni (2) e (3), otteniamo 2 = 8-6 e 11 = 12-1 , entrambi corretti. Viceversa, se mettiamo P=1 e Q = 2, otteniamo: 2 =1-12 =-11 sbagliato, e 11 = 6-8, sbagliato. Quindi $\boldsymbol{P + iQ = 2 + i}$

Infine, per arrivare alla soluzione x , dobbiamo sommare

$$\mathbf{x = 2 + \boldsymbol{i} + 2 - \boldsymbol{i} = 4}$$

che risolve l'equazione cubica: infatti, ponendo x = 4, si ottiene

$$4^3 - 15 \cdot 4 = 4$$

Questo risultato apparve stupefacente. Da una formula irta di radici quadrate e cubiche, ma soprattutto contenente il segnale di "soluzione impossibile", (cioè la radice di un numero negativo), esce un numero intero, anzi, il numero intero che si può verificare essere la soluzione dell'equazione (come si è visto, l'equazione ha due altre soluzioni reali, ma negative, e quindi, "false" secondo i criteri del tempo. Vedi Appendice IV)

V. Il futuro: "A che servono i numeri immaginari?"

Dalla data di pubblicazione dell'Algebra di Bombelli , fino al 1820 circa, i numeri immaginari erano solo uno strumento matematico, comodo, su cui lavorarono molti illustri matematici di vari Paesi: il campo era nuovo e affascinante. In effetti, il nome di numeri ***immaginari*** fu affibbiato loro da Cartesio (1637). In quanto al simbolo " **i** " per "***unità immaginaria***" (√-1), si dice che provenga da Eulero (Appendice VII). I "***numeri complessi***", già ampiamente utilizzati da Bombelli avrebbero dovuto il loro nome a Gauss (1831). Facendone ampio uso, Argand prima ed Eulero poi, scoprirono la connessione tra le funzioni esponenziali e le funzioni trigonometriche. Ne venne, per coloro che sono interessati a concorsi di bellezza tra le formule matematiche, la cosiddetta "formula più bella della matematica":

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Wessel e poi Gauss e De Moivre inventarono la rappresentazione dei numeri complessi come vettori nel piano complesso.

Per uno schizzo storico più ricco, disordinato e qua e là impreciso, si veda https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number#History.

Nonostante tutte queste ingegnose invenzioni, come scrisse Augustin Cauchy nel suo monumentale "*Cours d'Analyse*" (1821), i numeri complessi andavano considerati solo come una sorta di stenografia. Si potrebbe sempre separare una singola equazione che coinvolga numeri complessi in una coppia di equazioni, una per la parte reale , contenente i termini senza **i,** e una per la parte immaginaria, cioè i termini contenenti **i**. Ma i tempi stavano cambiando: come penitenza, Cauchy fu condannato a porre le basi del ***calcolo delle variabili complesse*** con le equazioni di Cauchy-Riemann (già usate, non sistematicamente, da D'Alembert e Euler), e con una serie di teoremi e concetti fondamentali (insieme a Riemann, Cauchy è considerato uno dei due padri fondatori della materia), a cui seguì un'esplosione di utilizzazioni dei numeri immaginari nella matematica avanzata, inclusa la funzione Zeta di Riemann, oggidì tanto famosa nel contesto dei numeri primi. Anche la geometria analitica comprende ora elementi immaginari: quindi, sul piano un cerchio è sempre intersecato da una retta in due punti , siano essi entrambi reali o entrambi immaginari. Inoltre, nel piano esistono strane "rette isotrope", $x \pm iy = 0$, e via dicendo.

L'Invenzione/scoperta dei numeri complessi è in matematica paragonabile a quando il Sole disperde tutta la nebbia. Allora si può vedere che il nostro paesaggio gradualmente si apre e diventa immenso: ci sono montagne, foreste, laghi, fiumi, altri paesi fuori dalla strada principale, e il mare... c'è la bellezza, e tutto acquista un senso, cioè si completa o si può sperare che si completi tutto ciò che si sapeva dalla nostra autostrada, aggiungendo sempre più informazioni in ogni direzione.

Simbolica rappresentazione della matematica estesa al campo complesso

Da confrontarsi con Fig.1

Questo, almeno, è il mio punto di vista.

Per alcuni esempi si veda la sezione FIGURE.

VI. I numeri immaginari e il libro della natura.

Occorreva ancora un passo : a che cosa servivano i numeri immaginari in natura? Fino al XX secolo la risposta era "a nulla di essenziale". Naturalmente, i matematici continuavano a sviluppare il loro concetto e ad estenderlo. Gauss estese i numeri complessi alla teoria dei numeri, inventando gli interi gaussiani e, naturalmente, i numeri primi gaussiani. Argand e De Moivre diedero loro una forma geometrica che li rendeva più intuitivi. Hamilton inventò i Quaternioni, Cayley e Klein i parametri conosciuti con i loro nomi eccetera. Tuttavia i numeri complessi non erano strettamente necessari, e apparivano lontani dalla realtà fisica. In certo senso, la matematica parlava ormai il linguaggio dei numeri complessi, mentre la natura si ostinava a parlare il linguaggio dei numeri reali (e in pratica razionali).

