Dalla copertina del libro “Surreal Numbers”,
di Jill.C. Knuth (moglie di D. Knuth)

I NUMERI SURREALI

(Elementare introduzione in prosa o quasi)

D.E. 2021

I. INTRODUZIONE

Ho sempre desiderato, fino dal tempo della comparsa del libro “SURREAL NUMBERS” (1974), di D.E. Knuth, (al quale mi riferirò in futuro come “il Libro”,) di comprenderne un po’ quella che si chiama “la filosofia”, ma la mia decrescente rapidità nell’apprendere concetti nuovi era sempre inferiore alla crescente rapidità con cui li dimenticavo, se non mi ci dedicavo con passione. Ora ho raggiunto una veneranda età, e penso che questo sarà uno degli ultimi problemi studiati e non capiti nella mia vita, i miei “sassolini nella scarpa”, a cui potrò dedicarmi “con (sufficiente) passione” per togliermeli una volta per tutte dalla scarpa.

Volevo farne un poemetto, come il solito quando voglio comprendere a fondo un concetto, ma mi sono presto accorto che lo sforzo era troppo grande e non valeva la pena. La formula della moltiplicazione di due numeri surreali, che incontreremo, è difficile da mettere in prosa (vedi, poco oltre, il testo della "Pietra Nera" del Libro, quasi incomprensibile su questo punto, versetto 8), ma metterla in versi è ancora più difficile. Mi andrebbe ancora bene, ma i versi diventano più ermetici della prosa, e questo non va più bene. Solo in rari casi, quindi, userò i versi.

Per l'introduzione, lo si può ancora fare.

Un nuovo "gioco" in versi volli mettere
Che Conway inventò da mezzo secolo,

John H. Conway, 1937-2020 (riferimento "On Numbers and Games", AP, 1976)

e Knuth per primo presentò al pubblico
non come un articolo scientifico

Donald E. Knuth, 1938; (riferimento il Libro "Surreal Numbers", pubblicato nel 1974)

ma storia d'una coppia andata al mare
per campeggiar, far l'amore e nuotare:

ma ciò non basta. Fatta una nuotata
o "altro", la coppia è ancora affamata

di cibo intellettual, moda passata.
E per questo a un'iscrizion trovata

Su una pietra nera dedicatasi,
La coppia insieme ad esplorare trovasi

Un sistema di non banali numeri
Che "numeri surreali" battezzano.

"**Surreal Numbers**": questo è il titolo,
del Libro che rivelò i nuovi numeri.

È un vero "gioco"? Compito imponente!
E ci volea di **Conway** la gran mente,

(Ma per lui la venerazione è tanta,
che parla solo a pagina quaranta.

Dice solo otto parole, ma il suono
della sua voce è un rombo di tuono).

> Conway, menzionato come "C." a pag. 40 del Libro dice solo: "**Rubbish. Wait until you get to infinite sets.**" Che tradotto significa: "Sciocchezze, aspettate ad arrivare agli insiemi infiniti".

Vero è che le leggi da Conway date
A priori, non son giustificate:

È come se scendessero dal cielo,
Di matematica nuovo vangelo

Che dal nulla permette di esprimere
Ciò che prima sembrava inesprimibile

Nel campo dei numeri reali
Che per noi sono tradizionali.

Nato quasi per gioco, il sistema dei numeri surreali (nome inventato da D. Knuth) amplia il campo dei numeri reali, in modo che, oltre a mille altri risultati, possa tra l'altro rispondere a domande del tipo di: Quanto fa $\infty/2$?

O addiritura, come scrive il Conway stesso nel capitolo introduttivo del suo libro (esempio sovente ripreso da altri), quanto fa

$$\sqrt[3]{\infty + 1} - \frac{\pi}{\infty} ?$$

Non sono certo questi i risultati più notevoli del nuovo "campo" di numeri esplorato da Conway, ma li riporto tanto per indicare la potenza del metodo, anche nel caso di problemi del tipo di quelli che credo molti studenti di matematica si siano oziosamente proposti almeno una volta nella loro carriera.

Ci fu qualche incertezza ad accettare il fatto che il sistema inventato da Conway fosse un "campo"[1] in senso matematico oppure no, almeno fino a che Conway non illustrò una formula per la divisione. Per molti si tratta **del campo più esteso possibile totalmente ordinato,** e lo sarà anche per noi. In ogni caso, bisogna che il lettore si abitui a un concetto. I numeri sono entità astratte, e non sono *necessariamente* indicati con le cifre inventate dagli indiani, dagli arabi o da altri popoli, sui quali si possono eseguire, con tecniche più o meno complicate, le quattro operazioni. Il lettore si deve abituare al fatto che un numero possa essere indicato da un "composto" di due insiemi, che possono essere finiti o infiniti, ma rispettano certe condizioni:

(*) $$(\{A\} | \{B\})$$

Dove: **{A} = { Ø, a, b,c….. } e {B} = { Ø, u,v,w…)},** (Ø è l'insieme vuoto), sono due insiemi che possono essere composti da un numero qualsiasi, da zero a infinito, di numeri. Per il momento ci occuperemo di insiemi finiti, riservandoci di trattare gli insiemi infiniti, la parte che tiene in serbo le maggiori novità, a partire dal Capo V, pag. 48.

[1] Campo: In matematica, un **campo** è una struttura algebrica composta da un insieme non vuoto K e da due operazioni binarie interne, chiamate *somma* e *prodotto* e indicate di solito rispettivamente con + e * (o altro simbolo a piacere). Queste godono di proprietà assimilabili a quelle verificate da somma e prodotto sui numeri razionali o reali o anche complessi (Wikipedia.it)

Operando su un numero, abbiamo che i suoi due insiemi A e B costitutivi cambiano, in modo più o meno complicato, ma secondo chiare regole. Questo non ci deve spaventare. Consideriamo ad esempio la semplice addizione:

$$2 + 3 = 5$$

Un bambino che veda per la prima volta questa operazione, e apprenda che questa corrisponde al caso in cui la nonna gli dia due caramelle e la mamma 3, *deve* chiedersi per quale gioco di prestigio, siano scomparse le cifre 2, e 3 e si siano fuse in un'unica inedita cifra, 5 – dandoci però un risultato utilizzabile in pratica. Anche una semplice addizione può avere del magico, per chi non ne conosca la tecnica.
Ora, i numeri surreali, come vedremo, sono rappresentati da composti del tipo indicato in (*), anche se, perché ci possiamo raccapezzare, mantengono una stretta connessione con le cifre arabiche. Le quattro operazioni li trasformano in altri numeri della stessa forma. Si può chiedere perché occorra una forma così complicata. Il fatto è che solo se espressi in questa forma, si vedono i risultati di operazioni, che sarebbero inefficaci, o prive di senso, o impossibili nel campo dei nostri numeri reali.

Ma che cosa si chiede a un nuovo sistema di numeri? Poco e troppo.
Anzitutto va detto subito che i numeri surreali **non sono numeri complessi.**

> Si può immaginare di costruire numeri del tipo di a+ib, dove a e b sono due numeri surreali, e i è l'unità immaginaria. Questi si dicono numeri "surcomplessi", e sono stati studiati, ma qui non ce ne occuperemo.

Ciò posto, essi formano un "universo" che è un "campo totalmente ordinato"[2], che contiene i numeri reali e anche numeri infiniti e infinitesimi, rispettivamente più grandi e più piccoli in valore assoluto di qualsiasi numero reale positivo, sui quali si possono eseguire le quattro operazioni,

---

[2] In un campo totalmente ordinato (E. Artin, 1927) , dati tre elementi a,b,c, valgono due proprietà principali: I. se $a \leq b$, allora $a+c \leq b+c$; II: se $0 \leq a$ e $0 \leq b$, allora $0 \leq a * b$. I numeri complessi non costituiscono un campo ordinato. Infatti in un insieme ordinato il quadrato di un numero deve essere positivo, mentre il quadrato di i = -1. Non ha senso chiedersi se a sia maggiore o minore di b.

per cui valgono le consuete proprietà, commutativa, associativa e distributiva, dando risultati coerenti, e, a meno che siano inediti, eguali ai risultati già trovati con metodi tradizionali per i numeri reali. Quindi ci aspettiamo che ci sia uno zero additivo e moltiplicativo, e che ogni numero, eccetto 0, abbia un inverso. Ci aspettiamo che i nuovi numeri siano ordinati (in realtà i numeri surreali lo sono in due modi). È stato dimostrato che essi contengono altri sistemi di numeri non tradizionali, oltre ai numeri razionali, reali, superreali, iperreali (con i quali la somiglianza è forse più stretta,) transfiniti ordinali e chi più ne ha più ne metta. In realtà, *nessun campo* di numeri totalmente ordinati sfugge alla rete dei numeri surreali.

Dunque i numeri surreali sono "composti" ciascuno di due insiemi di *numeri* (Conway non specifica che tipo di numeri) che rispondono a certe condizioni. Su di loro si possono eseguire le quattro operazioni, che comportano che si possa definire l'inverso $1/x$ e l'opposto $-x$ di ogni numero surreale x (con la sola eccezione di $x = 0$). Le operazioni hanno un effetto sugli insiemi che compongono il numero. Mentre operazioni come $\sqrt{\infty}$ o ∞^{∞} non hanno senso nel campo dei numeri reali e in pratica producono solo come risultato ∞, o al meglio una relazione indeterminata (come $\infty - \infty$) , si vedrà che esse producono un diverso, ben preciso numero surreale, che non è sempre rappresentabile alla nostra maniera con cifre decimali (o in qualsiasi altra base).

Illustrar tal sistema è dunque il compito
Che mi propongo. Farò il possibile

Perché questo semplice riassunto
A un certo rigore sia congiunto.

Non si pretenda troppo. Pel momento
Di Knuth al Libro fo' riferimento.

II. LA PIETRA NERA.

Tradurrò ora il testo della "pietra nera" che la coppia vacanziera protagonista del Libro di Knuth trova in due pezzi, e in due tempi, mezza immersa nella sabbia della spiaggia. Knuth, di famiglia Luterana, conosce bene la Bibbia, e questo testo riecheggia il primo libro della (o del?) Genesi. Il linguaggio è biblico.

Il lettore novizio legga senza paura, senza lasciarsi spaventare da ciò che è scritto nella Pietra Nera. In fondo, a Knuth occorrono circa 111 pagine per decifrarne il significato (anche se va assai più in dettaglio di quanto ci vada io in una sessantina di pagine.)

LA PIETRA NERA

1. In principio tutto era vuoto e J. H. W. H.[3] Conway iniziò a creare numeri. Conway disse: "Ci siano due regole che producano tutti i numeri grandi e piccoli.
2.Questa sarà la prima regola: ogni numero corrisponde a due insiemi di numeri creati in precedenza, in modo tale che nessun elemento dell'insieme sinistro sia maggiore di o uguale a qualsiasi elemento dell'insieme destro.
3. E la seconda regola sarà questa: un numero è minore di o uguale a un altro numero se e solo se nessun elemento dell'insieme di sinistra del primo numero è maggiore di o uguale al secondo numero e nessun elemento dell'insieme di destra del secondo numero è minore di o uguale al primo numero. " E Conway esaminò queste due regole che aveva stabilito, ed ecco! Erano molto buone regole.
4. E il primo numero fu creato usando il vuoto come insieme sinistro, e il vuoto come insieme destro. E Conway chiamò questo numero "zero" e disse che esso sarà un segnale per separare i numeri positivi da quelli negativi. E Conway dimostrò che zero era minore di o uguale a zero e vide che era bene. E fu sera e fu mattino, giorno zero.
5. Il giorno successivo furono creati altri due numeri, l'uno con zero come insieme di destra e l'altro con zero come insieme di sinistra. E Conway

[3] In realtà Conway era solo J.H. (John Horton) Conway. Il JHVH è il "tetragrammaton, il nome impronunciable del Dio di Israele.

chiamò il primo numero "meno uno" e il secondo "più uno". E dimostrò che meno uno è minore di, ma non uguale a zero e zero è minore di ma non uguale a uno. E fu sera ...

(Qui la pietra nera è fratturata)

.....6?. E disse Conway: "Che i numeri siano sommati l'uno all'altro in questo modo: l'insieme di sinistra della somma di due numeri sarà la somma delle parti sinistre di ogni numero con l'altro; e similmente l'insieme destro sarà formato dalle parti destre, ciascuna secondo il suo genere." Conway provò che ogni numero sommato a zero resta immutato, e vide che la somma era bene. E fu sera e fu mattino, giorno tre.

7?. E disse Conway: "Che il negativo di un numero abbia come suoi insiemi i negativi degli insiemi opposti del numero stesso, e sia la sottrazione la somma del negativo". E così fu. E Conway provò che la sottrazione era l'inverso dell'addizione, e ciò era molto buono. E fu sera e fu mattino, giorno quattro.

8?. E Conway disse ai numeri: "Fate frutto e moltiplicatevi. Sia parte di un numero moltiplicata per un'altra, e sommata al prodotto del primo numero per parte dell'altro, e sia il prodotto delle parti sottratto. Questo sarà fatto in tutti i modi possibili, producendo un numero nell'insieme sinistro del prodotto quando le parti sono dello stesso genere, ma nell'insieme destro quando esse sono di genere opposto." Conway provò che ogni numero moltiplicato per 1 è immutato.

E fu sera e fu mattino, giorno cinque.

9?. Ed ecco! Quando i numeri furono creati per un numero infinito di giorni, l'universo intero apparve. E fu sera e fu mattino, giorno Aleph

א

10?. E Conway guardò le leggi che aveva dato ai numeri, e vide che esse erano molto, molto buone. E comandò che esse valessero per segni, e serie, e quozienti, e radici.

11?. Allora sorse un numero infinito minore di infinito. E le infinità di giorni generarono ordini molteplici di infiniti.

I versetti li ho numerati io. Si vede subito che manca un giorno, e forse qualche versetto, in quanto la frattura della pietra ci fa saltare senza tanti complimenti dal primo al terzo giorno. Tuttavia, ciò non ha conseguenze. Probabilmente manca un pezzo della pietra nera in cui si spiega come si procede con la creazione dei numeri, che invece tratteremo in modo più approfondito.

Bisogna dire che soltanto leggendo il Libro con qualche attenzione si possono interpretare le regole date, soprattutto nei versetti 6-9.

Ci sono comunque parole chiave, da me segnate in rosso, che occorre notare.

Possiamo intanto paragonare come si crearono i due universi di numeri, quello tradizionale e quello di Conway. Come disse il Kronecker:"Il buon Dio creò i numeri naturali, e l'uomo tutto il resto." Quindi la creazione, intesa come opera divina, è interpretata più o meno come in Fig.1a.

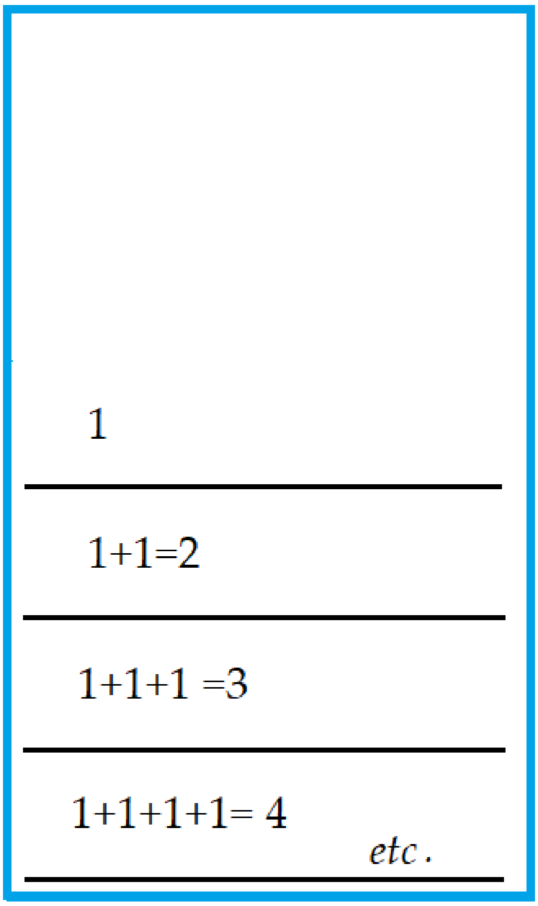


Fig.1a

La porzione centrale del mondo dei numeri naturali "creazione divina".

Die ganze Zahlen had der liebe Gott gemacht,
alles andere is Menschenwerk. (L- Kronecker)

Prima c'è il vuoto, poi compare l'Uno, poi in qualche modo (i logici della matematica non concordano sul come) viene data la legge dell'addizione di 1 al numero pre-esistente (o una legge di "ordine", che insegna come creare il successore di un numero). E così si creano i soli numeri naturali. Poi l'uomo aggiungerà lo zero, i numeri negativi, le frazioni etc. Ma il creatore si era limitato ai numeri naturali, e poi, evidentemente, disse agli uomini "Giocate e divertitevi, e, se ne ricaverete qualche utile, meglio per voi". E così incominciò la Matematica, il più grande, interessante, duraturo e utile gioco dell'Umanità intera.

Dal punto di vista di Conway, per incominciare c'è il vuoto, in cui ogni punto è fatto di vuoto (*vanitas vanitatum*…). Il vuoto è buio e informe.

