Quanto tempo occorre per calcolare la radice quadrata di 4624? (con qualche bonus)

Ancora una volta, questo saggio discende da una domanda comparsa su Quora.: **Qual è la radice quadrata di 4624**? Riporterò qui la mia risposta, che risale al 27 dicembre 2019, un po' adattata.

Risposta breve:

Si suppone che si sappia che un numero fino a quattro cifre ha per radice quadrata un numero al massimo di due cifre. Ciò posto, si impiegano tra 30 secondi e un minuto a fare il conto a memoria, ***se si sa che si tratta di una radice quadrata esatta:*** 60 x 60 fa 3600; 70 x 70 fa 4900. Quindi la radice di 4624 è 6 seguito da un numero il cui quadrato termina con la cifra 4. Ce ne sono due, cioè 2 e 8. Il primo sarebbe assai vicino a 3600, il secondo invece potrebbe andare bene. Si verifica e si conclude che la radice quadrata è 68.

APPENDICE (con bonus)

Pubblicata questa risposta, rimasi stupito dall'alto numero di visualizzazioni: ancora oggi, si tratta della mia risposta che ha avuto il quinto numero di visualizzazioni, su 245 risposte da me date sinora, agosto 2021, sugli argumenti più disparati, la maggior parte delle quali secondo me sono più interessanti della presente.

Tenendo conto di questo fatto, noto che, con un ragionamento che è sufficiente fare una sola volta in tutta la vita, si può portare **l'estrazione di una radice quadrata esatta di un numero di quattro cifre sotto i 30 secondi.** Spero inoltre che qualcuno che non conosce questi aspetti della teoria "elementare" dei numeri (elementare mica tanto) possa interessarvisi.

Calcolando i quadrati (0 x 0 = 0), 1 x 1 = 1, 2 x 2=4, 3 x 3 =9, 4 x 4 =16, 5 x 5 = 25, 6 x 6 = 36, 7 x 7 =49, 8 x 8 = 64, 9 x 9 =81, vediamo che le cifre finali di un quadrato perfetto si susseguono nell'ordine (0), 1, 4 ,6, 5, 6, 4, 1 e, naturalmente, che nessun quadrato perfetto, fosse anche di 30000 cifre, può terminare con una delle cifre 2, 3, 7, 8.

> A questo punto si può aggiungere che i primi (0,1,4,5,6) si chiamano "residui quadratici modulo 10 (o "di 10")" e i secondi (2,3,7,8) "non residui quadratici modulo 10 (o "di 10")", cioè resti o non-resti della divisione per 10 dei quadrati. Qui inizia un'intera teoria. Il curioso troverà forse che i residui quadratici di 100 sono soltanto 22. E poi, un passo dopo l'altro, forse raggiungerà un primo culmine nella "legge di reciprocità quadratica", dimostrata da Gauss e da lui battezzata in una sua lettera come a ***"theorema aureum",*** in uno dei suoi rari momenti di entusiasmo: conosco soltanto un altro teorema che lo entusiasmò tanto da battezzarlo ***"theorema egregium***", in geometria differenziale. Il *Teorema aureum* compare col nome di *teorema fondamentale* al paragrafo §131, pag 132 delle *Disquisitiones arithmeticae* di Gauss ventunenne, libriccino (!) di circa 700 pagine, di cui non si può che consigliare la lettura, almeno per vedere fino a che pagina si arriva senza gettare la spugna. Il latino sarà la minima delle difficoltà. (Ma

dunque la tanto disprezzata aritmetica può contenere tante trovate, e quindi quesiti, da riempire un libro di settecento pagine?)