Il fatto che i numeri complessi potessero rivelarsi necessari nei campi più avanzati della fisica sarebbe stata quasi una sorpresa. E la sorpresa arrivò in un batter d’occhio. Nel giro di cinque anni, 1925-1930, i numeri complessi apparvero in prima linea nella fisica moderna. Sia l'equazione di Schroedinger (la base della meccanica quantistica non relativistica) che l'equazione di Dirac (la base della meccanica quantistica relativistica,) hanno bisogno di quel piccolo i. Non c'è modo di evitarlo, se non riducendosi a problemi molto particlari.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \quad \text{(Schroedinger equation, 1925)}$$

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0 \quad \text{(Dirac equation, 1928)}$$

Come scrisse Galileo (*Il Saggiatore*, 1623), “il libro della Natura è scritto nel linguaggio della matematica.” Ma ora bisogna aggiungere: “**il libro primordiale della natura è scritto nel linguaggio della matematica dei numeri complessi.”**

Certamente nessuno dei coraggiosi e combattivi algebristi del Rinascimento italiano poteva immaginare un futuro simile per la loro invenzione (o scoperta?). Tuttavia, sospetto che Bombelli abbia fatto il suo lavoro monumentale sui numeri complessi perché aveva intravisto, forse solo per un attimo, il nuovo mondo che stava per aprirsi davanti ai futuri matematici e fisici.

Non fu l'unico italiano che, *mutatis mutandis* , avrebbe avuto la visione di un nuovo mondo, durante il Rinascimento italiano.

Post scriptum.

I grandi (ma ormai quasi dimenticati) algebristi del Rinascimento italiano furono cinque (su un gruppo assai ampio di seguaci più o meno capaci): **Scipione del Ferro, Nicolò Fontana Tartaglia, Girolamo Cardano, Ludovico Ferrari, Rafael Bombelli** . Almeno tre di loro non ebbero un lieto fine.

Di **Scipione del Ferro (Bologna, 1465- Bologna,1526),** uno dei cinque (diremmo) ordinari di matematica dello Studium bolognese**,** non si sa molto di essenziale, se non che godeva fama di uomo schivo e di buon carattere. Eppure fu da questo timido professore, che venne fatto il primo passo decisivo in matematica al di là dei confini posti dai greci e dagli arabi.

Nicolò Fontana Tartaglia (Brescia 1499 - Venezia, circa 1557), dopo la sconfitta nel 1548 alla sfida contro Ferrari, si trasferì a Brescia e infine si ritirò a Venezia, dove visse quasi in povertà dando lezioni di matematica. Morì nel 1557. Ci sono molte notizie sulla lite tra Tartaglia e Cardano, e soprattutto gli pseudostorici romantici si schierarono per l’uno o per l’altro, ma gli storici moderni tendono a minimizzare l'episodio. Tuttavia anche il signorile Bombelli scrisse il suo libro fondamentale sul calcolo con i numeri complessi, col timore di essere attaccato da Tartaglia, del quale scrisse che in ogni suo lavoro “non riteneva di aver raggiunto uno scopo degno se non fosse riuscito a insultare qualcuno.” Ma, visto quel che avea passato, penso che lo si possa perdonare.

Girolamo Cardano (Pavia, 1501- Roma, 1576) ebbe maggiori successi professionali, tra cui un viaggio trionfale a Edimburgo nel 1552 come medico, per curare l'asma di John Hamilton, arcivescovo di Saint Andrews. Ovunque andasse, veniva salutato come il principale scienziato del mondo occidentale. L'arcivescovo si riprese dall'asma. Al suo ritorno Cardano fu afflitto da varie disgrazie. Divenne professore di Medicina all'Università di Bologna, ma rivelò un carattere sgradevole, e alla fine fu licenziato. Il suo figlio maggiore, Giambattista, nonostante gli sforzi di Cardano, fu decapitato nel 1560 per aver avvelenato la moglie infedele. Il secondo figlio, Aldo, perse tutta la sua sostanza nel gioco d'azzardo e tentò di derubare il padre irrompendo nella sua casa. Cardano lo denunciò, e Aldo fu bandito da Bologna.

Nel 1570 Cardano fu arrestato e incarcerato con l'accusa di eresia dall'Inquisizione, sotto il papato di San Pio V. Le accuse non sono del tutto note, ma si sa che aveva commesso l'errore di pubblicare un oroscopo di... Gesù Cristo. Alla Chiesa l'idea non piaceva. Tuttavia, dopo una detenzione di alcuni mesi, fu rilasciato con la proibizione di insegnare. Si trasferì (ciononostante) a Roma, dove venne ben accolto. Alla fine il papa successivo (Gregorio XIII) gli concesse una decente pensione. Secondo la leggenda, predisse la data esatta della sua morte. Secondo una leggenda aggiuntiva, per realizzare con precisione la sua previsione, si suicidò.