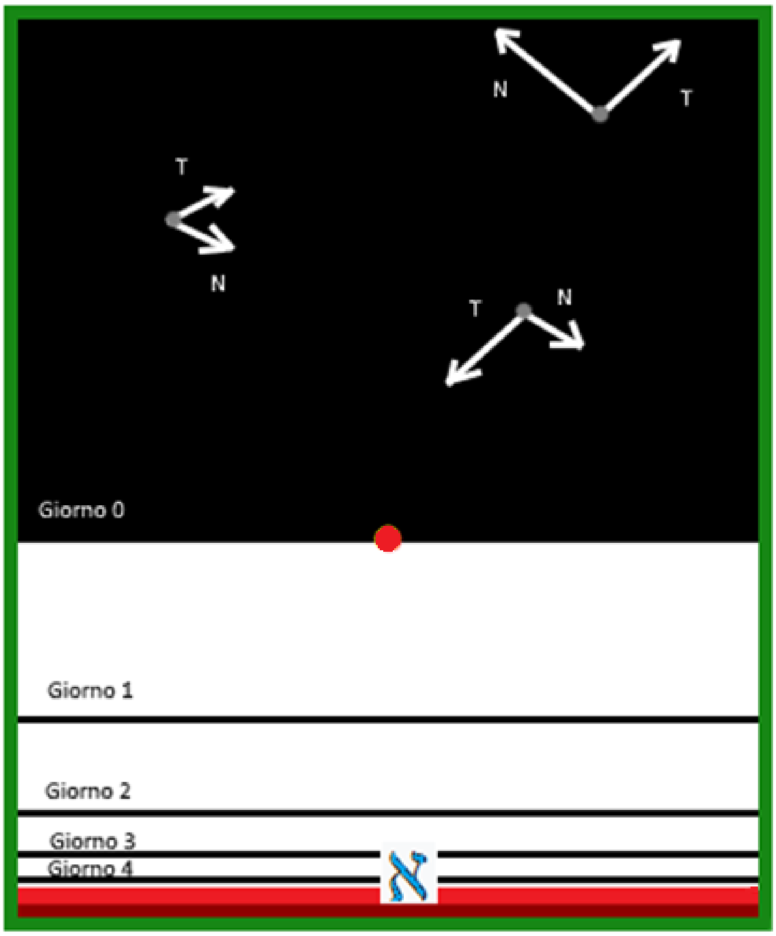


Fig.1b

La porzione centrale del mondo dei numeri surreali, il giorno 0 della creazione. Comparsa dello Zero (in rosso).

Il mondo dei numeri surreali è "buio e vuoto" prima del giorno zero, in cui inizia la creazione: **di fatto è una creazione dal nulla, o meglio, dal vuoto.** Vuoto significa che ogni punto di questo mondo prima della creazione dei numeri è sede di un insieme vuoto {∅}. Il mondo in attesa dei numeri è anche informe, nel senso che il tempo e lo spazio sarebbero variamente orientati, ma poco importa, perché tutti i punti sono vuoti. Nel giorno zero viene anche messo ordine nel mondo dei numeri: l'universo dei numeri è una retta orizzontale, N, e il tempo T è l'asse verticale. Si noti che qui faccio mia l'ipotesi dei due protagonisti del Libro (pag.93), che i "giorni dei numeri" che sono di durata costante se visti dai numeri creati, appaiano al creatore come giorni di durata decrescente (ogni giorno dura la metà del precedente), in modo da convergere *per lui* a una durata finita (qui eguale a 2 – giorni del creatore), a cui si giunge in un numero infinito di "giorni dei numeri", cioè fino al giorno Aleph (linea rossa). Che cosa succeda nei giorni dei numeri 0,1,2,3,4 … lo vedremo in seguito. Che cosa succeda nei giorni del creatore, successivi ad Aleph, lo vedremo ancora più avanti.

A questo punto penso sia sensato rileggere la Pietra Nera, e vedere che cosa significano anzitutto i versetti 1,2,3.

Ma, si ricordi, il punto è che i numeri, eccettuato lo zero, sono creati **progressivamente** servendoci dei numeri creati in precedenza, "giorno per giorno."

LE DUE LEGGI FONDAMENTALI

Dunque ogni dì dei numeri il gregge
S'accresce, secondo **la prima legge.**

I. LEGGE (o legge dei numeri ben formati) – versetto 2 della Pietra Nera.

Prima Legge: i numeri son dati
Ciascun da **due insiemi di creati**

Numeri in precedenza. Li diremo
Insiem sinistro e destro, ed imporremo

Che **del sinistro insieme nessun numero**
Sia maggiore o eguale di qualsiasi

Numero del destro insieme, ciò che è
O par facil da capir.   Ma bada be'

Che per noi consta ogni numero
Di due insiemi composti d'altri numeri

Ciascuno da due insiem costituito,
E così via, *sembra*, fino all'infinito…

Ma non è vero! In tal riduzione
troviam numeri la cui creazione

è sempre più antica, e diciam che i numeri
Che compongon gli insiemi d'un numero

In precedenza devon esser stati
Secondo la **prima legge** creati,

per cui gli insiemi di più antichi numeri
da un numero minor possono scegliere

di numeri creati, finché arrivasi
al giorno zero, e lì la corsa arrestasi.

Usiamo un formalismo appropriato: maiuscole per gli insiemi, minuscole per i numeri. Gli indici S e D significano sinistro e destro. La Legge I è quindi:

$$\mathbf{x = (X_S , X_D) \text{ in cui } X_S \ngeq X_D}$$

che significa che ogni numero x_S di X_S deve soddisfare la relazione $x_S \ngeq X_D$. Con questo si creerà un **nuovo numero "intermedio" x,** che andrà poi identificato con un numero già noto a noi tra i numeri reali. Questo, la Pietra Nera non lo dice esplicitamente, *ma a parte i primi numeri, 0, 1, -1 che includono brutalmente il vuoto, x sarà eguale a o maggiore di* ***ciascun*** *elemento dell'insieme sinistro e eguale a o minore di ciascun elemento dell'insieme destro.* A questa conclusione (che dimostrerò più avanti, da pag. 36), i due vacanzieri arrivano a pag.30 del loro Libro, in cui dimostrano per l'appunto che:

$$\mathbf{X_S \leq x \leq X_D}$$

Per semplificare, talvolta chiamerò l'insieme sinistro "il piccolo" e l'insieme destro "il grande", in quanto "non maggiore né eguale" *in generale* significa minore.

$$\not\geq$$

Già, ma perché Conway introduce questa lunga perifrasi? Essenzialmente è per poter far confronti con l'insieme vuoto. Non si dice "tutti i numeri dell'insieme di sinistra sono minori di tutti i numeri dell'insieme di destra", ma piuttosto "*non c'è numero nell'insieme sinistro che sia maggiore di o eguale a un numero dell'insieme destro*". Non utilizzando questa seconda dicitura, non sarebbe altrettanto chiaro che il composto (vuoto|vuoto) è certamente un numero "ben formato", e così, come si vedrà, l'intero sistema non potrebbe decollare.

> Coloro che hanno qualche familiarità con la teoria dei numeri irrazionali come sviluppata da **R. Dedekind** (1872), seguendo idee precedenti di **J. Bertrand** (1849), riconosceranno nel sistema di Conway una somiglianza con le **"partizioni" o "sezioni" di Dedekind,** punto di partenza della sua teoria sulla "continuità, e numeri irrazionali" (nel titolo del suo libro del

1872) da cui seguivano le basi per la sua teoria dei numeri reali. La somiglianza non è casuale, anche se Conway attribuisce l'idea originale all'ignoto autore del V libro degli "Elementi" di **Euclide**, forse **Eudosso di Cnido**.

Ma che cosa sono le partizioni di Dedekind, o chi per esso? Scriveva G.F.Tricomi nel suo "Lezioni di Analisi matematica", (Parte I, 1956, p.55): *"Se, con una legge qualsiasi [Sua nota: a patto che le classi risultanti non siano vuote] ripartiremo tutti i numeri razionali in due classi tali che **ogni numero della prima classe sia minore di ciascun numero della seconda classe,** si dice che si è fatta una partizione alla maniera di Dedekind del campo razionale."*

Un esempio di "legge qualsiasi" è quello di mettere nella prima classe (di sinistra) tutti i numeri (razionali) il cui quadrato è minore di 2, e nella seconda classe (di destra) tutti i numeri (razionali) il cui quadrato è maggiore di 2.

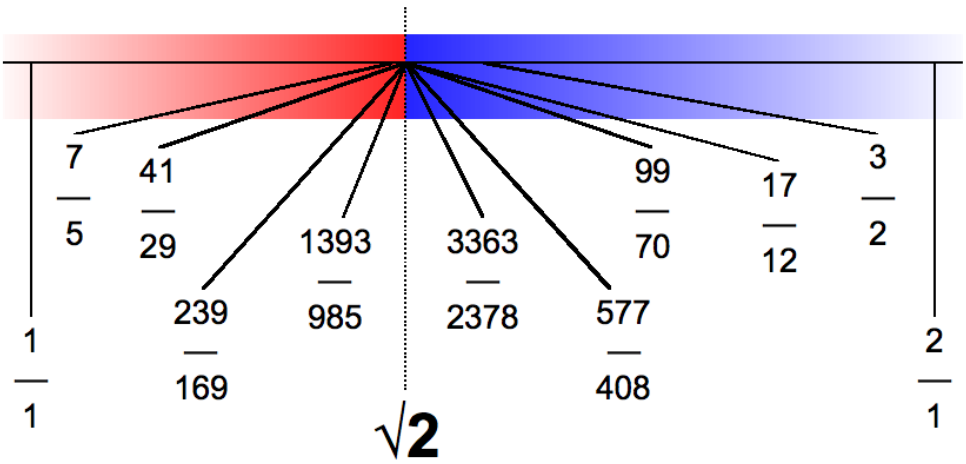


Fig.2

Partizione (di Dedekind) che definisce il numero "Radice di 2"

(Da Wikipedia, public domain, opera di Hyacinth.)

Domanda: in che cosa le partizioni di Dedekind differiscono dai numeri surreali di Conway? L'attento lettore vedrà subito le differenze.

Spiega Conway a pag. 3 del suo libro (in realtà la prima pagina del suo "Capitolo 0") *"Il suo [di Dedekind] metodo produce logicamente una "sana" collezione di numeri reali (ove si ignorino alcune obiezioni sulla base dell'inefficienza etc.) ma è stato criticato da diverse direzioni. Forse la critica più importante è che si suppone che [tutti] i numeri razionali siano stati costruiti [in precedenza] in qualche altro modo, e poi siano "ricostruiti" come certi numeri reali. La distinzione tra numeri razionali "vecchi" e "nuovi", sembra artificiale, ma è essenziale."* Infatti, come annunciato a pag.9 e come vedremo, questo è il succo del metodo di Conway: i numeri vengono creati in successive

generazioni e **ogni nuovo numero richiede l'esistenza di un insieme sempre più piccolo risalendo il passato**, costituito da numeri che, scopriremo, inizialmente sono o interi o funzioni diadiche (il cui denominatore è una potenza di 2). Tuttavia, quando sono passati infiniti giorni, come vedremo, i numeri di Conway confluiscono nelle partizioni di Dedkind, facilitando il nostro compito.
Che poi le frazioni che entrano nella formazione di un numero abbiano sempre a denominatore una potenza di 2 è una seconda differenza con la partizione di Dedekind, anche se assai meno importante della prima.

Con i numeri già creati ad un dato giorno si possono chiaramente formare diversi composti in cui la prima legge non è valida. Peccato per loro! Li chiamiamo pseudo-numeri, e (in questo saggio) non ce ne occuperemo più.

A prima vista sembra che la legge sia molto impegnativa. Se i due insiemi, sinistro e destro, sono composti ciascuno, diciamo, da mille numeri diversi, possiamo dover fare fino a un milione di confronti. Già, ma come?

Intanto, chiaramente occorre una legge che indichi una procedura per confrontare due numeri. E questa è appunto la seconda legge. Il legislatore, Conway, preferisce dare la legge che definisce la relazione "minore o eguale", oppure "non minore o eguale", piuttosto che una simile legge per definire la relazione "maggiore o eguale". Non è comunque una legge immediata:

II. LEGGE (o legge del confronto) – versetto 3 della Pietra Nera.

Sian due numeri (che entrambi si compongono
Di due insiemi.) **Minor o eguale** dicesi

Un numero d'un altro se, e sol se,
nessun numero dell'insieme che è

il suo sinistro **eguaglia o supera**
il secondo numero. **Questo componesi**

di due insiemi, e ugualmente numero non c'è dell'insieme destro di questo che

del primo numero è minor o uguale.

Come si vede, si confrontano insiemi con numeri, cioè ogni numero dell'insieme con un determinato numero. Per evitare una facile confusione e per ricordare questa legge, io ho l'ho sintetizzata in due versi rimati, che francamente consiglio di imparare a memoria, perché il confronto è forse l'operazione più frequente che si deve fare in un saggio introduttivo come questo. Vogliamo confrontare un primo (numero) con un secondo (numero), e ciascun numero si compone di due insiemi, un insieme sinistro, che per brevità e ovvi motivi, io chiamo il "piccolo" e un insieme destro, che io chiamo il "grande". La II Legge può quindi essere (senza troppo rigore) riassunta nel secondo distico di:

Minore **o eguale** il primo dicesi
Se la seconda legge qui rispettasi:

"il piccolo del primo è minor del secondo;
il primo è minor del grande del secondo."

Cioè diciamo che il primo (numero) è minore di o eguale al secondo (numero) se (ciascun numero de) l'insieme sinistro (il "piccolo") del primo numero è minore del secondo (numero) e il primo (numero) è minore (di ciascun numero) dell'insieme destro (il "grande") del secondo numero. In quanto a "minore", come è usato nel distico, è un'abbreviazione di "non maggiore o uguale", il cui simbolo è $\ngeq$ (vedi pag.13).
Nella definizione di Conway si tenga presente che il primo numero è definito come MINORE O EGUALE, mentre si chiede che i numeri degli insiemi da paragonare siano NON MAGGIORI O EGUALI, cioè, come si vedrà, siano **minori**, perché l'eguaglianza è esclusa.
Inoltre si noti che non si parla nella Seconda Legge del "grande del primo", né "del piccolo del secondo."

Qui c'è una piccola osservazione da fare: ogni insieme ha sempre un insieme e un sottoinsieme "improprii". L'insieme improprio è **l'insieme stesso**, e il sottoinsieme improprio è il **vuoto**, che tutti gli insiemi contengono. Noi però non paragoniamo in questa legge insiemi a insiemi, ma insiemi a numeri, e, come vedremo, noi assumiamo che il vuoto non sia un elemento di un insieme, ma un insieme che non contiene nessun elemento, neppure lo zero. Se aggiungiamo anche un solo elemento, anche uno zero, il vuoto non c'è più.
Una seconda osservazione, più importante, è che, una volta che un numero è creato come "composto" di due insiemi, *esso può essere identificato con un numero della tribù dei numeri reali a noi noti.* Questo rende i confronti assai più facili, perché i numeri già creati sono minori, eguali o maggiori di altri secondo regole a noi note. Normalmente gli insiemi sinistro destro di un numero, che dovrebbero esseri insiemi di elementi espressi come "composti", avranno invece come elementi numeri reali a noi noti, con cui i rispettivi composti sono stati identificati.

Il giorno zero (versetto 4) il creatore fece partire la creazione, creando un "composto" di due insiemi vuoti, cioè proprio dal nulla. FIAT LUX.

Primo numero: $(\varnothing \mid \varnothing)$.

Anzitutto dobbiamo chiederci se questo "composto" sia un numero "ben formato", cioè che rispetta la prima legge. In effetti, come abbiamo detto, **non esiste** nell'insieme sinistro alcun elemento che sia maggiore o eguale di un elemento dell'insieme di destra, in quanto non ci sono elementi in nessuno dei due insiemi. Abbiamo dunque un "numero ben formato".

Conway decise che questo è il numero ZERO, il primo dei numeri creati, e, partendo dallo zero, le due leggi di Conway permettono di creare tutti i numeri reali e qualcuno (!) in più. Inoltre, lo zero avrà il compito di separare i numeri positivi dai numeri negativi.

All'inizio non abbiam nessun numero:

vuoto è l'universo, e al vuoto arrestasi.

Ma le due leggi di Conway permettono
Di creare dal vuoto il primo numero.

Sia X_S [ics esse] insieme vuoto ed X_D [ics di]
Pure insieme vuoto. (Applichiam qui

La notazione che l'insieme vuoto
Sia Ø zero barrato, come è noto.)

Primo numero: (Ø, Ø).

E qui chi vuol giocar si deve chiedere:
per la prima legge, è questo un numero?

La risposta è sì, perché X_S [ics esse]
Non ha elementi, e neppur se volesse

Ne avrebbe eguali o maggior dei vari x_D,
Che non ci son. Potremmo obiettar qui

Che il vuoto di sinistra uguale è
A quel di destra. Ma non va ben, perché

Non possiam paragonar elementi
Se non ce ne sono di esistenti.

Ma bisogna battezzare il risultato:
che nome avrà il numero trovato?

Per Conway, chiaro è il responso vero,
Quel numero può esser solo zero.

(Ø, Ø) = 0.

E il nostro zero ha il ruolo di dividere
dai negativi i positivi numeri.

Ancora un passo noi dobbiamo fare
I nuovi numeri per interpretare,

visto che oramai del tutto è noto
che abbiam due insiemi, zero {0} e vuoto {Ø}.

Si noterà che un'altra notazione
Qui s'è usata, com'è tradizione,

Mettendo tra apposite parentesi
dell'insiem gli elementi in modo esplicito.

Qui ce n'è un solo, ma posson esser cento
O anche mille, se sei più contento.

{0} (insieme con un solo elemento, che ricordiamo, per esteso è
0 = (Ø, Ø);)

Notiamo, sempre con la legge del confronto, che **0 ≤ 0: (Ø | Ø) ≤ (Ø | Ø).**
Nel piccolo del primo , Ø, non c'è nulla che sia maggiore di o eguale al secondo (0) , il primo (0) non può essere confrontato con alcun elemento del "grande" del secondo, Ø , che non ha elementi, e quindi non si può dire che sia maggiore.

III. LA GENERAZIONE DEI NUMERI INTERI E DELLE FRAZIONI DIADICHE

(**Frazioni diadiche**: frazioni il cui denominatore è una potenza di 2)

GIORNO 1

La nostra legge ci permette di costruire due numeri nuovi, componendo l'insieme che contiene il solo elemento zero, con l'insieme vuoto. Lo si può fare in due soli modi, che **sorprendentemente** sono entrambi validi:

(vuoto-zero), o (Ø, {0}) e (zero-vuoto), o ({0}, Ø).

Vale la pena provarlo, perché, come si può immaginare, non è frequente che, dato un numero ben formato, se ne ottenga un altro numero ben formato scambiando gli insiemi sinistro e destro. Infatti, se l'insieme sinistro deve essere "minore" del destro, scambiandoli, questa proprietà a prima vista non può essere conservata. Invece, in pratica, due numeri con gli insiemi scambiati possono essere entrambi ben formati solo se almeno uno dei loro due insiemi è vuoto.

Il composto (Ø, {0}) è un numero ben formato perché **non esiste** nell'insieme sinistro alcun elemento maggiore o eguale di qualsiasi elemento dell'insieme destro, che ha il solo elemento 0. Infatti a sinistra non esistono elementi.