Ma torniamo coi piedi per terra. Si vede subito che i residui quadratici (lasciando da parte lo zero) si susseguono simmetricamente rispetto al residuo 5: 1,4,9,6,**5,**6,9,4,1. Quindi, se abbiamo un numero come 4624 e abbiamo il dubbio se la radice sia 62 o 68, non abbiamo altro da fare che paragonarlo al quadrato di 65, che si può calcolare, come penso tutti sappiano, in pochi secondi: il quadrato di qualsiasi numero che termina in 5 lo si ottiene facendo due parti del numero: la seconda è il 5 finale, la prima (che chiameremo A) è tutto ciò che precede il cinque. Il quadrato del numero A5 sarà A*(A+1)**25**. Nel nostro caso $65^{2,}$ abbiamo 6 x7=42, a cui si appiccica 25 = 42**25**, che è più piccolo del nostro 4624 e ci dice immediatamente che la radice di 4624, se è esatta, non può essere altro che **68.**

Questo ragionamento accelera i tempi, perché 65 x 65 lo si calcola in pochi secondi, a mente, mentre 68 x 68 richiede un po' di tempo in più. Si provi con qualche altro quadrato perfetto. Per esempio: 7569. Può essere un quadrato perfetto (perché termina per 9), ed è compreso tra 80*80 =6400 e 90*90= 8100. Poiché termina per 9, la cifra finale della radice può solo essere o 3 o 7. Ma, usando la regola data sopra, 85*85 = 7225, che è minore di 7569. Quindi la radice quadrata è 87.

Insomma: 30 secondi al massimo.

Bonus.

1- Trovare le **radici cubiche** (di numeri fino a sei cifre che abbiano radici cubiche esatte) richiede un maggiore sforzo di memoria e nessun calcolo. Naturalmente chi non conosce il trucco può anche restare stupito.

Occorre ricordare a memoria la tabellina dei cubi degli interi da 1 a 10 (metto in grassetto l'ultima cifra):

(0^3)=0); 1^3= **1**; 2^3=**8**, 3^3= 2**7**; 4^3= 6**4**; 5^3= 12**5**; 6^3= 21**6**; 7^3=34**3;** 8^3= 51**2;** 9^3= 72**9.**

La sequenza è ora **1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9.** Come si vede, ogni cifra compare una sola volta. Inoltre, sempre lasciando fermo il 5, la somma delle cifre di numeri equidistanti da 5 è 10. Questo facilita il ricordare le ultime quattro cifre conoscendo le prime quattro, che si calcolano facilmente a memoria. La cosa è più facile a vedersi che a spiegarsi.

Come si vede, lo svantaggio è che bisogna ricordare i cubi (il che ci dà le prime e le ultime cifre), e il vantaggio è che a una data cifra finale del cubo corrisponde una sola cifra finale della radice.

Sia per esempio da trovarsi la radice cubica di 79507. Sezioniamo il numero di gruppi di tre cifre partendo da destra: essi sono 79 e 507. Il primo ci indica la prima cifra: è chiaramente compreso fra 4 (poiché 4^3=64) e 5 (poiché 5^3= 125). La seconda cifra è chiaramente 3 perché 3^3= 27. Risultato: **43.**

Un numero più grande come 704969? D nuovo sezioniamo in due gruppi di tre cifre: 704 e 969. Qui occorre ricordare che 704 è compreso tra $512=8^3$e $729=9^3$, per cui la prima cifra è 8. In quanto alla seconda, ripassando l'elenco dei cubi troviamo che $1^3= 1$, e quindi il numero equidistante da 5 è 9 (in questo caso abbiamo già utilizzato $9^3= 729$ per trovare la prima cifra, e quindi sappiamo che la seconda cifra è 9). Risultato: **89.**

Anche per le radici cubiche si dovrebbe riuscire in meno di trenta secondi e, conoscendo a memoria i cubi delle cifre da 1 a 9, anche in meno di venti secondi.