Ludovico Ferrari (Bologna, 1522- Bologna, 1565), a quanto pare, oltre ad essere forse il più brillante matematico della sua epoca, aveva un pessimo carattere, ma fu anche sfortunato. Dopo la vittoria su Tartaglia divenne assessore alle tasse del governatore di Milano Ferrante Gonzaga (Milano apparteneva alla Spagna dal 1540). Poi, dopo aver servito la Chiesa e lo stato, si ritirò, giovane e ricco. Tutto sembrava andare per il meglio. Nel 1565 si recò a Bologna con la sorella Maddalena, vedova e povera, per insegnare matematica in quella Università. Secondo gli pseudo-storici romantici mai degni di fiducia, morì quello stesso anno, essendo stato avvelenato con l'arsenico dalla sorella, che voleva metter le mani sui suoi soldi per sposare un gentiluomo di cui era innamorata. Due settimane dopo la morte del fratello, la Maddalena sposò il gentiluomo e gli cedette tutti i mal acquistati soldi. Il marito prontamente l'abbandonò dopo pochi giorni. Ma si tenne i soldi e lei morì povera.

L'ultimo grande algebrista rinascimentale, colui che inventò i numeri complessi e come eseguire le operazioni algebriche su di essi, dando loro uno stato di numeri a tutti gli effetti, ebbe vita non infelice, ma breve.

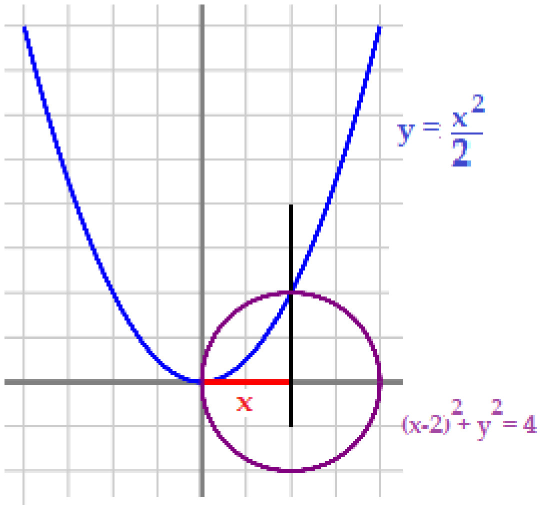
Rafael Bombelli (Bologna, 1526- Roma, 1572), eccellente ingegnere idraulico per professione, eccellente matematico nello spirito, nella sua vita attiva, professionalmente fruttuosa, ma priva di eventi eccezionali , scrisse un influentissimo libro di algebra (*L'Algebra,* 1572), in cui usava sia numeri negativi che immaginari e complessi (dando loro, ovviamente, altri nomi). Ebbe notevole fama (nel mondo dei matematici di allora) anche dopo la sua morte prematura.

Con la morte di Cardano (1576) si chiude la grande stagione degli algebristi rinascimentali italiani.

APPENDICI

I: Soluzione di Omar Khayyam.

Interpretazione dell' equazione $x^3 + m^2 x = n$ $(n > 0)$come l'intersezione di una parabola e di un cerchio (Fig.3.)



Soluzione dell'equazione
$x^3 + 4x = 16$,
secondo Omar Khayyam

Si moltiplica l'equazione per $\frac{x}{m^2}$, ottenendo così

$$\frac{x^4}{m^2} = \frac{n\,x}{m^2} - x^2$$

Possiamo scrivere l'equazione di una circonferenza di diametro $\frac{n}{m^2}$,

e centro su (x = $\frac{n}{2m^2}$, $y = 0$). È: $y^2 + \left(x - \frac{n}{2m^2}\right)^2 - \frac{n^2}{4m^4} = y^2 + x^2 - \frac{n\,x}{m^2}$.

Il lato sinistro può essere posto uguale ad y^2quadrato dalla parabola $y = \frac{x^2}{m}$.

L'intersezione delle due curve è data disegnando le due curve:

$$(1)\ \ y^2 = \frac{x^4}{m^2} \quad and \qquad (2)\ \ y^2 = \frac{n\,x}{m^2} - x^2$$

Al solito, le soluzioni vengono suggerite essendo già stata trovata la sostituzione opportuna. Penso sia più istruttivo per l'unico lettore arrivato fin qui scrivere l'equazione di una parabola y= ax^2 e quadrarla come $y^2 = a^2x^4$; Quindi, scrivere l'equazione del cerchio come $(x-b)^2 + y^2 = c^2$ cioè $y^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$, eguagliare i due valori ottenuti per y^2 (è saggio scrivere l'equazione del cerchio come $(x-b)^2 + y^2$

= c^2 , evitando i termini lineari in y, che non permetterebbero di eguagliare direttamente i due valori di y^2). Infine, si debbono aggiustare i coefficienti a,b,c, in modo da riprodutrre l'equazione iniziale. Ciò dimostra che la soluzione dell'equazione iniziale è data dall'ordinata dell'incrocio della parabola e del cerchio così ricostruiti.
Algebricamente, essa sarebbe data eguagliando i due membri di destra, *ma l'equazione che ne risulterebbe sarebbe comunque l'equazione da cui siamo partiti, che volevamo risolvere da principio.*
Tuttavia, come si può vedere, se si potesse disegnare una parabola perfetta e un cerchio perfetto, si potrebbe però avere una soluzione esatta.