D'altra parte, anche il composto ({0}, Ø) è un numero ben formato, perché lo 0, unico elemento dell'insieme di sinistra, non è maggiore o eguale di alcun numero dell'insieme di destra, in quanto questo non ha elementi, e qualsiasi confronto diretto fra numeri è impossibile, come riscritto nel distico (ipermetro) seguente:

Maggiore o minor non puoi decretare
Se elementi da confrontar non puoi trovare.

Questo ci permette di prevedere che tutti i composti della forma (vuoto-qualcosa) o (qualcosa – vuoto) siano numeri ben formati.

Perché in (qualcosa-vuoto) nel "grande" non esistono
Elementi che confrontare tu puoi col "piccolo"

E quindi mai tu potrai dire qui
Che ci sia in X_S nulla maggiore di x_D

Ed in (vuoto-qualcosa) non hai elementi nel "piccolo"
Che con elementi del grande confrontar si possono.

E quindi mai puoi dire neppur qui
Che ci sia nel vuoto un elemento maggior di x_D.

Sembra un po' un esercizio funambolico, e un giocare con le parole, ma il sistema funziona, e funzionano anche le identificazioni di Conway, che ci piovono dal cielo:

Conway chiamò (vuoto-zero) meno uno
E (zero-vuoto) lo chiamò più uno

Cioè:
Numeri del giorno 1: -1 = (Ø, {0}); +1 = ({0}, Ø)

Uno è, dopo tutto, la scelta più semplice. Avremmo potuto usare l'identificazione U e -U. Ma questa unità U arriva a mettere ordine nella linea dei numeri. L'unità di misura della distanza dallo zero di tutti gli altri numeri sulla linea dei numeri sarà U. Tutti i numeri sarebbero espressi come multipli o frazioni diadiche di U. Tanto vale allora porre U = 1. Se avessimo battezzato i numeri coi nomi di -2 e 2, ciò avrebbe implicato l'esistenza di una unità preesistente, di lunghezza metà. Ma prima di -1 e 1 non c'è nulla, sulla linea dei Numeri. Più difficile è affermare che +1 stia fra lo zero e il vuoto, e -1 tra il vuoto e lo zero, e si vede perché, come abbiamo già notato, sulla pietra nera non si trovi scritto che due insiemi , sinistro e destro, definiscano un numero reale che li separa. Ma la regola del confronto ci soccorre, sempre basandosi sul fatto che non si può confrontare un numero con l'insieme vuoto.

Knuth abbellisce il suo racconto introducendo una sua elegante notazione di gusto primitivo (che spero l'improbabile lettore sappia interpretare senza mie ulteriori spiegazioni), come segue:

● = ⟨:⟩	**0 = (vuoto ∣ vuoto)**
❙ = ⟨●:⟩	**+1 = ({0} ∣vuoto)**
— = ⟨:●⟩	**-1 = (vuoto∣{0})**

(però l'abbandonerà presto, a partire da pag. 52 del suo Libro.) Si ricordi ad ogni modo che in entrambi i membri di un numero ci sono insiemi, prima che numeri. Anche noi talvolta saremo un po' noncuranti con questa distinzione, fidando nell'acume del lettore. Del resto, se lo ha fatto Knuth, possiamo accodarci anche noi.

Ora Conway, per mettere il nostro spirito in pace, deve *verificare* almeno che, se i due numeri (Ø, {0}) ({0}, Ø) sono correttamente individuati rispettivamente con i due numeri -1 e +1, allora -1 < 0, e 0 < +1. Qui ci aiuta, al solito, la seconda legge, del confronto: un primo numero è minore di o eguale a un secondo numero se:

il piccolo del primo è minor del secondo
il primo è minor del grande del secondo.

Ad esempio, scrivendo i numeri con la notazione di Conway, o semplicemente, come Knuth 0 = (vuoto∣ vuoto) e +1 = (zero ∣vuoto), vediamo che non ci sono elementi nel (vuoto∣ (il piccolo del primo) che si possano confrontare con il secondo, cioè +1 (e quindi non sono né eguali né maggiori), e neppure 0 si può confrontare col ∣vuoto) di +1.

Si può generalizzare questo risultato tornando ai composti che avevamo designato come (vuoto|qualcosa) e (qualcosa| vuoto). Vediamo che essi sono numeri, e sono, i primi minori di (vuoto| vuoto), cioè zero; e (vuoto |vuoto) cioè zero, è minore di (qualcosa| vuoto), in quanto il vuoto non ha elementi confrontabili con altri numeri.

GIORNO 2 (in cui viene creato il numero 2, si impara a sommare e sottrarre i numeri, e si intravede una struttura)

L'insistenza sul giorno della creazione di uno o più numeri è importante, perché con questo concetto intuitivo viene introdotto un ordinamento inatteso (in quanto non presente tra i numeri reali). Non solo i numeri surreali appaiono gradualmente sulla retta, ordinati dal più piccolo al più grande, ma hanno un secondo ordinamento, per così dire "temporale". In un dato giorno, diciamo al mattino, sono presenti numeri più vecchi e più nuovi. A mezzogiorno se ne creeranno di nuovissimi. Invece di "numeri più vecchi" è invalsa la tendenza a chiamarli "più semplici". Dunque diciamo che un numero x è **più semplice** di un numero y, se x fu creato prima di y.

Nel giorno 2 (che è il terzo, ma lo zero non si conta) noi possiamo combinare i tre elementi fin qui creati più il vuoto, in tutti i modi possibili, ma non tutti i modi producono dei numeri ben formati.

Notiamo ora alcune proprietà, a rischio di ripeterci.

1) il vuoto è un (sotto)-insieme (improprio) e non è normalmente accompagnato da altri elementi in un insieme. Se l'insieme ha almeno un elemento, il vuoto non c'è più. Quindi abbiamo quindici possibilità col vuoto, una in cui entrambi gli insiemi sono vuoti; sette con il vuoto a destra, cioè una del genere (tre elementi| vuoto); tre del genere (due elementi |vuoto); tre del genere (un elemento|vuoto); e sette analoghe con il vuoto a sinistra. Quindici in tutto.

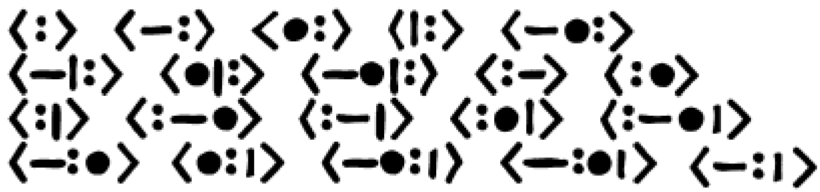
2) la prima legge richiede che i numeri non siano ripetuti, né nello stesso insieme (perché ivi sarebbero ridondanti), né nei due insiemi (perché contradirebbero la legge I, in cui si richiede che nessun elemento dell'insieme sinistro sia maggiore o EGUALE a un elemento dell'insieme destro.) L'unica

eccezione apparente è lo zero, che ha i due membri eguali, ma non conta, perché, come si è detto, il vuoto non è un elemento, ma un insieme privo di elementi e il confronto tra gli elementi del vuoto non è possibile, in quanto non ne esistono.

Abbiamo così i seguenti numeri (il significato dei colori viene spiegato in seguito):

1) (∅ | ∅)
2) ({-1} | ∅)
3) ({0} | ∅)
4) ({+1} | ∅)
5) ({-1, 0} | ∅)
6) ({-1, +1} | ∅)
7) ({0, +1} | ∅)
8) ({-1, 0, 1} | ∅)
9) (∅ | {-1})
10) (∅ | {0})
11) (∅ | {+1})
12) (∅ | {-1,0})
13) (∅ | {-1, +1})
14) (∅ | {0, +1})
15) (∅ | {-1,0,+1})
16) ({-1} | {0})
17) ({0} | {+1})
18) ({-1, 0} | {+1})
19) ({-1} | {0, +1})
20) ({-1} | {+1})

O, nella forma scelta da Knuth:



A prima vista dobbiamo fare circa 190 confronti, per ordinare questi numeri, ciascuno di venti con diciannove altri, **una sola volta: 380/2 confronti**. Il compito appare ingrato, ma si può lavorare con maggior efficienza.

Se gli elementi dell'**insieme sinistro** del primo numero sono ordinati dal più piccolo al più grande, vediamo che in pratica basta fare il confronto solo tra il più grande dei suoi elementi e il secondo **numero.** Due casi sono possibili:
Se il più grande elemento dell'insieme sinistro è maggiore del secondo numero, non occorre confrontare gli altri elementi e si può subito concludere che l'insieme sinistro non è minore del numero.
D'altra parte, se l'elemento più grande dell'insieme sinistro è minore del secondo numero, possiamo subito concludere che l'insieme sinistro del primo numero è minore del secondo numero, ed è ridondante confrontare gli altri elementi dell'insieme sinistro del primo numero col secondo numero, in quanto essi sono minori dell'elemento massimo.

Un ragionamento eguale si applica all'**insieme destro**. Ordinandolo, si vede che il suo elemento rappresentativo, che rende inutile la presenza degli altri, è il più piccolo.

Basta verificare con il massimo
elemento dell'insieme "piccolo"

E col minimo elemento del "grande"
Insieme, senza far altre domande.

Tenendo presenti queste riduzioni, si vede, per esempio che l'elemento (18) dell'elenco di pag. 24 identifica un numero eguale a quello identificato dal (17) e quindi può essere eliminato dalla nostra tavola di numeri. Si tratta di una rappresentazione *equivalente* e ai nostri fini superflua dello stesso numero. In altre parole, l'elemento rappresentativo dell'insieme sinistro è il maggior elemento, e tutti gli altri elementi non producono un diverso numero. Questo vuol anche dire che due insiemi sinistri il cui numero massimo è uguale, e due insiemi destri il cui minimo numero è eguale in un composto, identificano lo stesso numero surreale in quattro modi. Dato un numero x, si parla di classi di equivalenza di insiemi che possono fungere da insieme sinistro in quanto hanno o ammettono lo stesso massimo, e insiemi che possono fungere da insieme destro inquanto hanno o ammettono lo stesso massimo. Per Conway due numeri in cui gli elementi dei due insiemi costitutivi sono gli stessi, son identici ("≡"); mentre quelli che appartengono solo alla stessa classe di equivalenza , sono eguali ("=").

Si può spingere l'equivalenza ancora più avanti: **ogni numero surreale** che abbia almeno due elementi (ovviamente) diversi nell'insieme sinistro, è equivalente al numero in cui nell'insieme sinistro è presente solo l'elemento di più alto valore. Similmente, **ogni numero surreale** che abbia almeno due elementi nell'insieme destro, come ci si può aspettare facendo un analogo ragionamento, è equivalente al numero in cui nell'insieme destro è presente solo l'elemento di minimo valore. Come vedremo, questo vale solo per gli insiemi finiti: quelli infiniti, in cui non si può identificare un elemento minimo o un elemento massimo o entrambi, ci daranno più filo da torcere, e ci riserveranno maggiori sorprese.

Con questo si eliminano dieci elementi su venti, i dieci elementi azzurri.
Si può infine dimostrare che l'elemento in verde ({-1} | {+1}) (numero 20 a pag.24) e i due elementi in nero (numero 2 , cioè **({-1} | Ø),** e numero 11, cioè **(Ø | {+1})**) valgono tutti zero, e quindi anch'essi possono essere eliminati.

Questa equivalenza viene dimostrata ad esempio notando che possiamo prendere il numero (Ø | Ø) =0 ed estendere l'insieme sinistro aggiungendo l'elemento -1, che è minore di zero, e all'insieme destro +1, che è maggiore di zero, ottenendo **(-1|+1)** e lasciando il numero 0 invariato. (In realtà possiamo aggiungere un intero insieme, a sinistra, *purché sia minore di zero*, cioè tutti i suoi elementi siano minori di 0, e un altro insieme a destra, *purché sia maggiore di zero*, cioè tutti i suoi elementi siano maggiori di 0). In formula:

$$\mathbf{x \equiv (X_S \cup Y_S \mid X_D \cup Y_D), \quad se\ Y_S < x < Y_D}$$

dove, al solito, è

$$x = (X_S \mid X_D) \text{ in cui } X_S \ngeq X_D$$

Gli insiemi risultanti nel nostro esempio, invece, contano un solo elemento , che unito al vuoto lo fa dimenticare, dandoci il numero (-1, +1). Ma questo significa che il composto (-1, +1) rappresenta lo stesso numero del composto (Ø | Ø), ed è quindi eguale a zero, come volevasi dimostrare.
Lo stesso avviene per **({-1} | Ø) e (Ø | {+1}),** perché, aggiungendo **{+1} >0** a destra nel primo, e {-1} < 0 a sinistra nel secondo, otteniamo (-1|+1) in entrambi i casi, composto che abbiamo appena dimostrato essere eguale a zero.

Restano così sette elementi in rosso, che sono sette numeri differenti, dei quali tre erano già noti (cioè (Ø | Ø)=0; (Ø | {0}) = -1, ({0} | Ø) = +1). Ci sono quattro nuovi numeri generati in questo giorno 2, cioè **(Ø, -1), (-1|0), (0| +1), (+1|0),** che ora occorre identificare con numeri già noti. I colori sono stati cambiati per indicare il giorno di creazione (rosso il giorno zero, violetto il giorno 1, arancio il giorno 2).

I sette numeri vecchi e nuovi possono essere ordiati usando più volte la nostra Legge II, o legge del confronto, magari nell'abbreviato distico che ci dice (e qui lo ricordo) che un primo numero è minore di o eguale a un secondo numero se:

il piccolo del primo è minor del secondo
il primo è minor del grande del secondo.

Va tuttavia detto che i necessari confronti, *a questo punto*, non sono del tutto banali. Mentre potevamo facilmente paragonare -1 a 0, perché conoscevamo forma e indentificazione di entrambi i numeri, come data dal cielo, cioè da Conway, vediamo che se dobbiamo paragonare 0 = (Ø | Ø) con un numero non identificato, come (0| 1), il problema si complica proprio perché non sappiamo che numero rappresenti (0|1) e quindi non possiamo applicare *direttamente* il primo versetto del distico. Più avanti troveremo vari modi di mettere in ordine questi numeri in modo elementare, ma per ora dobbiamo procedere con quello che abbiamo.
Il primo versetto diventa perciò:

$\varnothing \ngeq (0|1)$ =?

Questo è troppo facile. Sappiamo che nell'insieme vuoto non ci sono numeri, e il paragone con (0|1), numero ben formato, qualunque esso sia, soddisfa la diseguaglianza.

Resta allora da paragonare (0|1), sempre ignoto, a (0| ∅), che è stato decretato essere 1 (pag.21).

Il primo versetto chiede che sia 0 ≱ 1, ed è soddisfatto.

Col secondo versetto siamo da capo: dobbiamo paragonare l'ignoto (0|1) a ∅.

Ma siamo di nuovo fortunati. Qualunque numero sia (0|1), non può essere maggiore di o eguale a ∅, perché in ∅ non ci sono elementi con cui lo possiamo paragonare.

In conclusione, abbiamo dimostrato che (0|1) è compreso fra 0 e 1, pur senza conoscerne, per ora, l'identificazione con un numero reale. Ragionando allo stesso modo con i numeri negativi, si ordinano anche quelli. L'identificazione sarà un passo successivo.

Per completare l'ordine dei sette numeri, esaminiamo ora (∅ |{-1}) , se sia minore di -1 = ((∅ |0).

Il primo versetto chiede che ∅ ≱ -1, e, come il solito, "non esistono numeri in ∅ che siano ≥ di -1.

Il secondo versetto richiede che (∅ |{-1}) ≱{0}. Ma possiamo ricordare che 0 = (∅| ∅), e possiamo applicare nuovamente la legge del confronto. Di nuovo, il primo versetto è soddisfatto. Ma lo è anche il secondo, perché, qualunque numero sia (∅|{-1}), esso non può essere confrontato con il vuoto, e quindi non è maggiore o eguale di alcun elemento del medesimo.

In conclusione, abbiamo dimostrato che (∅ |-1) è il più piccolo (il più grande negativo) numero della serie. Ragionando allo stesso modo con i numeri positivi, si ordinano anche quelli. Anche qui, l'identificazione sarà un passo successivo.

Otteniamo così che i numeri vecchi e nuovi si possono ordinare come segue:

(1) (**∅ |{-1}**) < (∅ | {0}) = -1 < ({-1}| {0}) < (∅ | ∅) = 0 < ({0}|{+1})< ({0}| ∅) = +1 < ({+1}| ∅)

Per ottenere rapidamente questa successione, abbiamo usato il fatto che i numeri creati nei giorni 0 e 1 sono già identificati d'autorità come 0, -1 e +1. Non occorre altro per stabilire un ordine.
A questo punto possiamo tirare il fiato un momento, e spiegare una frase, che a qualcuno può sembrare piuttosto misteriosa, e un diagramma che ne deriva, nel testo di Conway (non di Knuth) a pag 10 e segg. " Allora i numeri sembrano formare un *albero* come nella figura successiva (sua fig.0). Ogni *nodo* dell'albero ha due figli, con i *primi numeri successivi* creati a sinistra e a destra del nodo."

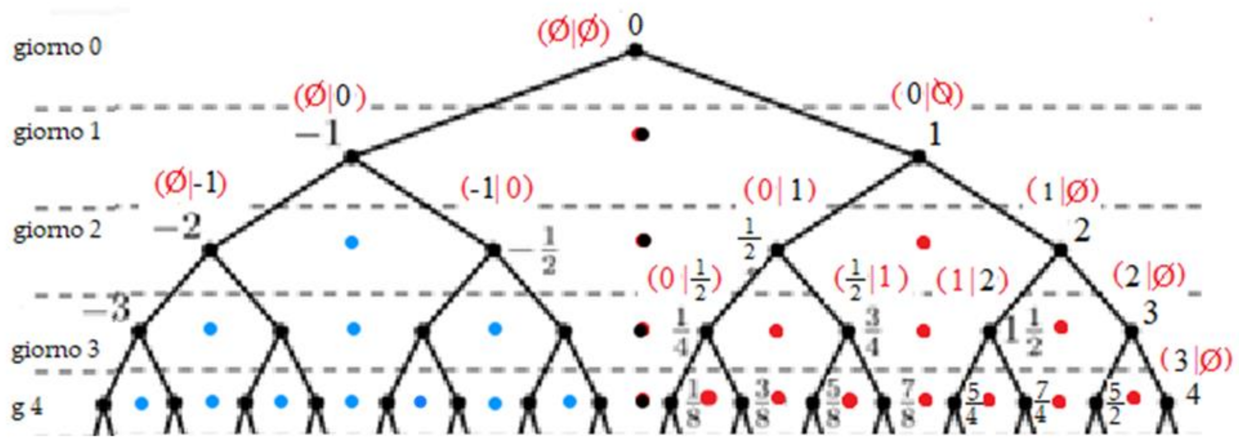


Fig.3

In questa figura (*parziale positiva*, la parte negativa può essere facilmente completata dall'eventuale lettore di buona volontà) tento di spiegare la frase e la Figura #0 di Conway. **Vediamo che a ogni generazione successiva ciascun numero della generazione precedente crea due nuovi numeri, uno in cui l'ultimo numero creato è l'insieme di destra e uno in cui è l'insieme di sinistra.** Quindi **sempre due**, sempre con un numero nuovo ("padre"), in nero, e uno vecchio (almeno "nonno" dei nuovi figli), in rosso. I punti rossi (positivi – blu se sono negativi) rappresentano i vecchi numeri, che non sono persi nelle generazioni successive. Si noti che la scala delle lunghezze si dimezza a ogni giorno verso destra, in modo che i due "figli" appaiano in posizione simmetrica rispetto al genitore. A questo proposito, si veda una breve discussione in Appendice.

