GEOMETRIA DEL TASSISTA

(Taxicab geometry, Manhattan geometry)

Questo saggio è la traduzione di una mia risposta a una domanda comparsa su Quora, edizione francese:
Qu'est-ce que la géométrie des taxis ?

1. Distanza

In ogni spazio geometrico si può definire una distanza tra due punti. Anzi, ci si rese conto presto che in uno stesso spazio geometrico si possono definire diverse distanze. (Peggio ancora, ci si rese conto che si può parlare di distanza anche tra oggetti che non sono geometrici: si può parlare di distanza nel pensiero di filosofi, nello stile dei compositori musicali eccetera. Ma non complichiamoci troppo la vita).

Noi siamo abituati a trovare la distanza sfruttando il teorema di Pitagora in due dimensioni nel piano, in tre dimensioni nello spazio. Per esempio, nel piano, la distanza d tra due punti P e Q di coordinate (x1, y1) e (x2, y2) è data da:

I. $$d^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

Se vogliamo la distanza di P(5,6) dal punto Q(2,4), quindi, disegniamo i nostri due punti in scala su carta millimetrata.
Guardando il disegno vediamo che il quadrato della distanza è dato sempre dal teorema di Pitagora, $d^2= (5-2)^2+(6-4)^2 = 13$. Quindi la distanza sarà la radice di 13 (= 3.61…), che sappiamo calcolare con buona approssimazione o cerchiamo su Google o altro calcolatore online.

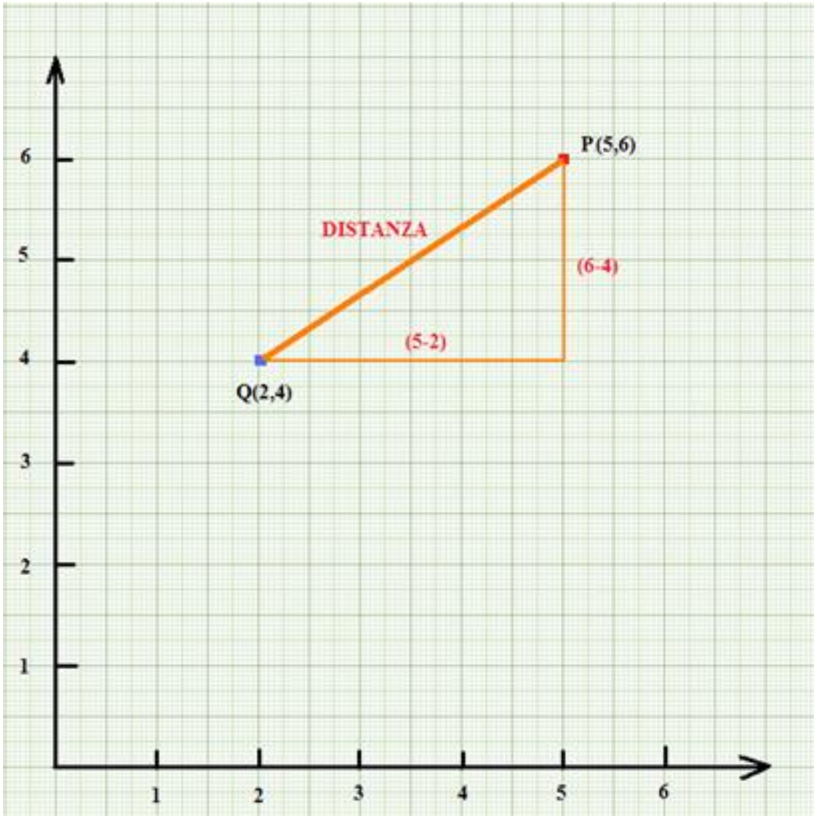


Fig.1
Distanza Euclidea fra i due punti P(5,6) e Q(2,4). Il suo valore è circa 3.61

Questa distanza è detta Euclidea, dal nome del vecchio Euclide, è la più intuitiva ed è quella che ha le più frequenti applicazioni. Ma, come vedremo, esistevano altre distanze.