II. La soluzione di Cardano della cubica "depressa".

Sia la cubica depressa da risolvere :

$$(A1) \qquad x^3 + mx = n$$

Facciamo la sostituzione $x = z - y$ (**l'idea chiave,** che aveva atteso 2000 anni per essere pensata: **z = x+y**)
Sviluppando il cubo della differenza (x= z-y), otteniamo che:

$$(z-y)^3 + 3yz(z-y) = \quad y^3 - z^3$$

Confrontando con (A1) e ricordando che x = z - y, vediamo che deve essere **$3yz = m$,** da cui $y = \frac{m}{3z};$ e $\boldsymbol{y^3 - z^3 = n}$
Perciò

$$z^3 - \frac{m^3}{27z^3} = -n$$

Moltiplicando per il denominatore z^3 :

$$\boldsymbol{(z^3)^2 + n(z^3) - \frac{m^3}{27} = 0}$$

L'equazione è chiamata "la risolvente quadratica" (per alcuni autori "risolvente di Tartaglia") , perché è quadratica in z^3. La soluzione produce z^3 e quindi z direttamente estraendo la radice cubica.

Ma dall'eguaglianza 3yz=m segue anche $z = \frac{m}{3y};$ e l'equazione $y^3 - z^3 = n$ diventa $y^3 - \frac{m^3}{27y^3} = n$, che porge una seconda risolvente quadratica:

$$\boldsymbol{(y^3)^2 - n(y^3) - \frac{m^3}{27} = 0}$$

Questa è eguale alla precedente a parte il segno del termine di primo grado in z^3.

Così, si può finalmente concludere: **x = z - y.**
A questo punto potremmo fermarci e tirare il fiato, e generalmente lo tirano insegnanti e allievi – e fin qui arriva la figura 9 di pag. 17.

Ma, per complicarci (con cautela) la vita proviamo a scrivere n = 2q, m = 3p (ciò che può sempre essere fatto). Poniamo inoltre **u = - y.**
Le equazioni per z e per y diventano:

$$\boldsymbol{(z^3)^2 + 2q(z^3) - p^3 \;=\; 0}$$
$$\boldsymbol{(u^3)^2 + 2q(u^3) - p^3 \;=\; 0}$$

In altre parole abbiamo una sola equazione di secondo grado, che ha due soluzioni che vanno bene per z^3 e per u^3 (= $-y^3$). Quindi z^3 e u^3 hanno due soluzioni ciascuna:

$$(z^3, u^3) = -q \;\pm \sqrt[2]{q^2 \;+ p^3}$$

Di qui segue la soluzione:

$$(S1) \qquad x = z - y = z + u = \sqrt[3]{-q \;+ \sqrt[2]{q^2 \;+ p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt[2]{q^2 \;+ p^3}}$$

Evidentemente le due soluzioni sono permutabili, e i radicali quadratici devono avere segno diverso sotto radice, altrimenti viene usata una sola soluzione.
Nella forma più nota, pubblicata da Cardano con notazione lontana dalla nostra, sostituendo n = 2q, m = 3p, la soluzione della (A1) è data da:

$$S(2) \qquad x = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt[2]{\frac{n^2}{4} \;+ \frac{m^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt[2]{\frac{n^2}{4} \;+ \frac{m^3}{27}}}$$

Come si vede, per la z si è scelta la soluzione col segno + davanti al radicale quadratico , e per la u quella col segno meno. In effetti, le scelte per z e y, o z e u sono vincolate dal fatto che y z =p, o anche uz=-p. Scelta la z^3, resta determinata la u^3. Se scegliessimo per entrambe la z e la u lo stesso segno davanti al radicale quadratico, troveremmo il doppio di una delle due radici cubiche. E' solo scegliendo segni diversi, che si può sfruttare la proprietà del prodotto notevole $(a+b)(a-b) = (a^2 - b^2)$, che semplifica il prodotto, e riproduce uz = p.

Appurato che i due binomi differiscono nel segno davanti al radicale quadratico, si consideri che x è dato dalla somma delle radici cubiche di due binomi. A rigore il primo binomio ha tre radici cubiche, e il secondo pure. Quindi le combinazioni sembrano essere nove in tutto. Sono in realtà assai meno, perché scelto il primo binomio, che corrisponde a z, il secondo, che corrisponde a u, è univocamente fissato dalla relazione zu= –p. Quindi solo tre soluzioni sono accettabili, il che nel 1800 sarebbe stato ovvio, perché, con la dimostrazione del "teorema fondamentale dell'algebra", si sapeva che un'equazione algebrica di grado n ha n soluzioni, tra reali e complesse. Dunque, l'equazione di terzo grado ha sempre tre soluzioni, che possono essere o una reale e due complesse coniugate, o tre reali. La formula provvede anche quelle, ma occorre saper calcolare le tre radici radici cubiche delle:

$$(z^3, u^3) = -q \pm \sqrt[2]{q^2 + p^3}$$

Si tratta di un risultato che doveva attendere ancora qualche tempo per diventare operativo.