In queste operazioni di confronto, è talvolta utile usare la **proprietà transitiva**, che viene normalmente dimostrata nei testi sui numeri surreali (lo Knuth la dimostra per assurdo, sfruttando elegantemente il concetto di "semplicità" del numero) Noi accettiamo questa proprietà come caratteristica dei numeri reali, che quindi deve valere anche nei numeri surreali.

Se $x \leq y$ e $y \leq z$, allora $x \leq z$

Riassumendo, nel giorno 2 siamo riusciti a costruire solo sette numeri ben formati e "minimali" (dove intendo che l'insieme di sinistra sia riassunto in un solo numero, il suo massimo, e l'insieme di destra pure, nel solo minimo, entrambi creati prima del numero che essi in tal modo formano, come vuole la legge 1).
Per arrivare a questo numero di sette abbiamo fatto tutte le combinazioni possibili dei numeri esistenti, trovandone venti valide, e abbiamo eliminato quelle ridondanti, poi le abbiamo più o meno faticosamente ordinate. Ora vediamo che la successione ordinata (1), pag 28, ci suggerisce una regola precisa per arrivare subito a identificare quanti, quali e dove sono i numeri nuovi. La regola si basa sull'ipotesi che i vecchi numeri siano tutti identificati.
Una volta identificati gli n vecchi numeri, li ordiniamo, inseriamo tra le varie *coppie* di numeri consecutivi n-1 nuovi numeri, che avremo formato ponendo **come insieme sinistro** il numero più piccolo della *coppia*, e **come insieme destro** il numero più grande. (Ogni numero pre-esistente compare in due coppie e quindi in due numeri, nell'uno come "insieme destro", nell'altro come "insieme sinistro"). Inoltre aggiungiamo 2 numeri agli estremi della successione. (Penso che per coerenza questi possano essere interpretati come inseriti tra un numero e uno pseudo-numero, il vuoto). Totale, i nuovi numeri sono $n+1$, e la nuova generazione di numeri ha $n+(n+1) = 2n + 1$ numeri tra vecchi e nuovi.

Si tratta ora di identificare i nuovi numeri.
Il compito verrà facilitato **dalla legge per l'addizione (o, secondo Knuth, legge n.3)**, che si trova sulla Pietra Nera, versetto 6:
…i numeri siano sommati l'uno all'altro in questo modo: l'insieme di sinistra della somma di due numeri sarà la somma delle parti sinistre di ogni numero con l'altro; e similmente l'insieme destro sarà formato dalle parti destre, ciascuna secondo il suo genere.

Chiaramente …non è molto chiaro.

In simboli:

$$\boxed{x + y = \big((X_S + y) \cup (Y_S + x),\ (X_D + y) \cup (Y_D + x)\big).}$$

In versi:

La somma di due numeri , x e y[ics e ipsilon]
È data da un così costrutto numero:

Il piccol della somma è dato dall'unione dei due piccoli
Ciascuno sommato all'altro numero.

Con l'union dei due grandi il grande formasi
Ciascuno sommato all'altro numero.

Che vuol dire "sommare un insieme a un numero"? Significa sommare ogni elemento dell'insieme a uno stesso numero. Dato che noi vogliamo sommare x e y, è evidente che le somme che vogliamo considerare devono sempre essere composte da porzioni di x e porzioni di y. Noi non ci aspettiamo una somma di porzioni di x con x o porzioni di x, o porzioni di y con y o porzioni di y.

Ma chi di insiemi non è pratico
Senza l'informazion non può procedere,

che afferma che qualsiasi aritmetica
operazione sul vuoto può sorprendere

ché **sempre da un'operazion col vuoto**
il vuoto è il risultato, e ciò sia noto.

$$\mathbf{n + \varnothing = n - \varnothing = n \cdot \varnothing = \varnothing}$$

Come si possono comprendere questi strani risultati? In effetti, ad esempio, sommare un numero ad un insieme significa sommarlo a tutti gli elementi dell'insieme, e creare un insieme nuovo, **l'insieme somma,** che ha queste somme come elementi. Ma le somme **non esistono, se uno degli insiemi addendi è vuoto**, non essendoci in esso alcun elemento, e il risultato è che l'insieme somma è vuoto.

Esempio di Addizione:

1+1=2 = ({0}, Ø) + ({0}, Ø) =?

A sinistra scrivo quello che sappiamo, che 1+1 deve far 2. Accettiamo questo risultato come abbiamo accettato la proprietà transitiva, a pag. 26. Se il risultato fosse diverso, il nuovo sistema non sarebbe coerente con il sistema dei numeri reali, e perderebbe ogni contatto con la realtà numerica che conosciamo. In pratica, tutti i risultati validi nel campo dei numeri reali devono essere validi nel campo dei numeri surrreali, mentre non è vero il viceversa (non tanto perché i risultati sono diversi, ma perché nel campo dei numeri reali talvolta non ci sono, anzi, speriamo che non ci siano, risultati paragonabili a determinati risultati ottenuti nel campo dei numeri surreali). Noi assumiamo che il creatore del sistema abbia pensato a questo. È una sorta di articolo di fede. Il nostro compito diviene allora piuttosto quello, assai più semplice, di trovare l'espressione surreale di 2. Altri autori, invece, preferiscono non assumere in partenza che 1+1 =2, e usare l'espressione "surreale" di tutti i numeri che trovano sulla loro strada. Si può fare, e in vari modi. Questi sarebbero gli increduli, che però infallibilmente (e faticosamente) trovano che il sistema è coerente con quello dei numeri reali.

Applichiamo a 1+1 la legge dell'addizione:

$$x + y = \big((X_S + y) \cup (Y_S + x),\ (X_D + y) \cup (Y_D + x)\big).$$

Identifichiamo i termini:

x = y = +1 = ({0}, Ø); $X_S = Y_S = \{0\}$; $X_D = Y_D = \{\emptyset\}$;

Quindi:

$2 = 1 + 1 = \big((0+1) \cup (0+1), (\emptyset + 1) \cup (\emptyset + 1)\big) = (0+1, \emptyset) = (1, \emptyset)$, il numero massimo dei sette, che era nostra ambizione interpretare.

Si ottiene questo risultato avendo ricordato, oltre alla regola delle operazioni sul vuoto *(n+ vuoto = vuoto)* , la regola che *l'unione di due insiemi include solo una volta gli elementi comuni).* Inoltre abbiamo supposto che valgano le regole dell'aritmetica per gli elementi degli insiemi già identificati con numeri.

Naturalmente il 2 ci serve per completare la nostra tabella di sette numeri, che ora si presenta come:

$$a < -1 < b < 0 < c < 1 < 2.$$

Qui ci soccorre un'altra prescrizione della Pietra Nera.

L'operazione inversa dell'addizione è la sottrazione. Per eseguirla, anzitutto la Pietra Nera dà la regola per formare l'opposto o negativo -x di un numero x:

Versetto 6.
…Che il negativo di un numero abbia come suoi insiemi i negativi degli insiemi opposti del numero stesso, e sia la sottrazione la somma del negativo.

Per prima cosa abbiam che il negativo
D'un numero s'ottien dal positivo

Il segno a tutti gli elementi cambiando
Dei due insiemi, e poi scambiando

di posto gli insiemi ottenuti, così:
(meno-grande | men-piccolo). Di qui

Ovvia è la regola della sottrazione
di a meno b: sol fai l'addizione

di a con il negativo di b.

Se torniamo ai nostri sette numeri, vediamo quindi che restano due soli numeri da interpretare, perché (Ø | -1) = - (1, Ø) = -2 (negativo del risultato dalla somma 1+1, pag.31). Ma, riconoscendo dal suo aspetto che anche *b* è il negativo di *c*,

-2, -1, -p, 0, +p, +1, +2.

Si tratta quindi di identificare il solo p. Alcuni autori dicono semplicemente che il valore "più logico" per un punto intermedio tra 0 e 1 è ½. Avranno ragione loro. Tutto dipende dalla loro logica e dal fatto che essi assumono che il numero identificato dagli insiemi sinistro e destro sia compreso fra di essi. Ma io preferisco non servirmi di questa proprietà, che pure diverse ragioni ci spingono a congetturare.

Preferisco sommare 1 a -p e vedere che ne esce.

1+(-p) = (0 | Ø) + (-1, 0) =?

Riferiamoci alla legge dell'addizione:

$$x + y = \big((X_S + y) \cup (Y_S + x),\ (X_D + y) \cup (Y_D + x)\big).$$

dove

x =1, X_S= 0, X_D = Ø; y = −p, Y_S = -1, Y_D= 0

da cui: 1 +(-p) = ((0-p, -1+1) |(Ø -p, 0+1)) = (-p, 0 | 1) = (0| 1) = +p

(avendo ricordato che le operazioni come (Ø -p) danno sempre il risultato Ø. E che 0 -p < 0 e quindi può essere scartato.)

Ma se (1-p) = p, allora 1 = 2p, e **p = ½.** Questo è il nostro aureo risultato. Ora abbiamo l'intera successione a fine del giorno 2, ordinata esattamente come previsto.

-2 < -1 < -1/2 < 0 < +1/2 < +1< +2

Esistono modi più sofisticati e , presumo, più rigorosi,per ottenere lo stesso risultato, che fanno ricorso al concetto di "data di nascita di un numero", cioè in quale giorno un dato numero è comparso per la prima volta. Questo, come si è detto, introduce due modi di ordinare i numeri surreali: l'ordine naturale crescente, oppure l'ordine secondo le date di nascita.

Sfrutteremo questo concetto più avanti.

Esaminando come si è passati dal giorno 1 =m-1 al giorno 2 =m, vediamo che:

1)Alla fine del giorno m= 1 c'erano n= (2 numeri più lo zero)=3, e nel secondo giorno, m+1 =2, noi anzitutto abbiamo creato un nuovo numero della forma (Ø | -(m-1) = 1) = (Ø | -1) = -2 a sinistra e uno della forma (m-1=1 | Ø) = (1 | Ø) =+2, a destra.

Inoltre, tra ognuna delle coppie degli n = 3 numeri pre-esistenti (quindi, nel giorno m=2 ci sono n-1 = 2 spazi) possiamo inserire un nuovo numero che ha nell'insieme sinistro il numero minore della coppia e nell'insieme destro il numero maggiore. Visto altrimenti, ogni numero pre-esistente ha due "figli", in uno come insieme destro, nel secondo come insieme sinistro, secondo il detto di Conway citato a pag.27.

3)Abbiamo quindi (n-1)+2 =n+1 =4 nuovi numeri, che si sommano ai precedenti n=3, dando 2n +1=7 numeri presenti il giorno m=2.

Ho insistito a mettere valori m e n invece del caso specifico m=2, n = 3, perché così il risultato si può, euristicamente, generalizzare.

Il giorno **m** mattino ci sono **n** numeri:

$x_1, x_2, x_3, \dots x_i, x_{i+1}, \dots. x_n.$

a mezzogiorno si creano i numeri anzitutto inserendo fra le coppie di numeri pre-esistenti altrettanti numeri. A sinistra si considera Ø come un "quasi numero", e altrettanto si fa a destra. Possiamo allora accettare che:
(Ø | -(m-1)) = --m a sinistra, e (m-1 | Ø) = +m a destra. Una volta creati, naturalmente i numeri restano con la forma loro data nel giorno della loro nascita.
Dunque, dati i "numeri del mattino"

$x_1, x_2, x_3, \dots x_i, x_{i+1}, \dots. x_n,$

a “mezzogiorno” si inseriscono agli estremi e tra i numeri esistenti i nuovi numeri

$(\varnothing \mid x_1), (\{x_1\} \mid \{x_2\}), (\{x_2\} \mid \{x_3\}), \ldots. (\{x_{m-1}\} \mid \{x_m\}), (\{x_m\} \mid \{\varnothing\})$.

A questo punto dovremo rinumerare tutti i numeri, vecchi e nuovi, in successione crescente.

Tutto questo senza aver fatto ricorso alla nostra affermazione esplicita fondamentale, non scritta esplicitamente sulla Pietra Nera perché non rigorosa e solo “quasi” sempre valida, che il numero che ha, per esempio, come elementi ({0}, {+1}) è un numero compreso tra 0 e 1:

$$\mathbf{X_S \leq x \leq X_D}$$

Si noti, che la partizione di Dedekind prende come punto di partenza un’affermazione simile a questa. Ora potremmo dedurre una dimostrazione semi-euristica.

Supponiamo dunque che, con la nuova numerazione di fine giornata, il numero x_i sia stato inserito tra due numeri consecutivi x_{i-1} e x_i (che così diviene x_{i+1}) che sono anche gli insiemi sinistro e destro che definiscono x_i ridotti ai termini essenziali, con solo elemento, il massimo, dell’insieme di sinistra, e il minimo dell’insieme di destra, nella forma

$$\ldots x_{i-1},\ x_i = (x_{i-1} \mid x_{i+1}),\ x_{i+1}$$

Diviene allora un gioco di bimbi dimostrare appunto (semi-euristicamente) che $\mathbf{X_S \leq x \leq X_D}$, che nel nostro caso equivale a dimostrare che

$$x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$$

considerando x_{i-1} e x_{i+1} come X_{iS} e X_{iD} di $x_i = (X_{iS} \mid X_{iD}) = (x_{i-1} \mid x_{i+1})$.

Ora, la dimostrazione è immediata, perché se x_i fosse inferiore a x_{i-1} in qualità di suo X_{iS}, sarebbe anche inferiore a x_{i-1} in qualità di membro della

successione di numeri, e quindi dovrebbe situarsi almeno due posti a sinistra della posizione attuale; mentre, se x_i fosse superiore a x_{i+1} come $Xi_{D,}$ esso sarebbe anche superiore a x_{i+1} come membro della successione di numeri, e quindi dovrebbe situarsi almeno due posti a destra della posizione attuale. **Il che non è.**
Ciò evidentemente vale per i numeri creati in una generazione, e quindi in tutte le generazioni. Ma vale anche per gli altri numeri surreali? Già, appunto. Quali altri numeri? Non ce ne sono altri. Tutti i numeri surreali, almeno fino a coprire il campo dei numeri reali, sono creati in questo modo, una generazione dopo l'altra. Quindi il teorema è provato per tutti i numeri surreali, almeno fino al giorno Aleph.
CDD.
(Dimostrazione non rigorosa e semi-euristica quanto si vuole, ma decisamente ad assai buon mercato).

Generalizzando il metodo usato per identificare la coppia -1/2, +1/2, si può congetturare (e perfino dimostrare) *che i nuovi numeri sono sempre a mezza via fra i due numeri della coppia* di numeri preesistenti, cioè ne sono la media aritmetica. Conway , nel suo capitolo 0, si contenta di "generalizzare " il risultato ottenuto per un ½ e - ½ . In quanto a noi, la dimostrazione la daremo a pag. 42.

In base a quanto sopra, senza troppa fatica, si può costruire la seguente tavola:

TAVOLA I

Fine Giorno m	Numero aggiunto $n_{m-1}+1$	Numero totale $n_m = 2n_{m-1} +1$	Successione Dei numeri **positivi** a partire da zero
0	1	1 $= 2^1 - 1$	0.
1	2	3 $= 2^2 - 1$	0, +1.
2	4	7 $= 2^3 - 1$	0, ½, 1, 2.
3	8	15 $= 2^4 - 1$	0, ¼, ½, ¾, 1, 3/2, 2, 3.
4	16	31 $= 2^5 - 1$	0, 1/8, ¼, 3/8, ½, 5/8, ¾, 7/8, 1, 5/4, 3/2, 7/4, 2, 5/2, 3, 4.
5	32	63 $= 2^6 - 1$	0, 1/16, 1/8, 3/16, ¼, 5/16, 3/8, 7/16, ½, 9/16, 5/8, ….

I numeri rossi sono per ogni riga i numeri aggiunti alla riga precedente. Ogni numero rosso nuovo è a mezza via tra i due numeri neri contigui. A sinistra dello zero, in ultima colonna, dovrebbero esserci i negativi dei numeri che abbiamo posto a destra dello zero, naturalmente in ordine inverso.

Balza agli occhi (terza colonna) il fatto che $n_m = 2^{m+1} -1$, numero totale presente il giorno m a sera. Se non balza agli occhi, si può osservare che abbiamo qui un'equazione non omogenea alle differenze prime, con coefficienti costanti (vedi nella tavola l'espressione per il numero totale, in prima riga, terza colonna):

$$n_m = 2n_{m-1}+1$$

Questa equazione, ove non la si voglia calcolare per ricorrenza partendo da $n_1 =3$, viene risolta con metodi standard (anche se non proprio immediati) ed ha la soluzione

$$n_m = (C + 2)\, 2^{m-1} -1,$$

in cui la costante arbitraria C viene determinata ad esempio dalla condizione $n_1 = (C+2) – 1 = 3$, da cui $C = 2$, e il risultato totale è

$$n_m = 4 \cdot 2^{m-1} -1 = 2^{m+1} -1$$

Altri autori si limitano a provare che l'ipotesi che "balza agli occhi", cioè che $n_m= 2^{m+1} -1$ può essere dimostrata per induzione calcolando

$$n_{m+1} = 2\, n_m +1 = 2\,(2^{m+1} -1)+1 = 2^{m+2}-1$$

che conferma la legge trovata.