In questa situazione i matematici vollero mettere un po' d'ordine. "Va bene, lasciamo definire le distanze che si vogliono, ma una distanza per essere tale deve rispettare certe regole, che diamine!"

Quindi, mentre i non matematici definivano le distanze come potevano, i matematici decidevano che dati due punti A e B in uno spazio "qualunque" (e quando i matematici dicono qualunque, veramente intendono qualunque) si può definire come si vuole la distanza d(A, B) come un numero che dipende dai due punti, purché
i) il valore della distanza, cioè il numero d(A,B), sia sempre positivo (o al massimo nullo), cioè $d(A,B) \geq 0$
ii) la distanza sia zero se e solo se i due punti coincidono, cioè $d(A,A)=0$;
iii) la distanza da A a B sia uguale alla distanza da B ad A, cioè $d(A,B)= d(B,A)$ ("proprietà di simmetria");
iv) dati tre punti distinti A, B, C, valga la diseguaglianza $d(A,B)+d(B,C) \geq d(A,C)$.

Ci si può render ragione di queste proprietà, che sono quelle delle distanze "Euclidee" che conosciamo o dovremmo conoscere. La proprietà (iv) è detta anche "disuguaglianza triangolare". Un lato di un triangolo sul piano è minore della somma degli altri due lati, a meno che ABC siano sulla stessa retta.

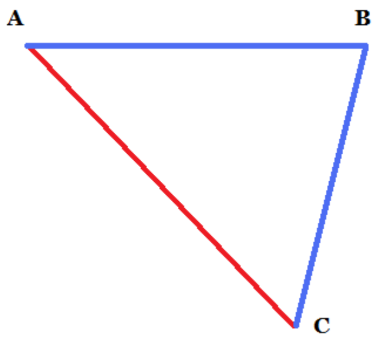


Fig.2.
Disuguaglianza triangolare: d(A,B)+d(B,C) ≥ d(A, C).

II. Altre distanze

Naturalmente i matematici costruirono subito delle eccezioni. Per esempio, quelli che studieranno la **Teoria della relatività,** troveranno che la distanza fra due *eventi* non è sempre positiva. Può essere positiva o negativa. E può essere nulla anche se gli eventi non coincidono. Come fare, davanti a una teoria fisica che ha di queste pretese? Semplice, invece che di "distanza" parleremo di "*intervallo" (spazio-temporale)* fra due eventi. Detto in altre parole, anche i matematici possono avere una coscienza elastica.

Nonostante l'utilità della distanza euclidea, quindi, ci sono in giro vari tipi di distanze di uso corrente, misurate forse in spazi costituiti da punti diversi da quelli a cui siamo abituati. In molti casi, utilizziamo correttamente diversi tipi di distanza senza renderci conto che non stiamo usando "distanze euclidee".

Per esempio, chi ha fatto escursioni in montagna, sa che le distanze non sono simmetriche. In montagna, le **distanze dei montanari** sono misurate in **ore.** Considerate che dei buoni camminatori dicono che la distanza dovrebbe valere dieci minuti per uno spostamento di un kilometro in piano e dieci minuti per 100 m di dislivello in salita. In altre parole se salite da A a B, percorrendo 1 km (sulla carta topografica) e salendo di 100 m, il tempo richiesto risulterebbe di 20 minuti. Ma ci vorrebbero solo 15 minuti per discendere da B a A, cioè 10 minuti per 1000 m di spostamento accoppiati a 5 minuti per 100 m di dislivello in discesa. Avremmo quindi una distanza che non rispetterebbe la regola fondamentale che d(A,B) = d(B,A) e due montanari potrebbero benissimo mettersi a distanza diversa l'uno dall'altro, ciò che sembra quasi una barzelletta. L'unico modo di evitare la dissimmetria (e la barzelletta) è quello di calcolare le distanze sempre solo dal punto più basso al punto più alto.