III. "Ipotesi di Tavola" di Cardano

Chi legga con attenzione gli esempi contenuti in questo saggio (e desunti dalle pubblicazioni del Cinquecento, noterà che le equazioni cubiche che "fecero epoca" furono le seguenti:

(0) $x^3 + mx = n$

1) $x^3 + 6x = 20$, di cui si conosceva in qualche modo la soluzione 2

2) $x^3 - 15\,x = 4$, di cui si conosceva in qualche modo la soluzione 4

3) $x^3 - 9\,x = 10$, di cui si conosceva in qualche modo la soluzione -2

4)Molti esempi di equazioni cubiche trattate nell'*Artis Novae* di Cardano e nell'*Algebra* di Bombelli, tutte con soluzione intera.

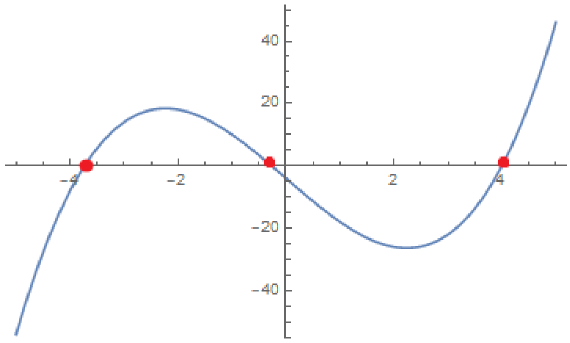
Non era un caso.

Come si era arrivati a queste soluzioni? Penso, come ho detto, facendo una tavola in cui x (orizzontali) aveva i valori dei numeri naturali (da 1 a N) e m aveva i valori dei numeri naturali da 1 a k. Ma, se si guardano le due equazioni (1) (2) (3), si vede che in tutte m = 3p dove p è intero. Che n=2q non deve essere una sorpresa per x = 2 e x= 4, visto che sia x^3 che mx sono numeri pari.

	m=3	m=6	m=9		m= -9	m= - 15
x=1						
x =2, x^3= 8	8+3*2=14 x^3 +3x = 14	8+6*2=20 **x^3 +6x = 20**	8+ 9*2= 26 x^3 +9x = 26			8-30= -22 x^3 +22 = 15x
x= -2 x^3= -8					-8+18=10 x^3-9x=10	
x =4, x^3=64	64+12=72 x^3 +3x = 72	64+24=88 x^3 +6x = 88				64-60=4 **x^3-15x =4**

IV. Le tre soluzioni reali (ma due sono negative, cioè *fictae*) di:

$$x^3 - 15\,x = 4$$



La curva ha tre radici, (x=4, x = -2+√3 =-0.268, x=-2-√3 = -3.732) ma due radici sono negative, e non sarebbero state prese in considerazione ai tempi di Cardano (sebbene la formula risolutiva potesse produrle). Leibniz chiamava le soluzioni negative "false soluzioni" (*fictae*). Ancora nel XIX secolo, Peacock, nel suo *Trattato di Algebra* , distingueva tra "algebra aritmetica" (dei numeri non negativi) e "algebra simbolica". I numeri negativi appartenevano all'algebra simbolica, ed erano "simboli", non lontano dalla prima denominazione degli immaginari come "numeri sofisticati" (Cardano).

V. "Capitolo" della soluzione di Del Ferro, di Pompeo Bolognetti

(Questo "capitolo" descrive soltanto la formula risolutiva, senza dare alcun cenno del metodo da seguirsi per ottenerla)

Di cavaliero Bolognetti lui l'ebbe da messer
Sipion dal Ferro bolognese.

Il capitolo di cose e cubo eguale al numero.

Quando le cose e li cubi si aggiungono al numero $\left[ax^3+bx=c\right]$
ridurrai l'equazione a 1 cubo: $\left[x^3+px=c\right]$
partendo per la quantità delli cubi, $\left[p := \frac{b}{a}\ q := \frac{c}{a}\right]$
Poi cuba la terza parte delle cose $\left[(\frac{p}{3})^3\right]$
Poi quadra la metà del numero $\left[(\frac{q}{2})^2\right]$
e questa suma con il detto cubato $\left[(\frac{p}{3})^3+(\frac{q}{2}^2)\right]$
et la radice quadra di deta summa $\left[\sqrt{(\frac{p}{3})^3+(\frac{q}{2})^2}\right]$
più la metà del numero fa binomio $\left[\sqrt{(\frac{p}{3})^3+(\frac{q}{2})^2}+\frac{q}{2}\right]$
et la radice cuba di tal binomio $\left[\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{p}{3})^3+(\frac{q}{2})^2}+\frac{q}{2}}\right]$
men la radice cuba del suo residuo $\left[\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{p}{3})^3+(\frac{q}{2})^2}-\frac{q}{2}}\right]$
val la cosa $\left[x=\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{p}{3})^3+(\frac{q}{2})^2}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{p}{3})^3+(\frac{q}{2})^2}-\frac{q}{2}}\right]$

(Da: **"L'algebra" di Rafael Bombelli: nuova trascrizione e commento"** – *L'algebra di Rafael Bombelli, nuova trascrizione e commento* , di Valeria Fulvi (Tesi di Dottorato, Università di Bologna, 2011-2012) https://amslaurea.unibo.it/3682/1/fulvi_valeria_tesi.pdf