La data di nascita (ragionamenti semi-euristici)

A questo punto, notiamo alcuni fatti:

1) Poiché, generalizzando il caso ½, assumiamo che un numero vada sempre inserito a metà dell'intervallo fra due numeri pre-esistenti, esso sarà sempre della forma $X = \frac{j}{2^k}$, in cui j e k sono due interi, e $k > 0$. Anche tutti gli interi possono essere espressi in questa forma, come $N = \frac{N\, 2^k}{2^k}$.

2) Numeri non riducibili a questa forma, come anche il semplice 1/3, non appariranno "mai" in questa collezione. **Ma proprio mai?** (È a questo punto che Conway fa il suo unico intervento nel Libro di Knuth – vedi pag.3).

3) Possiamo congetturare che gli interi positivi N siano tutti della forma (N-1, Ø), e i negativi – N della forma (Ø|-(N-1)). Nel numero -1, il segno "-" non appare, perché +0 = -0.

Ora, esaminando la tavola trovata possiamo rispondere con *un'ennesima congettura* a una domanda apparentemente cruciale, che è "Come si fa a stabilire la data di nascita di un numero?". Come il solito ci limitiamo a insiemi finiti.

Intanto, ogni numero **intero** m è stato creato nel giorno corrispondente, m.

I numeri **frazionari** hanno denominatori che sono potenze di due, cioè sono frazioni diadiche. Ma l'esponente dipende anche da quanto sono distanti dallo 0. Vediamo infatti che in ogni giorno m compaiono al denominatore termini con al massimo denominatore = 2^{m-1}, i più recenti. Tutti i termini precedenti, volendo, possono essere evidentemente ridotti allo stesso denominatore e non occorre di più. Guardando meglio, vediamo che tra 0 e 1 il massimo denominatore appartiene ai numeri nuovi ed è 2^{m-1}, tra 1 e 2 il massimo denominatore, sempre dei numeri nuovi, è 2^{m-2} e così via. Tra m-1 e m, il massimo denominatore è 2^0, ma questo vorrebbe dire che il numero intermedio tra m-1 e m è un intero, e di interi tra m-1 e m non ce ne sono. Per cui nessun numero è frapposto, alla creazione, fra m-1 e m. Il fatto è che il numero m è arrivato solo a mezzogiorno del giorno m, momento in cui i nuovi numeri hanno cercato l'interstizio in cui infilarsi.

Quindi, se vogliamo stabilire quanto fu creato 5/2 come facciamo? 5/2 è tra 4/2 (=2) e 6/2 (=**3**). La potenza di 2 al denominatore vale 1 e quindi *esponente 1 = m-(intero immediatamente superiore=3)*, da cui m=4. Si guarda la tavola e si vede che è vero. Dunque il giorno di creazione è dato dall'esponente della frazione più l'intero immediatamente superiore.

E quando fu creato ½? La regola è *m = esponente 1 + intero immediatamente superiore, 1,* e quindi m=2. Lo sapevamo già.

E 5/4? Questo è fra 4/4 e 6/4, cioè tra 1 e 1+½. A noi occorre l'inteero immediatamente superiore, che è 2. La regola è *m = esponente 2 + intero 2*, e quindi m=4.

E 13/4? Questo è tra 12/4 (=3) e 16/4 (=4). Quindi abbiamo che *m = esponente 2 più intero 4*. Sesto giorno.

Naturalmente, ciò vale solo per i numeri al finito, con insiemi finiti (riassumibili in un unico numero) a sinistra e a destra.

Abbiamo che se un numero è creato fra due numeri contigui $(x_i \mid x_{i+1})$ nella precedente generazione, esso è un numero nuovo, perché tra i due numeri, appunto, non ce ne sono altri. Ma supponiamo ora che $i+1 < j$. Ci saranno altri numeri tra i e j. Quali?

Ricordo intanto che un numero più antico è detto "**più semplice**" da alcuni autori. Ora dimostreremo che vale il cosiddetto **teorema di semplicità**, che il numero

$$x = (x_i \mid x_j) \quad (\text{ove } j > i+1 \text{ , e quindi } x_i < x_j)$$

è un numero già noto al giorno m ed è eguale al "più semplice", cioè al più antico numero creato fra x_{i+1} e x_{j-1}.

Sia x_k questo numero "più semplice", con la forma $(X_{kS} \mid X_{kD})$. Per ipotesi dovrà essere $x_{i+1} \leq x_k \leq x_{j-1}$. Per tesi dovrà essere $(x_i \mid x_j) = x_k$.

Ora, nel giorno considerato, $x_{i-1} < x_i = (x_{i-1} \mid x_{i+1}) < x_{i+1}$, e similmente $x_{j-1} < (x_{j-1} \mid x_j) < x_j$, e non ci sono numeri pre-esistenti né nell'intervallo (x_{i-1}, x_{i+1}) né nell'intervallo (x_{j-1}, x_j).
Se x_k è il più antico **fra x_{i+1} e x_{j-1}**, allora, prima della sua creazione, tutti gli elementi di X_{kS} devono essere minori di o eguali a x_i e tutti gli elementi di X_{kD} devono essere maggiori di o eguali a x_j, cioè:

$$X_{kS} < \mathbf{x_i} \quad \text{e} \quad \mathbf{x_j} < X_{kD}$$

Ma:

$$\mathbf{x_i} < (\mathbf{x_i} \mid \mathbf{x_j}) < \mathbf{x_j}$$

e, combinando quest'ultima con la precedente, si ottiene

$$X_{kS} < (\mathbf{x_i} \mid \mathbf{x_j}) < X_{kD}$$

Ma allora

$$(x_i | x_j) = (\{x_i, X_{kS}\} | \{x_j, X_{kD}\})$$

D'altra parte, $x_i \leq x_k \leq x_j$, per cui abbiamo anche (intuitivamente, e vedi pag.26):

$$x_k = (\{x_i, X_{kS}\} | \{x_j, X_{kD}\})$$

Da cui:

$$(x_i | x_j) = x_k, \text{ CDD}$$

Questo naturalmente vale se x_j e x_k non sono contigui, nel qual caso occorrerà un numero nuovo.

Corollario: Se x è il più antico numero surreale creato fra a e b, allora (a|b) = x

La congettura (3), pag. 39, ci dà due formule utili in futuro:

1) la somma di due **interi**, n+m= (n-1|Ø)+ (m-1|Ø)

$$\boxed{x + y = ((X_S + y) \cup (Y_S + x),\ (X_D + y) \cup (Y_D + x)).}$$

n+m = ((n+m-1)U (m+n-1)|(Ø+ m, Ø+n)) = ((n+m-1)|Ø)

Per induzione questo dimostra che la nostra congettura è corretta, cioè che gli interi, a partire da 1 = (0| Ø) hanno tutti la forma N= (N-1, Ø), in quanto sommando a un numero n il numero 1 si ha:

n+1 =(n-1|Ø) + (0| Ø) = (n-1+1, 0+n |Ø) = (n| Ø).

2) La differenza di due interi, n-m = n + (-m) = (n-1| Ø)+ (Ø | -(m-1))
Identifichiamo: x =n, y = -m ; X_S = n-1, X_D = Ø; Y_S = Ø, Y_D = -m+1 , da cui:
({n-1-m}U {Ø +n}| {Ø-m+1} U {-m+1+n})= ({n-1-m}|{n-m+1}) =(n-m-1|n-m+1).
Ponendo n=m, si ha che n-n = (-1|+1) che già sappiamo essere = 0 (pag.26); mentre, ponendo m =1, si ha che n-1 = (n-2|n).

Per coloro a cui piacciono le figure colorate, ho costruito il seguente diagramma, misurato in "giorni dei numeri", di durata costante:

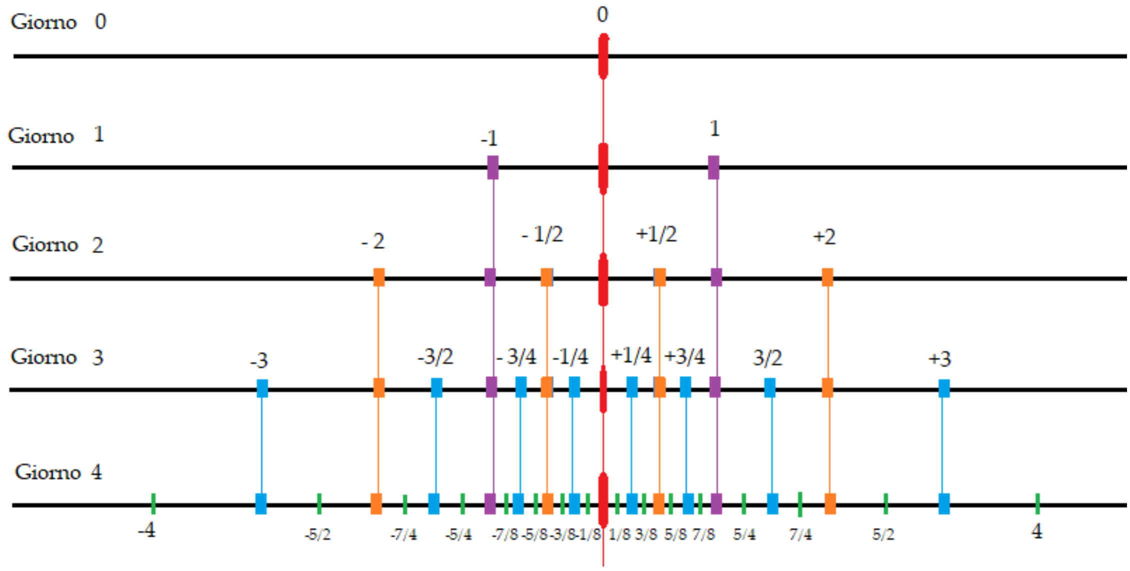


Figura 4
Generazioni dei numeri nei giorni 0, 1, 2, 3, 4.

Gli elementi sono colorati secondo il giorno di creazione e la loro età resta visibile, mentre il loro crescente numero si affolla sulla linea dei numeri reali, soprttutto nella zono centrale (giorno 0, rosso; giorno 1: viola; giorno 2 : arancio; giorno 3, azzurro; giorno 4, verde).

I numeri crescono rapidamente, e affollano la linea. Al 99° giorno, il numero massimo è 99, ma ci sono $2^{100} = 1.26\ 10^{30}$ numeri e il denominatore massimo è 2^{98}, per cui la frazione corrispondente vale $1/(3.16\ 10^{29})$. A questo punto, evidentemente, la retta dei numeri appare continua, almeno nel tratto (-1,1), anche se alla periferia, sorprendentemente non troppo lontana, può ancora mostrare larghi intervalli, mai superiori a 1, fra un numero e l'altro. Per esempio, non ci sono frazioni, cioè altri numeri, fra 98 e 99.

Dimostrazione del fatto che ogni nuovo numero è la media aritmetica dei numeri formanti la coppia nel mezzo della quale è inserito. (Come si è già detto, questo teorema non viene dimostrato da Conway nel suo capitolo 0, introduttivo. Conway estrapola dal caso 1/2 e si affida all'intuizione del lettore, come noi abbiamo fatto sinora).

Dalla successione dei nuovi numeri, segue anche che, dato $\mathbf{x = (x_i | x_{i+1})}$, allora $2\,x = x + x = (x_i | x_{i+1}) + (x_i | x_{i+1})$, secondo la legge:

$$x + y = \left((X_S + y) \cup (Y_S + x),\ (X_D + y) \cup (Y_D + x)\right).$$

Qui, $x=y$; $X_S + y = Y_S + x = x_i + x$; $X_D + y = Y_D + x = x_{i+1} + x$

Con queste identificazioni otteniamo che:

$$\text{Se } \mathbf{x = (x_i \,|\, x_{i+1})},$$
$$\mathbf{2\,x = x + x = (x_i \,|\, x_{i+1}) + (x_i \,|\, x_{i+1}) = (x_i + x \,|\, x_{i+1} + x)}$$

(Che $2x = x+x$, anche partendo dalla forma di Conway, lo si potrà dimostrare una volta che avremo incontrato la legge per la moltiplicazione, da cui risulterà che $2x = (x_i \,|\, x_{i+1}) = (1, \varnothing)\,(x_i \,|\, x_{i+1}) = (x_i + x \,|\, x_{i+1} + x) = (x_i \,|\, x_{i+1}) + (x_i \,|\, x_{i+1}) = x+x$.)

Si vuole dimostrare che $(x_i + x \,|\, x_{i+1} + x) = x_i + x_{i+1}$ da cui seguirebbe subito che **$2x = x_i + x_{i+1}$, per cui, $x = (1/2)(x_i + x_{i+1})$.**

Come lo si vede? Abbiamo che $x_i + x < x_i + x_{i+1}$ in quanto $x < x_{i+1}$; inoltre $x_{i+1} + x_i < x_{i+1} + x$, perché $x > x_i$ - come abbiamo dimostrato a pag.35. I numeri quindi si susseguono come

$$\mathbf{x_i + x < x_i + x_{i+1} < x_{i+1} + x.}$$

Ora, x appartiene alla generazione odierna e x_i e x_{i+1} sono due numeri contigui pre-esistenti. Se $x_i + x_{i+1}$ è il più antico numero creato nell'intervallo $(x_i + x,\ x_{i+1} + x)$, allora $(x_i + x \,|\, x_{i+1} + x)$ deve essere eguale a $x_i + x_{i+1}$ per il teorema di semplicità (pag. 38). Ma ci resta da dimostrare che non c'è numero pre-esistente. Supponiamo quindi che, oltre a x, ci sia un altro numero z pre-esistente a $x_i + x_{i+1}$ tale che $x_i + x < z < x_{i+1} + x$. In tal caso, z deve poter esser scritto come $z = x+y$, con y tale che $x_i + x < x+y < x_{i+1} + x$, e, sottraendo ovunque x, dovremmo avere $x_i < y < x_{i+1}$. Ma si è appunto detto che x_i e x_{i+1} sono contigui, cioè un altro numero y preesistente non esiste. Quindi non esiste neppure uno z, e **$2x = (x_i + x \,|\, x_{i+1} + x)$ deve essere eguale a $x_i + x_{i+1}$. Ne segue l'assunto.**

IV. LA MOLTIPLICAZIONE.

La Pietra Nera dà anche la legge per la moltiplicazione di due numeri surreali. La riporto per completezza e soprattutto per coloro che vogliano approfondire questo studio. Tuttavia, sottolineo che, per dare un'idea da principianti del sistema dei numeri surreali, la moltiplicazione non è strettamente necessaria.

Vediamo dunque che cosa dice la Pietra Nera.

8?. E Conway disse ai numeri: "Fate frutto e moltiplicatevi. Sia parte di un numero moltiplicata per un'altra, e sommata al prodotto del primo numero per parte dell'altro, e sia il prodotto delle parti sottratto. Questo sarà fatto in tutti i modi possibili, producendo un numero nell'insieme sinistro del prodotto quando le parti sono dello stesso genere, ma nell'insieme destro quando esse sono di genere opposto." Conway provò che ogni numero moltiplicato per 1 è immutato.
E fu sera e fu mattino, giorno cinque.

Questa legge è anche meno chiara di quella dell'addizione, soprattutto se la si vuole confrontare con la definizione in simboli matematici data da Knuth nel suo Libro.

La legge, in simboli, viene scritta:

$$\boxed{xy = (X_S y + x Y_S - X_S Y_S\,,\, X_D y + x Y_D - X_D Y_D \mid X_S y + x Y_D - X_S Y_D\,,\, X_D y + x Y_S - X_D Y_S)}$$

Ho studiato un modo relativamente semplice per ricordare la formula della moltiplicazione.
Siano due numeri da moltiplicare $x = (X_S, X_D)$ e $y = (Y_S, Y_D)$. E fin qui niente di nuovo.
Adesso introduciamo due altre variabili, cioè $C_S =(y + (x/X)Y_S - Y_S)$ e $C_D = (y + (x/X)Y_D - Y_D)$.
Mi sembrano abbastanza intuitive: C_S contiene solo le parti Y_S e C_D solo le Y_D.
Qui ho introdotto al denominatore un insieme X, pura formalità per eliminare tanto X_S quanto X_D, se uno di loro compare al numeratore.
Nella formula, le X, x precedono sempre le y,Y. Tuttavia, come vedremo, *in generale* l'ordine è irrilevante quando dagli insiemi si passa ai numeri.

A questo punto la formula diventa semplice:

$$xy = (X_S C_S, X_D C_D \mid X_S C_D, X_D C_S)$$

Per provarlo, svolgiamo il prodotto e otteniamo la regola:
$xy = (X_S\,(y + (x/X)Y_S - Y_S), X_D\,(y + (x/X)Y_D - Y_D) \mid X_S(y + (x/X)Y_D - Y_D), X_D(y + (x/X)Y_S - Y_S))$

Nei quattro termini rossi si eseguirà la semplificazione formale $X_S/X = 1$, $X_D/X = 1$, ottenendo (**Forma I**) :

$$\boxed{xy = (X_S y + xY_S - X_S Y_S, X_D y + xY_D - X_D Y_D \mid X_S y + xY_D - X_S Y_D, X_D y + xY_S - X_D Y_S)}$$

Consiglierei di provare a cercare di comprendere come le parole di Conway si conciliino con questa formula. Può aiutare il fatto che, da un punto di vista operativo, il prodotto xy contiene **tutti** i numeri di una delle seguenti quattro forme, desunte dalla Forma I:

Insieme sinistro: $x_S y + x y_S - x_S y_S$ e $x_D y + x y_D - x_D y_D$
Insieme destro: $x_S y + x y_D - x_S y_D$ e $x_D y + x y_S - x_D y_S$.

Qui le x_S e x_D sono elementi, cioè numeri appartenenti all'insieme Sinistro o Destro. Sembra che abbiamo a che fare con un numero imponente di elementi, ma, per gli insiemi finiti, ricordo che essi sono rappresentati da un solo numero.
Si vede subito che la formula, e meglio ancora gli insiemi sinistro e destro formati dai quattro numeri dati sopra, sono simmetrici in (X, x) e (Y,y) e quindi deve essere xy = yx.
Infatti, sostituendo x a y, si trova che si avranno i seguenti numeri:
Nell'insieme sinistro : $y_S x + y x_S - y_S x_S$ e $y_D x + y x_D - y_D x_D$, che altro non sono che $x_S y + x y_S - x_S y_S$ e $x_D y + x y_D - x_D y_D$.
Nell'insieme destro: $y_S x + y x_D - y_S x_D$ e $y_D x + y x_S - y_D x_S$, che altri non sono che : $x_S y + x y_D - x_S y_D$ e $x_D y + x y_S - x_D y_S$ scambiati di posto, ciò che in un insieme non ordinato importa poco.