Su una montagna semplificata come una scalinata simmetrica, allora, possiamo disegnare un quarto di "cerchio". Ogni gradino in figura è largo 50 m e alto 50 m. I tre punti B, C, D sono a eguale distanza, dieci minuti, dal punto A, e quindi sono su un "cerchio".

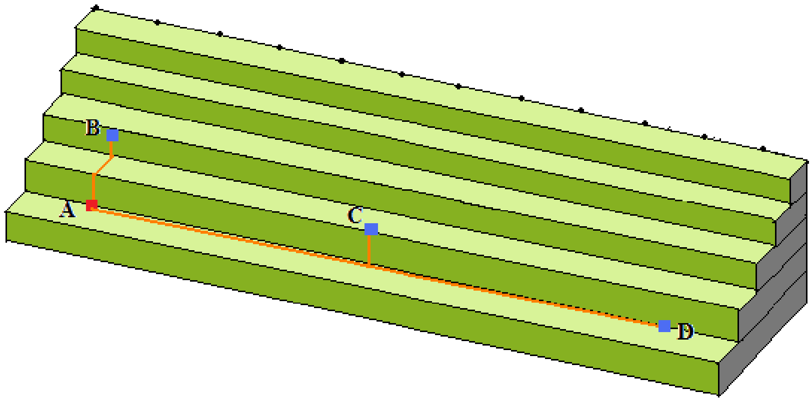


Fig.2
Distanza di montagna in ore di cammino – modello semplificato.
I punti B, C, D distano tutti 10 minuti da A (B è collocato mezzo minuto sotto il ciglio)

I taxisti, per esempio, usano un tipo diverso di distanza. Se sono fortunati a vivere in una città in cui le strade si incontrano ad angolo retto, come il centro di Torino in Italia o molte nuove città, per esempio negli Stati Uniti (diciamo Manhattan), o anche in antiche capitali cinesi o di imitazione cinese (quindi Kyoto e non Tokyo) la situazione è ancora controllabile. In una città come Parigi o Roma o Tokyo, la situazione è assai più caotica. Ma vediamo il caso più semplice.

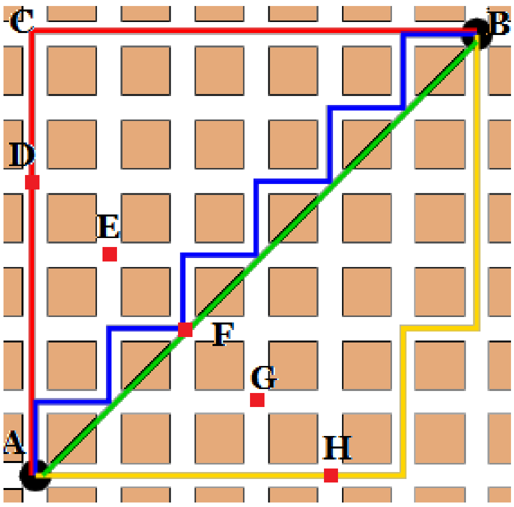


Fig.3:
Distanza del taxista in una città regolare

La figura ci mostra che la distanza Euclidea tra A e B, linea verde, impossibile per un taxi a meno che esista una galleria sotterranea, è minore della distanza misurata su percorsi possibili ai taxi. Inoltre, il percorso giallo, il percorso rosso ed il percorso azzurro hanno la stessa lunghezza, 12.

(Non ci è permesso, però, "orientare la figura", cioè introdurre una direzione nelle distanze, perché allora finiremmo col violare il primo criterio, che la distanza tra due punti sia sempre positiva o nulla. Se ci fosse permesso, potremmo percorrere i lati dei vari isolati in senso negativo, e la distanza, per esempio, d(A, F))

III. Il cerchio nella geometria del taxista.

La sorpresa viene quando cerchiamo di scoprire che forma ha la curva che unisce tutti i punti situati alla stessa distanza (per esempio 4 unità) dal punto A.