Quando le cose [le incognite] e i cubi vengono aggiunti al numero
Ridurrai l'equazione a un cubo [un solo cubo, dividendo per a, numero dei cubi]
Dividendo per la quantità dei cubi [la quantità dei cubetti è a]
Quindi fare il cubo della terza parte delle cose [la quantità di cose è p]
Quindi quadra la metà del numero
E aggiungi la somma al cubo che abbiamo menzionato
E fai la radice quadrata di tale somma
Più la metà del numero, e ottieni un binomio
E la radice cubica del binomio
Meno la radice cubica del residuo
È il valore della cosa [dell'incognita]

Il "capitolo" (fino a un certo punto, perché di solito il capitolo era in terzine dantesche) proviene da un manoscritto ritrovato nella Biblioteca Universitaria di Bologna da Ettore Bortolotti, dal titolo **Regole principali dell'arte maggiore, detta Regola della Cosa ovver d'Algibra** , che sembra riferirsi alle lezioni tenute da Pompeo Bolognetti attorno al 1554-58, trent'anni dopo la morte di Scipione del Ferro.

La nobile famiglia bolognese dei Bolognetti ebbe diversi illustri rappresentanti di nome Pompeo. Questi, "il vecchio", era stato allievo di Scipione Dal Ferro). (vedi http://progettomatematica.dm.unibo.it/StoriaEq/medio.html)

Tra l'altro, il suo "capitolo" sembra sfatare la leggenda tipica degli pseudo-storici romantici, che Scipione morente confidò la regola soltanto a Antonio da Fior.

VI. L'*Algebra* di Rafael BOMBELLI


L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuiſa in tre Libri.
Con la quale ciaſcuno da ſe potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copioſa delle materie, che in eſſa ſi contengono.
Poſta hora in luce à beneficio delli Studioſi di detta profeſſione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Roſsi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

L'Algebra, opera di Rafael Bombelli da Bologna, divisa in tre libri con la quale ciascuno da sé potrà venire in perfetta cognitione della teoria dell'Aritmetica), ed 1579 (I ed.

1572.) Altri due libri restarono manoscritti, furono scoperti nel 1923 e furono pubblicati nel 1929.

VII. Chi introdusse il simbolo "i"?

L'attribuzione dell'invenzione del simbolo **i** per indicare l'unità immaginaria, non è così diretta, né l'adozione avvenne d'un tratto. A quanto pare Euler se ne servì solo in un manoscritto del 1777, tardi, si pensa, perché precedentemente Euler aveva adottato i per indicare un numero infinito (Wallis aveva preferito il segno ∞, che rimase) o addirittura un numero *tendente* a infinito, includendo nel simbolo il concetto di "limite per numero tendente ad infinito". Il manoscritto di Euler fu pubblicato nel 1794, dopo la sua morte avvenuta nel 1783.

Secondo il Boyer, fu l'adozione di i da parte di Gauss nelle sue *"Disquisitiones arithmeticae"*, del 1801, a fissare una volta per tutte il simbolo i come unità immaginaria. (*A history of mathematics,* by Carl Benjamin Boyer, 1991). Confesso che la citazione delle *Disquisitiones Arithmeticae* non mi sembra corretta: ho scorso il libro, forse affrettatamente (700 pagine circa), e non ho trovato la i (o meglio, di i ne ho trovate, ma nel contesto tradizionale). Del resto, ancora nel 1815, Gauss, nell'articolo in cui porgeva una seconda dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra (la prima era del 1799), usava il simbolo √(-1). Tuttavia, nel 1821, nella ***Theoria residuorum biquadraticorum,*** Gauss introduce gli interi gaussiani, e usa decisamente la i ("indicando con i, d'ordinario (*pro more*) la √(-1).") Se si vuole far risalire a Gauss la propagazione del simbolo i, probabilmente questo è il saggio a cui occorre far riferimento.

Ma Cauchy, nel suo celebre "*Cours d'Analyse*"(1821), usa ancora e soltanto √(-1).

VIII. Breve glossario di termini matematici del Rinascimento italiano:

L'incognita è " *La cosa* "(la cosa); il suo quadrato è il " *il censo* ", poi il *quadro*; il suo cubo è " *il cubo* ". Il *lato del cubo*, è la radice cubica.
Il termine noto è "*il numero* ".
Bombelli, nella sua Algebra, userà "*tanto*", invece di "*cosa*", e "*potenza*" invece di "*censo*". Per lui *"dignità"* è una potenza generica.
Un termine che si trova di frequente, e il cui significato è abbastanza oscuro, è quello di "*residuo*". Nell'accezione più semplice è il binomio formato dalla differenza di due monomi. Un'accezione di residuo più complicata è che si tratti del polinomio che moltiplicato per un binomio riproduce un binomio di radicali cubici. Non chiarissimo. Ad ogni modo, ecco due esempi.
$(a^2 - a\,b + b^2)$ è residuo di $(a + b)$ in quanto $(a^2 - a\,b + b^2)(a + b) = (a^3 + b^3)$
$(a^2 + a\,b + b^2)$ è residuo di $(a - b)$ in quanto $(a^2 + a\,b + b^2)(a - b) = (a^3 - b^3)$