Inoltre (usando le espressioni di Conway per 0 (= (Ø, Ø) e 1 (= ({0}, Ø)), è facile dimostrare che due proprietà essenziali della moltiplicazione sono rispettate: 0 x = x 0 =0; 1 x = x 1 = x. La prima, in particolare, utilizzando le quattro forme degli elementi degli insiemi sinistro e destro, è immediata.

Talvolta si rivela più utile una seconda forma della legge di moltiplicazione:

Seconda Forma della Legge di moltiplicazione:

$$\boldsymbol{x\,y = (xy - (x - X_S)\,(y - Y_S), xy - (X_D - x)(Y_D - y) \mid}$$
$$\boldsymbol{xy + (x - X_S)(Y_D - y), xy + (X_D - x)(y - Y_S))}$$

Si vede subito che i quattro termini corrispondono a quelli della prima legge. Ad esempio, il primo termine è
xy - xy + X_S y + x Y_S – $X_S Y_S$ = X_S y + x Y_S – $X_S Y_S$, eguale al primo termine della Forma I. Gli altri termini si identificano con eguale facilità.
Vediamo allora che il numero risultante dalla moltiplicazione è "ben formato", in quanto xy è maggiore dell'insieme sinistro, e minore dell'insieme destro. Questo avviene perché

$$\begin{array}{ll} a) & xy > xy - (x - X_S)\,(y - Y_S) \\ b) & xy > xy - (X_D - x)(Y_D - y) \\ c) & xy < xy + (x - X_S)(Y_D - y) \\ d) & xy < xy + (X_D - x)(y - Y_S) \end{array}$$

In cui, scrivendo direttamente, o semplificando xy nei due membri delle (a)-(d):

$$(x - X_S)\,(y - Y_S) > 0$$
$$(X_D - x)(Y_D - y) > 0$$
$$(x - X_S)(Y_D - y) > 0$$
$$(X_D - x)(y - Y_S) > 0$$

Quindi, in (a) come in (b) si sottrae a xy il prodotto *positivo* di due termini entrambi positivi o entrambi negativi; mentre in (c) come in (d) si aggiunge il prodotto, pure *positivo*, di due termini entrambi positivi o entrambi negativi. Ne segue che i due elementi dell'insieme di sinistra sono entrambi minori di xy, e quelli di destra sono entrambi maggiori, per cui *il prodotto xy dato dalla legge di Conway è ben formato.*

Una utile applicazione è trovare 'espressione di (1/2) x, proveniente da (0,1)· (X_S , X_D). Risultato, facile da verificarsi usando la legge per la moltiplicazione, prima forma:

$$\frac{1}{2}\,x = (\frac{1}{2}\,X_S \cup (x - \frac{1}{2}X_D) | (\frac{1}{2}\,X_D \cup \left(x - \frac{1}{2}X_S\right))$$

Un ultimo punto importante è che per ogni y reale, eccettuato lo zero, si può creare un inverso 1/y. *Conway porge anche una legge per costruire l'inverso di un numero, e quindi una legge per la divisione di due numeri surreali (pag 21 del libro di Conway), con x/y = x(1/y), escludendo il caso y=0.* Con questo, i numeri surreali possono vantarsi di essere un "campo" (totalmente ordinato, come si è detto), cioè una struttura algebrica in cui si possono eseguire le quattro operazioni, con le consuete proprietà e con l'unica eccezione della divisione per lo 0.

E per ora basta (la moltiplicazione è brevemente discussa dallo Knuth al capo 16, l'ultimo del suo libro), mentre l'inverso e la divisione non sono mai discussi. Noi daremo le formule dell'inverso e della divisione in appendice, *commentando sulla loro utilità* (non moltissima, perché, come vedremo, esse possono essere aggirate).

Va detto che i testi sui numeri surreali più precisi del presente saggio (cioè, in pratica, tutti, incluso il Libro di Knuth) cercano di provare tutte le assunzioni tacitamente fatte e le proprietà implicitamente usate. Suggerisco al lettore volonteroso di rivolgersi a quesi testi se, invece di vaghe idee, preferisce avere delle certezze.

V. E GLI ALTRI NUMERI?

V.1 L'Universo dei numeri reali.

Dunque si è detto che fin qui noi possiamo ricavare solo gli **interi e le funzioni diadiche**. Ma una grande quantità di numeri reali non può essere costruita in questo modo, e quindi, il risultato parziale ottenuto nella costruzione dei numeri non giustifica lo sforzo fatto, per piccolo che sia, anche se non si può dire che l'esercizio fatto sin qui manchi di un suo fascino estetico. Naturalmente si potrebbe essere d'accordo con Kronecker, che i numeri naturali sono sufficienti a costruire tutta la matematica, e quindi siamo già in porto. Tuttavia…

A questo punto (Capo 14 del Libro) i due vacanzieri riesaminano la Pietra Nera, in particolare gli ultimi versetti:

9?. Ed ecco! Quando i numeri furono creati per un numero infinito di giorni, l'universo intero apparve. E fu sera e fu mattino, giorno Aleph

א

10?. E Conway guardò le leggi che aveva dato ai numeri, e vide che esse erano molto, molto buone. E comandò che esse valessero per segni, e serie, e quozienti, e radici.
11?. Allora sorse un numero infinito minore di infinito. E le infinità di giorni generarono ordini molteplici di infiniti.

I due ne concludono che Conway, dopo infiniti giorni (dei numeri creati), arrivò al giorno Aleph, l'infinito. Ma non si fermò qui, perché i giorni del creatore sono di durata diversa dei giorni dei numeri. Mentre i "giorni del creatore" sono di durata costante, i "giorni dei numeri", visti dal creatore, sono di durata decrescente (per esempio ciascuno è un mezzo del precedente) e noi sappiamo che in tal caso la **durata totale di infiniti "giorni dei numeri"** 1 + ½ +1/4 +1/8…= 2. Per il creatore erano quindi passati solo due giorni, ed aveva ancora tutto il tempo che voleva per continuare a creare. Tuttavia, raggiunto l'infinito dei numeri, come dice la Pietra Nera, "l'universo intero", cioè la totalità dei numeri **reali**, apparve. Tutto questo perché numeri diversi dagli interi e dalle frazioni diadiche si possono costruire con successioni di infiniti elementi, che sono appunto interi o frazioni diadiche.

Per semplificare la dimostrazione, la coppietta per prima cosa decide di passare alla **notazione binaria.**
In questa notazione, ad esempio, **1/3 è** un numero periodico, come nella notazione decimale.
Si noti che la divisione binaria procede come la divisione decimale. In notazione binaria, 3 vale 11, e quindi bisogna dividere 1 per 11, ricordando che la divisione binaria dà volta per volta risultato 0 oppure 1, così :

1.	11
0	0.0101010101…
10 -	
0	
100 -	
11	
1 da capo	

A parole: devo dividere 1 per 11. L'undici nell'1 ci sta 0 volte, scrivo 0 a quoziente. Moltiplico 0 per 11, dà zero e lo scrivo sotto all'1 del dividendo. Sottraggo 0 da 1 , trovo 1. Metto una virgola a quoziente, aggiungo 0 a questo risultato, ottengo 10. Divido 10 per 11, il risultato è ancora 0, che scrivo a quoziente dopo la virgola. Moltiplico 0 per 11, pongo il risultato sotto il 10, sottraggo, aggiungo uno zero, trovo 100. Divido 100 per 11. Questa volta il risultato è 1 (non può essere altro che 0 oppure 1). Appiccico il risultato a quoziente, moltiplico per 11, sottraggo 11 a 100, trovo 1. A questo punto sono da capo, perché dovrò dividere 1 per 11 e ripetere il ciclo. Il numero è quindi periodico, ogni ciclo aggiunge la coppia 01.

Ci sono ora infinite possibilità. In base alla divisione precedente, Knuth, ad esempio, sceglie per 1/3 il numero (ben formato):

(.01, .0101, .010101 … | .1, .011, .01011 ….)

Qui sono state costruite due successioni, una, che si ottiene troncando ad ogni **1** la successione dei decimali sopra ottenuta, che approssima "dal basso" il valore 1/3, e una, che lo approssima “dall’alto”, e si ottiene troncando la successione sopra ottenuta ad ogni **zero, e sostituendolo con 1.**

Come è noto, un numero binario *decimale* equivale a una somma appunto di frazioni diadiche con numeratore 1 e denominatore eguale 2^k, dove i vari esponenti k sono le posizioni a destra dello zero in cui vediamo la cifra 1.

Quindi

1/3 = (¼ , ¼+ 1/16, ¼ + 1/16+1/64… | ½, ¼+1/8, ¼+1/16+1/32)
Questo sviluppo finalmente ci dà le approssimazioni decimali degli elementi dei due insiemi, che compaiono nel numero surreale 1/3:

1/3 = (0.25, 0.3125, 328125… | 0.5, 0.375, 0.34375…)

Le due successioni approssimano, la sinistra dal basso e la destra dall’alto, il noto risultato 1/3 = 0.3333…

In realtà queste o simili successioni possono anche essere ottenute per mezzo di una frazione. Ricetta per il reciproco di 3: L’inverso di 3 sarà 1/3 = 1-2/3 = 1- 1/(3/2) = 1-1/(1+1/2) = 1 – (1-½ +1/4-1/8+1/16-1/32…) = ½-1/4+1/8-1/16+1/32 - 1/64…

> In generale, tutti gli inversi di un numero N>1 possono essere scritti come 1/N = x/(1+x), da cui: 1+x = Nx e (N-1) x = 1 e quindi **x =1/(N-1).** Nel nostro caso, N = 3, e quindi x = ½.
> D’altra parte, lo sviluppo di 1/N in termini di x può essere ricavato da 1/N = (1+x-1)/(1+x), cioè:
>
> $$\frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{1+x}$$
>
> $$1/N = 1-1/(1+x) = 1-(1-x+x^2-x^3+x^{4\cdots}) = x-x^2+x^3-x^4\ldots$$
>
> La serie ci permette di costruire il numero surreale:
>
> $$(\{x-x^2,\ x-x^2+x^3-x^4,\ldots\} \mid \{x,\ x-x^2+x^3,\ x-x^2+x^3-x^4+x^5\ldots\})$$
>
> ottenuta arrestandoci ai termini preceduti dal segno “-“ inclusi, per l’insieme di sinistra, e ai termini preceduti dal segno “+” inclusi, per l’insieme di destra (un minuto di riflessione spiega il perché).

Sfortunatamente, lo sviluppo è in frazioni diadiche solo se il numero N da invertire è della forma $2^k \pm 1$.
Per altri numeri diversi da $2^k \pm 1$ sarà possibile trovare con qualche artifizio simili sviluppi in termini di frazioni diadiche.

In ogni caso, penso che la riduzione alla forma binaria sia sempre il modo più immediato di trovare questi sviluppi.

Qualunque sia la notazione e la base scelta, per i numeri diversi dagli interi e dalle frazioni diadiche non si potrà riassumere l'insieme di sinistra nel suo massimo elemento, perché gli elementi crescono indefinitamente, sia pure di poco, né quello di destra nel minimo elemento, perché gli elementi di destra decrescono continuamente, pur restando al di sopra di tutti gli elementi della sinistra.

Tuttavia, la tecnica adottata, una volta giunti al giorno Aleph, ci permette di associare a ogni numero surreale x (come 3) un inverso o reciproco 1/x tale che il loro prodotto sia 1. La regola generale per costruire l'inverso, che noi daremo in Appendice, la dà Conway nel suo libro a pag 21, come si è detto. L'unica eccezione resta lo zero, del quale – ripetiamo ancora una volta - non si può creare l'inverso.

Nel giorno Aleph, i numeri irrazionali non si comportano diversamente dai numeri come 1/3, a parte un maggior disordine dei calcoli. Per esempio, vediamo il temuto Pigreco. Il Pigreco ha una sua rappresentazione in base binaria, che si può trovare su Google, cercando "binary Pi":

$$\pi = 11.00100\ 10000\ 11111\ 10110\ \ldots.$$

Anche qui si possono costruire due insiemi infiniti, uno crescente (fermandosi a ogni 1) e l'altro decrescente (fermandosi a ogni 0 e mettendo un 1 al suo posto), del tipo di

$$\pi = (11.001,\ 11.001001,\ 11.00100100001\ldots \mid\ 11.1,\ 11.01,\ 11.0011,\ 11.00101\ldots)$$

Come potrebbe essere noto, questi numeri binari sono esprimibili come somme di interi e frazioni binarie.
Va solo ricordato che 0.1 = ½ (decimale), 0.01= ¼, 0.001 = 1/8, 0.0001 = 1/16 eccetera, come si può subito eseguendo le divisioni binarie 1/10, 1/100, 1/000 etc. In altre parole, ripeto, la posizione della cifra 1 dopo la virgola ci dice la potenza di 2 del denominatore. Ad esempio, 0.1 (binario) ha 1 al primo posto dopo la virgola, e quindi è ½, mentre 0.0001 (binario), con 1 al quarto posto dopo la virgola, vale $½^4$ = 1/16.   Ne segue che possiamo anche scrivere, in termini delle frazioni binarie che corrispondono alle cifre 1 dello sviluppo decimale:

π = (3+1/8, 3+1/8+1/64, 3 +1/2048, … | 3+1/2, 3+1/4, 3+1/8+1/16, 3+1/8+1/32…)
= (3.125, 3.1406, 3.14118,… | 3.5, 3.250, 3.1875, 3.15625…)

O, in breve, (Π_S | Π_D), in cui i due insiemi Π_S , Π_D sono quelli dati nella precedente formula.

Vediamo quindi che il giorno **Aleph,** è possibile costruire qualsiasi numero razionale o irrazionale (addirittura trascendente, come π) sulla base di insiemi che sono successioni infinite. In pratica, introducendo insiemi infiniti a sinistra e o a destra, i numeri surreali permettono di costruire l'universo dei numeri reali.

Con questo, senza eccessivo sforzo, ma sulla base di due sole leggi, partendo dall'universo vuoto di numeri, siamo almeno arrivati direttamente a pareggiare la situazione dei numeri reali. Francamente, l'impresa conmpiuta da Conway fino a questo punto, mi pare grandiosa. E il meglio deve ancora venire!

Ci sia però permesso fare alcune considerazioni: non appena si fa il passo dagli insiemi finiti di numeri interi e frazioni diadiche, ad insiemi infiniti dei medesimi, come dimostra lo sviluppo binario di tutti i numeri, razionali, irrazionali (algebrici e trascendenti), si passa senza sbalzi direttamente all'universo dei numeri reali. Ma questi formano un insieme continuo, ovvero hanno, come suol dirsi, la potenza del "continuo", cioè sono probabilmente (se la cosiddetta “ipotesi del continuo” è vera) quelli che appartengono alla classe Aleph(1). In altre parole, noi passiamo direttamente dagli insiemi finiti agli insiemi continui. Non abbiamo un giorno separato in cui si formano i numeri appartenenti alla classe degli insiemi infiniti, ma “numerabili”, Aleph(0).

Questo è forse il motivo per cui Knuth parla di giorno “Aleph”, senza alcun indice, sia esso 0 o 1 o altro.

Una seconda osservazione è che nei giorni precedenti al giorno ω le definizioni, operazioni e dimostrazioni apprese, ci permettono di costruire delle “pseudo-partizioni” di Dedekind. Una volta raggiunto il giorno ω, però, noi possiamo costruire delle “vere partizioni” di Dedekind, perché tutti i numeri, razionali sono stati generati negli infiniti giorni precedenti e sono finalmente disponibili. La critica di Conway, pag.14, era:
Forse la critica più importante è che si suppone che [tutti] i numeri razionali siano stati costruiti [in precedenza] in qualche altro modo, e poi siano “ricostruiti” come certi numeri reali.
Ma ora tutti i numeri razionali sono stati costruiti e possiamo partire di qui per costruire tutti i numeri reali.
Quindi non ci deve stupire se, invece di sforzarci ad applicare la regola dell’addizione data da Conway, possiamo scrivere:

$$\pi + \pi = (\pi + \Pi_S \mid \pi + \Pi_D)$$

(dove Π_S , Π_D sono reperibili a pag.52).

Addirittura, una volta incontrato il prodigioso numero ω (la prossima pagina), scriveremo che:

$$\omega + \pi = (\omega + \Pi_S \mid \omega + \Pi_D)$$

V.2 Altri numeri ancora.

i) INFINITI
(principalmente dal Libro di Knuth, capitoli 14 e 15)

Il numero ω e compagni.

Siamo così giunti al punto in cui il sistema dei numeri surreali veramente incomincia a dire qualcosa di nuovo, in quanto i numeri infiniti e transfiniti seguono le stesse regole degli altri numeri (entro molto poco restrittivi limiti). E questo avviene sempre il giorno **ω.**
Si consideri quindi il numero definito da:

$$(\{1, 2, 3, 4, 5\dots\} \mid \varnothing) = \boldsymbol{\omega}$$

Questo numero, creato pure lui nel giorno Aleph (o forse meglio **ω** ,) insieme a tutti i numeri reali – come dimostrato nel precedente capitolo, è maggiore di tutti gli altri numeri creati fino al giorno **ω**.
La dimostrazione è semplice: supponiamo che esista un numero x, creato prima del giorno **ω,** maggiore del numero in questione. Il nostro criterio di confronto (Legge 2, pag.15, per l'ennesima volta) dice che $\boldsymbol{\omega \ngeq x}$ se

"il piccolo del primo è minor del secondo" etc.

Cioè, come si è spiegato a suo tempo, non ci sono numeri nell'insieme sinistro del primo numero (**ω)** che siano maggiori o eguali del secondo, cioè x. Ma qui siamo già fermi, senza bisogno di passare alla seconda parte della legge 2, perché l'insieme {1,2,3,4..} non ha limite superiore e contiene *tutti* i numeri, incluso, evidentemente, x.

Abbiamo chiamato il nuovo numero **ω**, che è noto dai tempi di Cantor come il "primo ordinale transfinito"(si potrebbe osservare che Knuth introduce una piccola confusione tra numeri cardinali transfiniti, in genere indicati con $\aleph_i$ e i numeri ordinali transfiniti, il primo dei quali è **ω,** che, a rigore, e a somiglianza di tutti gli interi, dovrebbe essere creato nel giorno ω, giorno in cui lo crea Conway.) Al nostro livello non è grave, e penso che possiamo seguire Knuth.