2- Trovare le radici quarte è più complicato, perché $1^4=1$, $2^4= 16$, $3^4= 81$, $4^4= 256$, $5^4= 625$, $6^4= 1296$, $7^4=2401$, $8^4=4096$, $9^4=6561$, e le ultime cifre si succedono nell'ordine **1, 6, 1, 6, 5, 6, 1, 6, 1**. Possiamo dire subito che un intero che termina per 2,3,4,7,8,9 non può essere mai una quarta potenza, ma non ho trovato nessun trucco per estrarre la radice quarta, anche se esatta, in meno di un minuto (a meno che l'ultima cifra sia 5). L'unica cosa che ho notato è che le potenze quarte dei numeri pari terminano con 6 e quelle dei numeri dispari terminano con 1.

3 – Può pertanto sembrare stupefacente il fatto che invece sia banale trovare la seconda e ultima cifra delle **radici quinte esatte** di numeri fino a dieci cifre (!), in quanto: $1^5=\mathbf{1}$, $2^5= 3\mathbf{2}$, $3^5= 24\mathbf{3}$, $4^5= 102\mathbf{4}$, $5^5= 312\mathbf{5}$, $6^5= 777\mathbf{6}$, $7^5=1680\mathbf{7}$, $8^5=3276\mathbf{8}$, $9^5=5904\mathbf{9}$.
Si vede infatti che le ultime cifre sono tutte diverse e si susseguono nell'ordine naturale, il che ci fa trovare immediatamente la cifra delle unità.

In compenso è più difficile trovare la prima cifra, a meno di studiare a memoria le quinte potenze deille cifre da 1 a 9. Possiamo però farci una **tabella approssimata** che dovrebbe soccorrerci (ma non garantisco nulla) in tutti i cento numeri di due cifre. Ci aiuteranno soprattutto le approssimazioni che: $2^5= 32$; $3^4 =81$, per noi 80; $7^5=49$, per noi 50; $9^2=81$, per noi 80.

- $1^5=\mathbf{1}$, e di lì non si scappa.
- $2^5= 32$, e lo si calcola rapidamente sulle dita raddoppiando cinque volte a partire da 2 ($=2^1$): 2,4,8,16, **32**.
- $3^5= 3^4 3 = 81*3 = 243$, o, per quel che importa, 80 *3 =**240**.
- $4^5 = 2^5 2^5 =32*32$, che è poco più di 1000. (Sappiamo che 30 *30 =900). Noi possiamo usare **1000.**
- $5^5 = (10/2)^5 = 100000/32$. Questo fa circa **3100** (in realtà 3125.)
- 6^5 è forse il più complicato, ma si può calcolare approssimativamente come $2^5 3^5 = 2^5 3^4 3$ e sfruttando il fatto che $2^5= 32$, mentre 3^4 è circa 80. Quindi $6^5=32*80 *3= 32*240=$ **7680** invece di 7776.
- $7^5= 7^2 7^2 7$, tenendo conto del fatto che $7^2 \cong 50$, per cui $7^5 \cong 50*50*7 = 2500*7=$ **17500**. invece di 16800.
- $8^5 = 2^5 \times 4^5 = 32 * 1024$, circa **32000** invece di 32768.
- $9^5= 9^2 9^2 9$, dove $9^2 \cong 80$ e quindi $9^5 = 8 *8*10*10*9 = 6400*9 =$ **57600** invece che 59049.

Per esercizio si calcoli la radice quinta di 1 564 031 349. La seconda cifra è **9**. Dividiamo ora il numero dato in sezioni di 5 cifre (al massimo) partendo da destra. Otteniamo 15640 31349. La prima cifra è più piccola della nostra approssimazione per $7^5 =17500$. Quindi il numero è **69.**

Naturalmente, le nostre approssimazioni introducono qualche rischio, soprattutto quando calcoliamo cifre che sappiamo terminare in 1 o in 9, vicino alle linee di demarcazione che abbiamo approssimato. Tuttavia, ad esempio in questo caso, considerando che l'ultima cifra è 9, siamo sicuri che la radice da noi cercata è 69 e non 79, perché dovrebbe essere assai vicina a 70.

"Have fun."