FIGURE

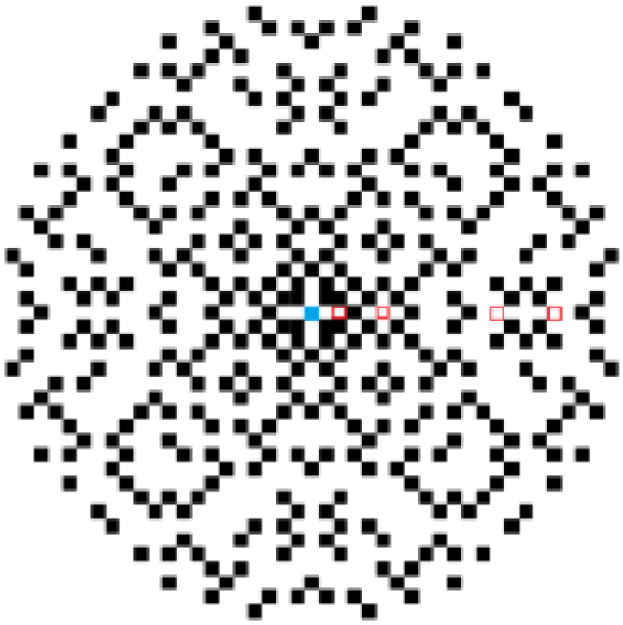
Due esempi di ciò che succede ad estendere al campo complesso concetti matematici tradizionalmente limitati al campo reale.

1) Numeri primi (da 1 a 19)

NUMERI PRIMI NEL CAMPO REALE

I primi otto numeri primi, restando nel campo reale (zero e 1 non sono primi!)

Fig 1.1



NUMERI PRIMI GAUSSIANI, estesi al piano complesso.

I numeri in rosso non sono più primi; in compenso abbiamo guadagnato i numeri primi negativi, oltre a quelli complessi.

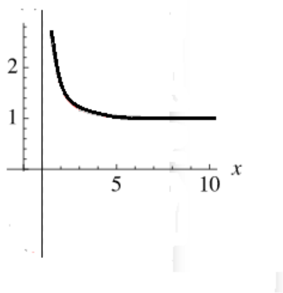
Fig.1.2

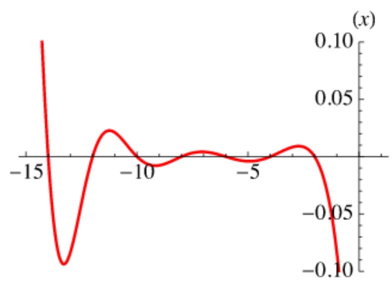
Il fatto più curioso che riguarda i numeri primi sull'asse reale, se noi li estendiamo al campo complesso, è che scompaiono le coppie di numeri primi gemelli, (quelli de "*La solitudine dei numeri primi*",) in quanto inevitabilmente uno dei numeri primi della coppia è della forma 4n+1, dove n è un intero. Infatti esiste un notevole teorema che afferma che tutti i numeri primi della forma 4n+1 sono scomponibili nella somma di due quadrati. Ma noi sappiamo che, nel campo complesso, $(a^2 + b^2) = (a+ ib)(a-ib)$, e quindi il numero non può essere primo. In Fig.1.1 i numeri primi che scompariranno dall'asse reale passando al campo complesso sono segnati in rosso. In quanto a 2 è (1+i)(1-i).

2) La funzione Zeta di Riemann, o ζ(s), ove s= σ + it

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

Eq. 2.1





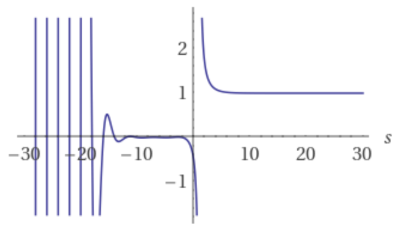


Fig.2.1 Fig.2.2 Fig.2.3

Fig.2.1: la funzione Zeta quale risulta da Eq 2.1, per s reale. In altre parole, la funzione Zeta come sarebbe se non si conoscessero i numeri immaginari.
Fig.2.2: Estensione a valori di Zeta per s negativo, che possono ottenersi estendendo la Zeta al campo complesso.
Firg.2.3: La funzione Zeta sull'asse reale, ottenuta unendo Fig.2.1 e 2.2. Si notino le diverse scale in Fig.2.1, 2.2, 2.3.