Va notato che ω ha molte altre forme equivalenti: ad esempio ω = (1,2,4,8,16… | Ø); oppure ω = (tutte le frazioni diadiche | Ø), o tutto quanto insieme. In altre parole ω, pur essendo creato come intero, in quanto corrisponde a un giorno definito, è **maggiore** di tutti i numeri , interi e frazioni diadiche, creati fino al giorno ω.

Il negativo di **ω**, che chiameremo - ω, seguendo la legge della Pietra Nera al versetto 7., sarà eguale a (Ø |{ -1, -2, -3, - 4, -5…}). Si intuisce che il processo non termina mai: i numeri positivi avranno nell'insieme di sinistra tutti i numeri creati fino ad allora, e a destra il vuoto.

I numeri da ω a 2ω. Giorno 2ω.

A questo punto vediamo che possiamo esprimere diversi numeri infiniti, mentre nel campo reale siamo giunti a fine-corsa e siamo costretti a dire che, per esempio, ∞ + ∞ = ∞.
E non solo questo, ma possiamo anche eseguire operazioni sugli infiniti e sugli infinitesimi (che vedremo), obbedendo alle leggi di Conway.

Ad esempio, qual è l'espressione "surreale" di ω + 1?
Ricordiamo che:

$$x + y = \big((X_S + y) \cup (Y_S + x),\ (X_D + y) \cup (Y_D + x)\big).$$

Ora, ω = ({ 1, 2, 3, 4, 5…} |Ø), 1 = (0, Ø), da cui:

ω + 1 = ({{ 1, 2, 3, 4, 5…}+1}∪(0 + ω) |{ Ø+ ω, Ø +1}) =

= ({ω, 2, 3, 4, 5}| Ø)

Ma, nell'insieme sinistro, 2, 3, 4, 5 sono già compresi in ω, per cui

$$\omega + 1 = (\{\omega\} | \varnothing)$$

A questa espressione saremmo potuti arrivare euristicamente, notando che, per gli interi al finito, vale la formula n+1 = (n |Ø) (pag. 22).

> È interessante notare che, trattando gli ordinali transfiniti (https://it.wikipedia.org/wiki/Numero_ordinale_(teoria_degli_insiemi)#Aritmetica_degli_ordinali), $\omega + 1 \neq 1 + \omega$, cioè l'addizione non è commutativa, mentre nei numeri surreali, $\omega + 1 = 1 + \omega$, come chi lo volesse potrebbe subito dimostrare.

E qui incominciamo a vedere la bellezza del numeri surreali: ∞+1, che nei numeri reali ha poco senso e non ha una sua espressione, a parte il generico ∞, nei numeri surreali ha invece un senso e un'espressione sua particolare (diversa da quella di ω) come ogni altro numero. Non solo, ma su di essa si potranno fare operazioni varie, come definite da Conway.

Altro esempio:

$\omega + ½$, da $\omega = (\{1, 2, 3, 4, 5\ldots\} | \varnothing)$, $1/2 = (0, 1)$, da cui:

$$\omega + 1/2 = (\{\{1, 2, 3, 4, 5\ldots\} + 1/2\} \cup \{0 + \omega\} | \{\varnothing + 1/2\} \cup \{\omega + 1\})$$

$$\omega + 1/2 = (\{\omega\} | \{\omega + 1\})$$

A sinistra, l'aggiunta di ½ a ogni elemento di { 1, 2, 3, 4, 5…} come si è notato a pag. 55, non ne cambia il punto di arrivo, inferiore a **ω**, e quindi ne esce una successione di numeri compresi in ω, che risulta anche da 0 + ω. A destra, invece, già sappiamo che Ø+1/2 = Ø.

Il numero ω -1 e compagni. Il caso di ω – ω.

$\omega - 1$ da $\omega = (\{1, 2, 3, 4, 5\ldots\} | \varnothing)$, $-1 = (\varnothing, 0)$, da cui:

$$\omega - 1 = (\{\{1, 2, 3, 4, 5\ldots\} - 1\} \cup (\varnothing + \omega)\} | \{\varnothing - 1\} \cup \{0 + \omega\}) =$$

$$= (\{1, 2, 3, 4, 5\ldots\} | \{\omega\})$$

L'ultimo risultato proviene dal fatto che, sottraendo 1 a tutti gli interi si ri-ottengono tutti gli interi : 1-1=0, 2-1=1, 3-1=2, 4-1 =3 etc. e ri-abbiamo 1,2,3…

A questo punto la nostra coppietta vacanziera comprende il significato della misteriosa frase della Pietra Nera (versetto 11):

11?. Allora sorse un numero infinito minore di infinito. …

Il punto è che ω - 1 nasce nel giorno Aleph+1 ovvero ω + 1, ed è già un numero infinito, non l'ultimo dei numeri finiti.

Alcuni, per fare più in fretta, invece di scrivere {1,2,3,4…} scrivono $\mathbb{Z}$, per l'insieme di tutti i numeri interi positivi e negativi, inferiore a **ω.** Quindi, ad esempio, ({1, 2, 3, 4, 5…}| {ω }) diventa ($\mathbb{Z}$ | ω). Ma anche qui, invece di $\mathbb{Z}$ potremmo anche usare l'insieme [2,4,6…] dei numeri pari positivi, o l'insieme P, di tutti i numeri primi positivi. Possiamo togliere da o aggiungere all'insieme **sinistro** qualsiasi elemento o insieme di elementi, purché non cambiamo il massimo, che in questo caso non è esprimibile (vedi p.18, per gli insiemi finiti), ma è certo compreso in e inferiore a **ω.**

I successivi , ω + 2= (ω +1 | Ø) si ottengono da (ω +1)+1, (ω +2)+1= ((ω +3), etc. producendo risultati in cui l'insieme sinistro è dato da (ω +(n-1)) e il destro è il vuoto.

ω + n = (ω + n-1 | Ø)

In quanto a (ω -2) e compagni, avremo
(ω -2) = (ω -1)-1 = ($\mathbb{Z}$ | ω, ω -1) e. in generale, tuffandoci nei metodi euristici, ma con possibilità di dimostrare:

$$\boldsymbol{\omega - n = (0, 1, 2, 3 \ldots | \omega, \omega - 1, \omega - 2, \omega - 3 \ldots . \omega - (n - 1))}$$

Vediamo ora ω + ω.

$$x + y = \left((X_S + y) \cup (Y_S + x),\ (X_D + y) \cup (Y_D + x)\right).$$

con x=y = ω; $X_S = Y_S = \mathbb{Z}$; $X_D = Y_D = Ø$. Da cui:
ω + ω =(({ 1, 2, 3, 4, 5…} + ω) ∪ ({ 1, 2, 3, 4, 5…} + ω) | (Ø+ ω) ∪ (Ø+ ω)) =
(({ 1, 2, 3, 4, 5…} + ω) | Ø), che, scritto in altro modo è

ω + ω =({ω + 1, ω + 2, ω + 3…}| Ø).

Qui ogni numero dell'insieme dei numeri naturali va sommato al numero ω, mentre a destra il vuoto risulta dall'aver sommato ogni numero di $\{1, 2, 3, 4, 5\ldots\}$ agli inesistenti elementi del vuoto, dando ancora il vuoto.

Come si è più volte ripetuto, per noi deve aver senso mantenere le regole dell'aritmetica dei numeri reali, per cui
$\omega + \omega = 2\,\omega = ((\{1, 2, 3, 4, 5\ldots\} + \omega) \mid \varnothing) = (\{\omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots\} \mid \varnothing)$
$3\,\omega = 2\,\omega + \omega = ((2\omega + 1, 2\omega +2, 2\omega+ 3, 2\omega+ 4, \ldots\}) \mid \varnothing)$
come si può facilmente provare.

Il numero 2ω sarebbe creato nel giorno 2Aleph, o $2\,\omega$ (ricordiamo che il numero del giorno corrisponde al numero (intero) massimo creato, e non c'è motivo di aspettarci una legge diversa in un sistema che tratta numeri finiti e transfiniti allo stesso modo, come "composti" di due opportuni insiemi, con la differenza che qui un numero massimo nell'insieme di sinistra non esiste.)

In quanto a $\omega - \omega$, se lo scrivessimo come $\infty - \infty$, nel campo dei numeri reali sarebbe una forma indeterminata, l'àncora solita per salvare in corner il sistema dei numeri reali. Qui, invece, se applichiamo la legge della sottrazione, cioè sommiamo $(Z \mid \varnothing) + (\varnothing \mid -Z)$ otteniamo che $\omega - \omega =$ $(Z- \omega \mid -Z + \omega)$, che possiamo scrivere $(-x \mid x)$. Ora, poco importa se x sia positivo o negativo. Il fatto è che i due numeri sono opposti, e quindi uno sarà per forza negativo e l'altro per forza positivo. Ma il numero più antico creato a separare numeri positivi e negativi è 0. Quindi, per il teorema di semplicità, pag.38, $\omega - \omega = 0$, risultato che avremmo potuto postulare anche senza passare attraverso le operazioni sui numeri surreali. Ammetto di non aver ancora trovato conferma di questo risultato da nessuna parte, se non semplicemente prendendo come articolo di fede che le stesse operazioni con le stesse regole e le stesse eccezioni valgono per i numeri reali e per i numeri surreali. Gradirei sapere se esistono altre dimostrazioni, magari con risultati diversi.

Fino al giorno ω^2 e oltre.

E così si procede fino al giorno (Aleph)^2, in cui viene creato $\omega \cdot \omega = \omega^2$.
Si può provare a dimostrare (cosa che i vacanzieri non fanno, limitandosi a enunciare il risultato) che

$$\omega^{2} = (\{\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega \dots\} | \emptyset)$$

Proviamo a dimostrarlo: la Pietra Nera non dà regole per l'elevazione a potenza, ma le possiamo ricavare estendendo le regole della moltiplicazione.

$$\boxed{xy = (X_S y + xY_S - X_S Y_S, X_D y + xY_D - X_D Y_D \,|\, X_S y + xY_D - X_S Y_D, X_D y + xY_S - X_D Y_S)}$$

$\omega^2 = \omega\,\omega = (\mathbb{Z}\,|\emptyset)\,(\mathbb{Z}\,|\emptyset)$
Identifichiamo: $x = y = \omega$; $X_S = Y_S = Z$; $X_D = Y_D = \emptyset$
$\omega^2 = \omega\,\omega = (Z\omega + Z\omega - ZZ, \emptyset\omega + \omega\emptyset - \emptyset\emptyset \,|\, Z\omega + \omega\emptyset - Z\omega, \omega\emptyset + Z\omega - Z\omega) =$
$= (Z\omega \mid \emptyset) = (\omega, 2\omega, 3\omega \dots \mid \emptyset)$. A destra i due elementi sono nulli; a sinistra resta solo $2Z\omega = 2\omega + 4\omega + 6\omega\dots$. Se aggiungiamo $\omega + 3\omega + 5\omega$, ciò che possiamo sempre fare, otteniamo che $2Z\omega$ può essere equiparato a $Z\omega$, come insieme di sinistra di ω^2.
Quindi:

$$\omega^2 = (Z\omega \mid \emptyset) = (\omega, 2\omega, 3\omega \dots \mid \emptyset)$$

Inoltre: $\omega^3 = \omega\,\omega^2 = (\mathbb{Z}\,|\emptyset)\,(Z\omega \mid \emptyset)\dots$

Altra ipotesi che i due vacanzieri, presumo in base a un ragionamento euristico, fanno (ma non provano – e non lo farò neanch'io) è che

$$\omega^{\omega} = (\{\omega, \omega^2, \omega^3 \dots\} \mid \emptyset).$$

Lo stesso ragionamento euristico può essere utilizzato anche per estendere ulteriormente i nostri numeri surreali, come dice la Pietra Nera:

11?. Allora … le infinità di giorni generarono ordini molteplici di infiniti.

$$\omega^{\omega^{\omega}} \quad \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}$$

Propongo al lettore volonteroso di cercare di inventare lui il suo ragionamento euristico appropriato. Se non ci riesce, veda il mio commento alla Fig. 6, pag. 67.

II. DIVISIONI E RADICI.

Altri inediti risultati si hanno dalle più semplici divisioni.
Poiché Knuth non dà regole per la divisione (Conway le dà), io mi accodo a Knuth:

$\omega/2 = (1/2)\,\omega = (0,1)(Z \mid \varnothing)$

Volendo mantenere la spiegazione il più semplice possibile, si può semplicemente verificare che il risultato a cui arriverebbe il diligente lettore applicando la regola per (1/2)x – pag.47, è $u = (\{1, 2, 3, 4\ldots \mid \omega - \{1, 2, 3, 4\ldots\}\}$ cioè $(\mathbb{Z} \mid \omega\text{-}Z)$.

Noi invece verificheremo che raddoppiando questo risultato, si ottiene ω, da cui $u = \omega/2$.
Sia $(Z \mid \omega\text{-}Z) = u$. Calcoliamo u+u =2u usando la legge dell'addizione:

$$u+u= (Z+u \mid u+ \omega\text{-}Z) =(u, u+1, u+2\ldots \mid u+ \omega,\ u+ \omega\text{-}1, u+ \omega\text{-}2\ldots).$$

Ma, per qualsiasi numero positivo n, $u+n < (\omega\text{-}n) +n = \omega$, e così pure $u + \boldsymbol{\omega} \text{-}n > u + \boldsymbol{\omega} > \boldsymbol{\omega}$. Quindi ω è situato tra l'insieme sinistro e l'insieme destro di u+u. D'altra parte, u per definizione è maggiore di qualsiasi numero finito, e lo stesso vale per l'insieme sinistro di u+u. Ma ω è il "più semplice" (cioè il più antico) numero maggiore di tutti i numeri finiti, da cui si deduce che

$$u + u = 2u = \omega,\ \text{cioè}\ u = \omega/2,\ \text{quindi:}$$

$$\frac{1}{2}\,\omega = (\{\,1,2,3,4\,\dots\}|\{\omega-1,\omega-2,\omega-3,\dots\}) = (\mathrm{Z}|\ \omega-\mathrm{Z}).$$

Si vede qui la ragione per cui abbiamo sottolineato che ω -1 e compagni nascono nei giorni successivi a ω.

Finalmente, Conway non dà regole per l'estrazione di radice, e qui, di nuovo, lui propone, e io do lo stesso consiglio, o di creare nuovi numeri a piacere, o di verificare alcuni risultati. Così il lettore entusiasta (come può non esserlo, se è arrivato fin qui?) può provare a inferire, o dimostrare, o verificare le formule :

$$\sqrt{\omega} = \left(\{1,2,3,4\,\dots\}\middle|\left\{\frac{\omega}{1},\frac{\omega}{2},\frac{\omega}{3},\frac{\omega}{4},\dots\right\}\right)$$

$$\frac{1}{2\omega} = (0|\frac{1}{\omega})$$

$$\frac{2}{\omega} = (\frac{1}{\omega}\left|1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{\omega^2} = (0|\frac{1}{\omega},\frac{1}{2\omega},\frac{1}{3\omega}\dots)$$

suggerite da Conway. Le verifiche sono ovviamente più semplici: di riffa o di raffa, tanto ½ ω + ½ ω quanto $\sqrt{\omega}\,\sqrt{\omega}$ devono dare ω ; $\frac{2}{\omega}\cdot\frac{\omega}{2}$ deve dare 1.

In quanto alla formula per $1/\,\omega$, la vedremo subito.

iii) INFINITESIMI

Possiamo infatti introdurre un'altra variazione sul tema. Si consideri ora il numero:

({0}| 1, ½, 1/3, ¼, 1/5…)

Questo è un numero infinitamente vicino allo zero, minore di tutti i numeri reali positivi, ma maggiore di zero. Lo chiameremo ε, infinitesimo.

Così pure, il numero (scelta del tutto arbitraria):

({53}| 53+1, 53+½, 53+1/3, 53+¼, 53+1/5…)

È infinitamente vicino a 53, ma maggiore di 53, anche se inferiore a ogni numero reale che approssima dall'alto 53.

Torniamo ora al numero ε, che abbiamo battezzato "*infinitesimo*" perché è superiore a zero e minore di qualsiasi frazione propria. Come possiamo dire questo? Semplicemente, come sappiamo, ε deve essere maggiore dell'insieme sinistro, che è zero, e minore dell'insieme destro, che è formato dalle infinite frazioni che si approssimano a zero.

Si tratta ora di calcolare il prodotto $\boldsymbol{\varepsilon\omega}$. Applicando la legge di moltiplicazione, seconda forma, sfruttando la benvenuta presenza di un insieme vuoto, e saltando qualche passaggio, si ha:

$$\varepsilon\omega = (\,\varepsilon\omega - \varepsilon(\omega - \{1,2,4,8\ldots\})|\,\varepsilon\omega + (\left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8} \ldots\right\} - \varepsilon)(\omega - \{1,2,4,8\ldots\})) =$$

$$= (\varepsilon, 2\varepsilon, 4\varepsilon \ldots |\,\varepsilon\omega + (\left\{1 - \varepsilon, \tfrac{1}{2} - \varepsilon, \tfrac{1}{4} - \varepsilon \ldots\right\})(\{\omega - 1, \omega - 2, \omega - 4, \ldots\}))$$

Si vede che: l'insieme di sinistra è maggiore di zero e minore di 1; Inoltre, a destra:

$$\varepsilon\omega + \left(\left\{1 - \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{4} - \varepsilon \ldots\right\}\right)(\{\omega - 1, \omega - 2, \omega - 4, \ldots\} > \varepsilon\omega + \{\omega - 1, \omega - 2, \omega - 4, \ldots\})$$
$$> \boldsymbol{\varepsilon\omega + 1}$$

Nella formula: $\left(\left\{1 - \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{4} - \varepsilon \ldots\right\}\right)(\{\omega - 1, \omega - 2, \omega - 4, \ldots\})$ tutti i termini sono del tipo

= (1/N- ε)($\omega - n$) = $(\frac{1}{N})(\omega - n) - \varepsilon\,\omega + \varepsilon\, n$. Il termine dominante di ogni prodotto è + $(\frac{1}{N})(\omega - n) \approx \frac{\omega}{N}$, maggiore di 1.

Cioè l'insieme di destra è maggiore di 1, cioè $\varepsilon\omega$ è compreso fra un numero minore di 1 (ma maggiore di zero) e un numero maggiore di 1. Per il **teorema di semplicità** $\varepsilon\omega$ è quindi eguale al più antico numero creato fra questi due valori, cioè 1.

In conclusione abbiamo:

$$\boldsymbol{\varepsilon\omega = 1}$$

Questo è un risultato nuovo: noi abbiamo sempre assunto che 1/∞ = 0, e invece troviamo che 1/infinito = infinitesimo. Non si può parlare di una vera contraddizione con il risultato dei numeri reali, perché nel campo dei numeri reali gli infinitesimi non esistono. Sono, per così dire, così piccoli che sfuggono alla rete dei numeri reali.

A questo punto ci sono due vie. La prima è quella di costruire, facendoci un poco la mano, nuove mostruosità contenenti ω; la seconda è quella di prendere risultati calcolati da altri e verificarli. La prima via è aperta a chi ha un gusto raro per queste cose. Per la seconda, ad esempio,si possono proporre i seguenti risultati:

$$\sqrt{\varepsilon} = \left(\{\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 4\varepsilon \ \ldots\} \middle| \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}\right)$$

$$\varepsilon + 1 = (\ 1|2, 1\frac{1}{2}, 1\ \frac{1}{4}, 1\frac{1}{8}, \ldots)$$

$$\varepsilon = (\ 0|1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$$

$$2\varepsilon = (\ \varepsilon|1 + \ \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{4} + \varepsilon, \frac{1}{8} + \varepsilon, \ldots)$$

$$\sqrt{\varepsilon} = \left(\{\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 4\varepsilon \ \ldots\} \middle| \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}\right)$$

E con queste proposte di esercizi, credo di poter concludere anche questo mio lavoro. È possibile, anzi, è certo che vi si sono insinuati degli errori. Ma è altrettanto certo che mi son tolto un non piccolo sassolino da una scarpa.

APPENDICE 1 (Figura 5)

LA CREAZIONE DEI NUMERI SURREALI

(un diagramma che si trova di frequente)

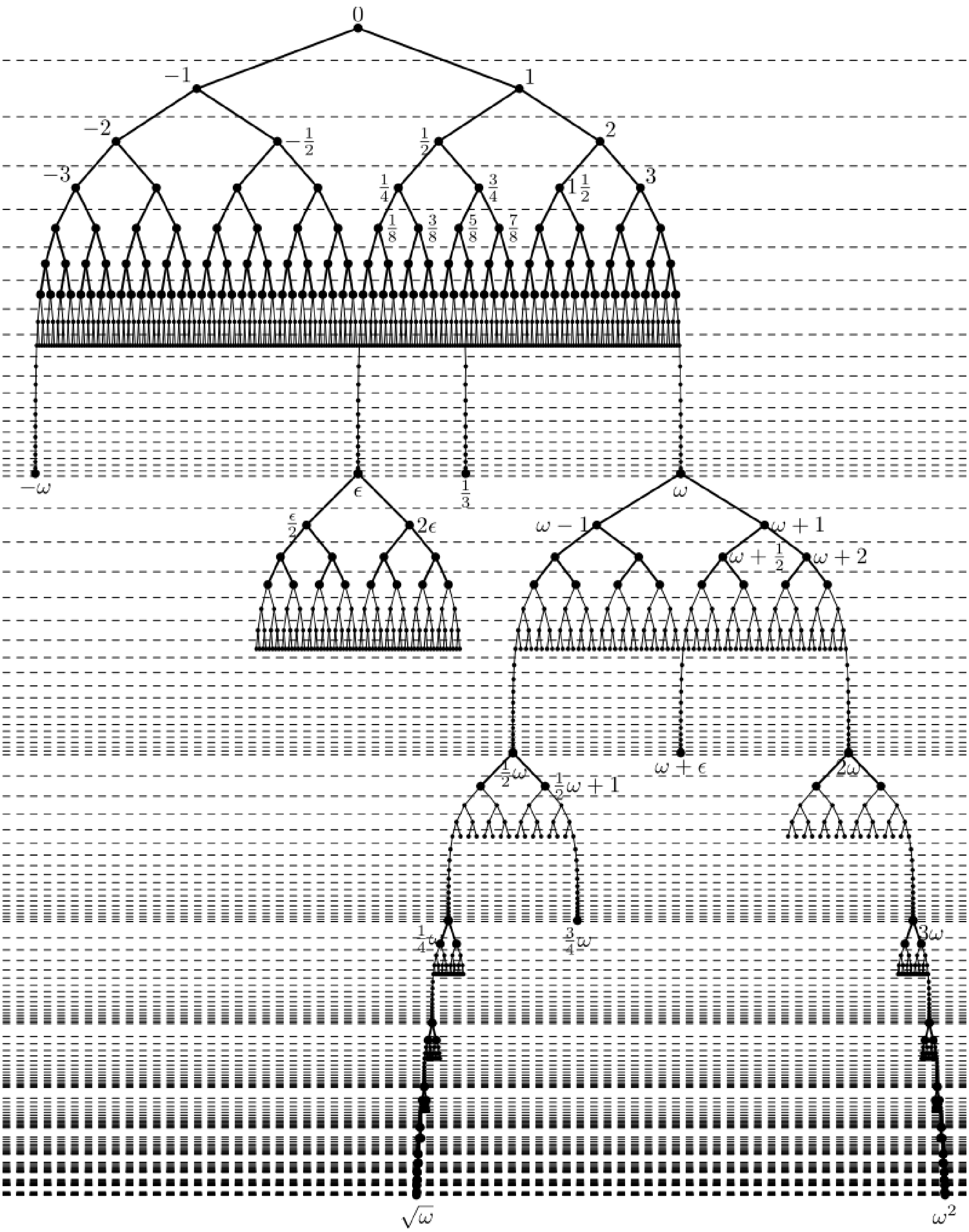


Fig.5

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Surreal_number_tree.svg

Nel contesto dei numeri surreali sovente si vede l'illustrazione della pagina precedente. Fig.5 comprende l'universo dei numeri surreali… veramente no, contiene solo la parte iniziale dell'universo dei numeri surreali. Per far stare questa figura in una pagina, non solo si misurano i giorni in giorni del creatore e giorni dei numeri, ma anche i numeri non sono equidistanti nella dimensione trasversale.

Il nuovo diagramma rappresenta i numeri creati (non tutti i numeri presenti) giorno per giorno, fino al giorno $\omega^{2.}$. A metà giornata, da ogni nuovo numero nascono rami, ciascuno dei quali crea un nuovo numero il giorno successivo, che si aggiungono a quelli esistenti, ponendosi ai lati sinistro e destro del genitore, a mezza via tra lui e il numero più vicino tra quelli già esistenti. Si tratta però di una mezza via apparente, che corrisponde a una distanza reale dalla verticale a sinistra doppia della distanza di destra.

Perché, come si vede dalla figura, +1 possa a trovarsi a mezza via tra ½ e 2 occorre che, appunto, la scala delle distanze si sia dimezzata tra 1 e 2.

La durata di ogni giorno è ridotta il giorno successivo (dimensione verticale), mentre, sulla dimensione trasversale, la distanza tra due nuovi numeri successivi di nuova creazione è dimezzata da un giorno all'altro, ma, grazie allo schiacciamento della scala verso destra e verso sinistra, appare simmetrica.

Le prime righe in alto, progressivamente contratte sia in senso verticale che in senso orizzontale, danno il diagramma che invece noi abbiamo lasciato nelle sue dimensioni naturali a pag.40. Nel primo giorno del creatore sono indicati in Fig.5 i primi otto giorni dei numeri.

Il primo giorno del creatore termina col giorno Aleph, e crea il numero ω, L'ultimo giorno in figura è il giorno Aleph (infinito) e crea ω^2. Tuttavia, come abbiamo visto, ci sono ben altre forme di infinità nel sistema.

Devo confessare che non comprendo in che misura siano contratti verticalmente i giorni. La coppia vacanziera parlava di una riduzione di un mezzo ogni giorno, ma qui, per dare più spazio, la riduzione è più modesta. Non ho trovato la scala verticale né sul testo del Conway, né su Wikipedia, dalla quale ho riportato la figura, chiaramente ispirata dal testo del Conway.

La figura risulta più simmetrica, se si usa anche in senso verticale un dimezzamento progressivo, come nella figura seguente, che però, evidentemente, per motivi di spazio non permette di disegnare otto giorni e riporta solo i numeri positivi. (I numeri negativi formano un diagramma esattamente simmetrico, a sinistra di quelli positivi.)

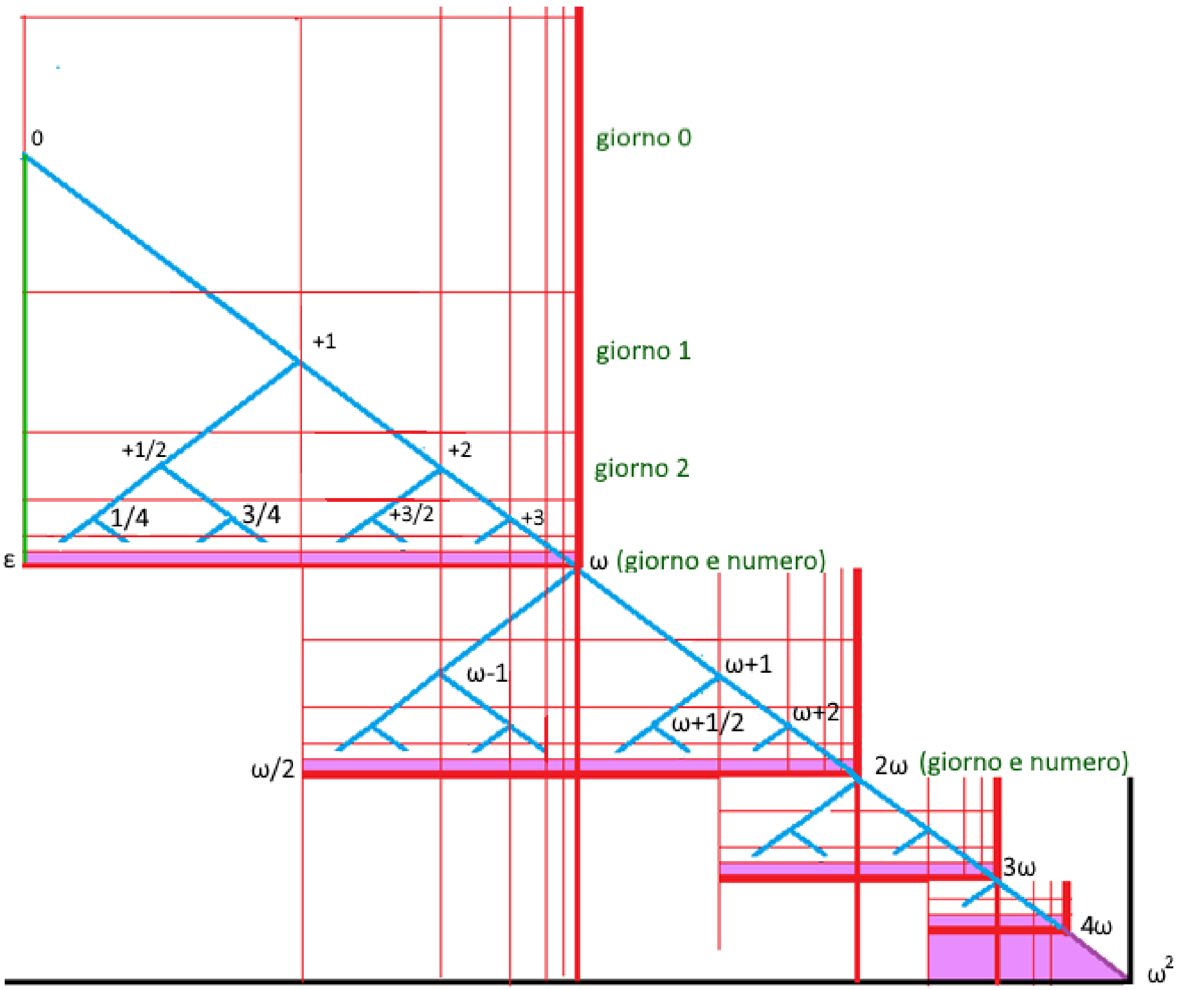


Fig. 6

Modifica di Fig.5 in modo da renderla coerente tanto in senso orizzontale quanto il senso verticale guadagnando in simmetria. I numeri nuovi sono creati a "mezzogiorno".

Dalla Fig.6 si può intuire come continuando dall'angolo destro in basso si avranno i giorni successivi ω^3, ω^4,… ω^ω e successivamente ω^{ω^2} …. ω^{ω^ω}. etcetera.

Come lo si può intuire? Non dobbiamo fare altro che seguire la linea obliqua che segna il confine destro dei nostri numeri surreali, la linea dei "massimi" delle generazioni di numeri, *e supporre che i numeri su quella retta siano tutti interi,* della forma: (qualcosa | ∅).

Anzitutto abbiamo la successione 0, 1, 2, 3, 4…Z, cioè tutti i numeri minori di $\boldsymbol{\omega}$, che dopo infiniti giorni ci fanno giungere a ω, cioè porgono (1,2,3,4… | ∅) = (Z | ∅) = ω. E questa successione è stata da noi studiata abbastanza in profondità.

A questo punto, lungo la linea obliqua a destra, incomincia una nuova serie: $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$….che, accrescendo all'infinito gli addendi di destra produce (ω +Z | ∅) = ω **+$\boldsymbol{\omega}$.**

Ma $\omega + \omega$ incomincia una nuova successione, perché è eguale a **2$\boldsymbol{\omega}$**. La nuova successione sarà 2ω, 3ω, 4ω… la quale, indovinate un po', terminerà con $Z\omega$, a cui segue $\omega \cdot \omega = \boldsymbol{\omega^2}$**.**

$$(\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega\ldots \mid \varnothing) = (Z\omega \mid \varnothing) = \boldsymbol{\omega^2}.$$

Segue ora una nuova successione, ω^2, ω^3, ω^4, e potremo costruire il numero

$$(\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \ldots \mid \varnothing) = (\omega^Z \mid \varnothing) = \boldsymbol{\omega^\omega}$$

A questo punto avremo imparato il gioco. Dopo ω^ω, ci saranno $\omega^{2\omega}$, $\omega^{3\omega}$,… e concluderemo con

$$(\boldsymbol{\omega^\omega}, \omega^{2\omega}, \omega^{3\omega}, \ldots \mid \varnothing) = (\omega^{Z\omega} \mid \varnothing) = \omega^{\omega\omega} = \boldsymbol{\omega\text{^}(\omega\text{ ^}2).}$$

La nuova successione, che inizia con ω^(ω ^2), ω^(ω ^3) terminerà con ω^(ω ^Z) e creerà ω^(ω ^ω). E così via, aggiungendo sempre nuove successioni, fino all'infinito. Non ci si fermerà mai.

Così, infatti, conclude il Libro (A. è Alice, B. è Bill, i due protagonisti della coppia vacanziera):

A. (falling into his arms) Bill! Every discovery leads to more, and more!

B. (glancing at the sunset) There are infinitely many things yet to do … and only a finite amount of time …

APPENDICE II.

Per completezza riporto qui due formule date da Conway.

1) Inverso di un numero.

Dato un numero x esiste un y tale che xy =1, da cui y =1/x . La divisione, naturalmente, di un numero z per x sarà data dal prodotto di z per l'inverso y del numero x.

z/x = z (1/x) = zy

La formula, valida esclusivamente per y > 0, è:

$$y = \frac{1}{x} = \left\{ 0\,, \frac{1 + (x_D - x)y_S}{x_D}\,, \frac{1 + (\,x_S\ - x)y_D}{x_S}\ \middle|\ \frac{1 + (x_S - x)y_S}{x_S}, \frac{1 + (x_D - x)y_D}{x_D} \right\}$$

Il problema, naturalmente, è che fare degli y (marcati in rosso) che compaiono a secondo membro.
Come procedere (per induzione o approssimazioni successive) lo spiega Conway a pag. 21 del suo testo.

Un esempio numerico (1/3) di applicazione della formula può essere trovato in :
https://en.wikipedia.org/wiki/Surreal_number.
Come si vede, 0 è sempre nell'insieme di sinistra di (1/x); inoltre sappiamo che 3 = (2|Ø), cioè x_S =2, x_D = Ø. Un primo elemento dell'insieme di sinistra dunque è 0. Questo ci aiuta a trovare una prima approssimazione del membro di destra, (1 +(2-3)0)/2 = ½. Il secondo elemento a destra è vuoto, perché x_D = Ø. Possiamo però tornare a sinistra (sempre eliminando il secondo elemento che comporta un'operazione con Ø. Il terzo elemento è quindi (1+ (2-3)(1/2))/2= ¼. Torniamo a destra, il secondo elemento non conta, il primo vale(1+(2-3)(1/4))/2 = 3/8 etc. Il risultato sarà:

(1/3) = (0, ¼, 5/16… | ½, 3/8, …)

Qui si può osservare che noi (cioè Knuth) avevamo già trovato una forma equivalente mediante lo sviluppo in successione infinita di frazioni diadiche a pag. 50. Avevamo ottenuto:

1/3 = (¼ , ¼+ 1/16, ¼ + 1/16+1/64… | ½, ¼+1/8, ¼+1/16+1/32)

Cioè lo stesso sviluppo. **Quindi, con questo metodo, sembra che possiamo aggirare le complessità della divisione come definita da Conway.**

2) Radice quadrata di un numero non negativo.

Conway riporta anche (pag. 22) una formula per la radice quadrata di un numero non negativo, trovata da C. Bach.

$$\sqrt{x} = y = \left\{ \left(\sqrt{x}\right)_S, \frac{x + y_D y_S}{y_D + y_S} \;\middle|\; \left(\sqrt{x}\right)_D, \frac{x + y_S {y'}_S}{y_S + {y'}_S}, \frac{x + y_D {y'}_D}{y_D + {y'}_D} \right\}$$

Qui, il problema accennato più sopra, è anche più evidente. Le varie y sono approssimazioni (opzioni, come le chiama Conway) successive.

Ma anche qui, e a maggior ragione, penso che possiamo tranquillamente barare, utilizzando uno sviluppo binario e poi diadico del numero voluto. Se il metodo funziona per π, che è addiruttura un numero trascendente, dovrebbe funzionare anche per un numero algebrico, come $\sqrt[n]{x}$.

Questo gioco, come tutti i giochi, lo si impara giocandoci. E questo è il mio consiglio: se si vuol giocare, si giochi tentando di risolvere alcuni degli esercizi, che ho esplicitamente o implicitamente proposto.

Auguri!