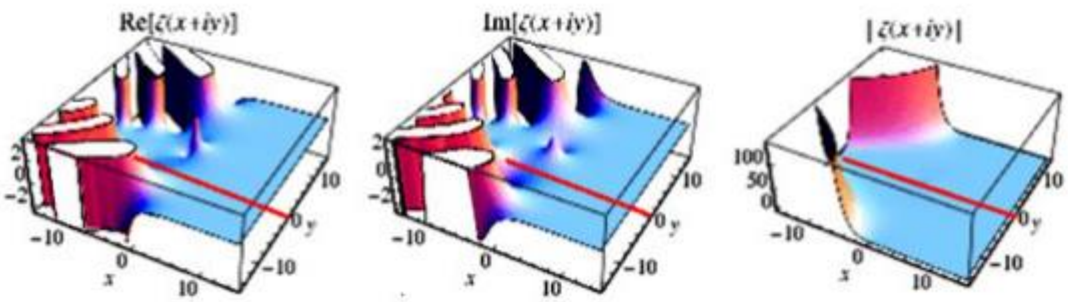


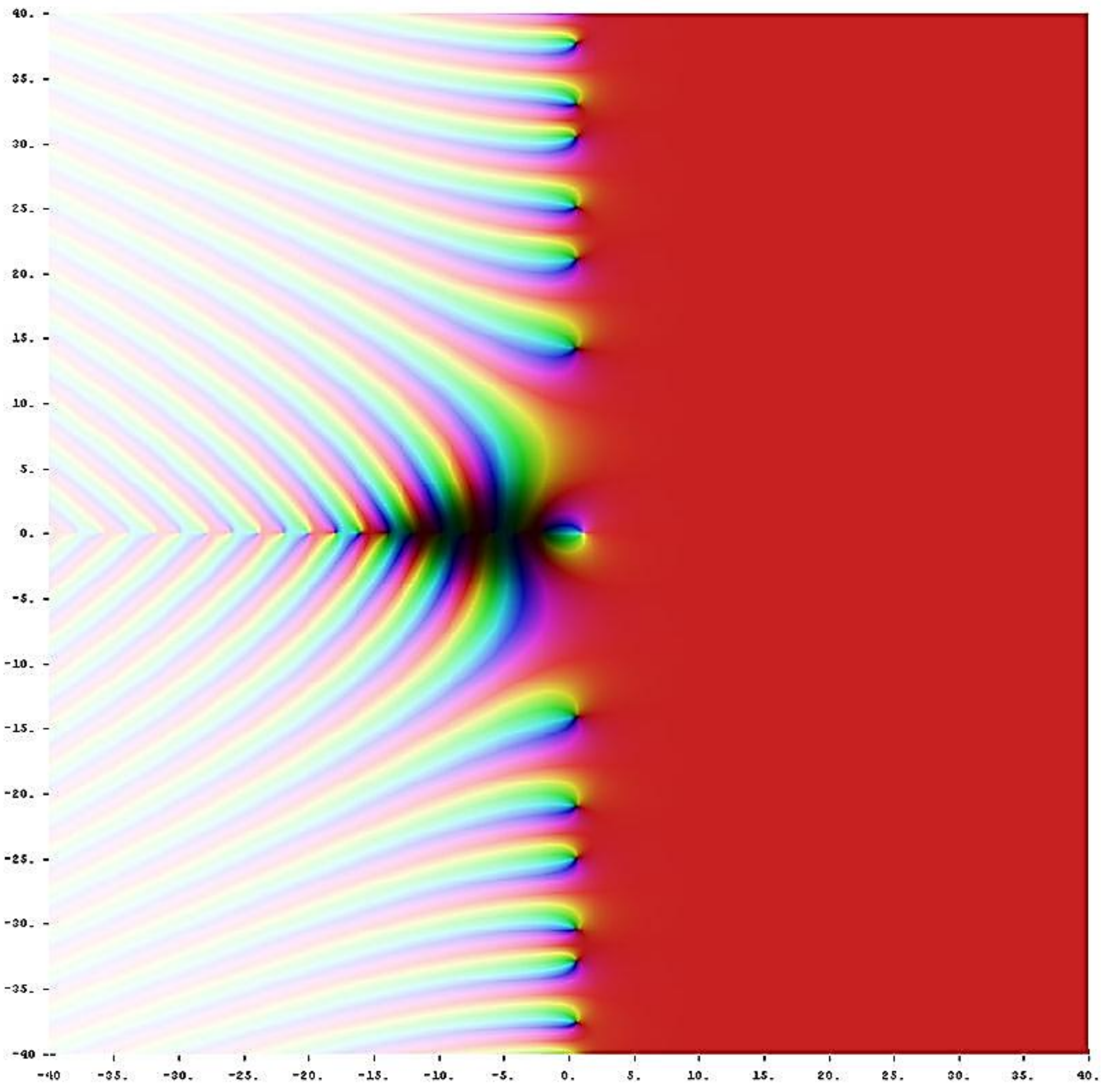
Fig.2.4

Parte reale, parte immaginaria e modulo della funzione complessa ζ(x+iy), estesa all'intero piano complesso.

In rosso l'asse reale, sul quale conosciamo i valori della funzione reale, dati in Fig.2.3 (si noti che sul piano azzurro nelle tre figure per la parte reale, la parte immaginaria e il modulo o valore assoluto, le tre funzioni hanno eguale valore (altezza) =1)

(https://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html)

Una figura riassuntiva è data in
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1b/Complex_zeta.jpg
Autore: Jan Homann, Public domain, via Wikimedia Commons
Le spiegazioni non sono molte, né del tutto chiare. Una spiegazione abbreviata, e neppur essa del tutto chiara, si trova in https://de.wikipedia.org/wiki/Riemannsche_Zeta-Funktion. Ma almeno si può ottenere un'idea di quello che succede attribuendo valori complessi alla s in Eq.2.1. I famosi zeri solo dei punti neri discernibili agli estremi delle "lingue" (in realtà catene di montagne altissime) provenienti da sinistra.



Grafici e diagrammi sul piano complesso mi paiono impressionanti, soprattutto se paragonati al grafico iniziale (Fig.2.1). Si pensi ora che la funzione Zeta si estende all'infinito...