Sul piano a cui siamo abituati, usando la distanza euclidea, la curva sarebbe un cerchio. Infatti, se guardiamo la formula $x^2+y^2 = 4$, essa ci dice che "qualunque sia il punto P(x,y) che soddisfa a questa legge, la distanza di P da O è 2 ", cioè la distanza di P dall'origine, che chiameremo d(P) vale d(P) = $\sqrt{x^2 + y^2}$ =2. Allo stesso modo tutti i punti che distano 2 da O soddisfanno la nostra formula.
Ma tutti i punti che distano 2 da O non sono distribuiti a casaccio nel piano: essi siedono tutti su un cerchio di raggio 2.
Possiamo quindi trionfalmente dire che " **$x^2+y^2 = 4$ è l'equazione del cerchio di raggio 2".**

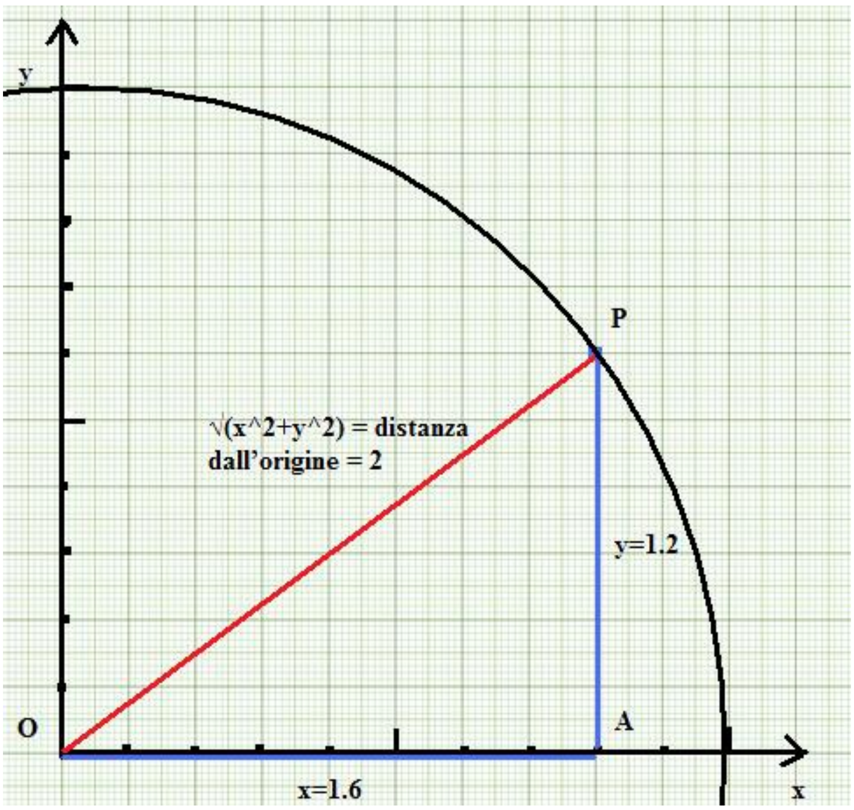


Fig.4
"Luogo dei punti che distano 2 dall'origine. Si tratta di un (arco di) cerchio"

Si potranno poi tracciare altre curve più complesse e studiare le loro proprietà: per ora ci basta sapere che davanti a noi c'è un campo sterminato, e che chi ne avrà la fortuna, a suo tempo lo esplorerà.

Nulla di tutto questo è vero per un taxista! I punti D, E, F,G, H in figura 3 sono tutti alla stessa distanza, 4, da A. Costituiscono quindi un quarto di "circonferenza del taxista" di raggio 4. La circonferenza intera avrebbe la forma di un quadrato messo per traverso.

Inoltre d(A,C)+d(C,B) dovrebbe essere ≥ di d(A, B) e invece è eguale. Eppure i tre punti A, B, C non sono per nulla allineati. Questo concetto di distanza del Taxista o di Manhattan è dunque accettabile per un pelo. In compenso la distanza è simmetrica, e d(A,A)=0.

Importa? Importa, per esempio se dovete pagare la corsa del taxi. Il costo è proporzionale alla "distanza del taxista", non alla "distanza euclidea".

Questo tipo di distanza, valido sinora solo per i punti che si trovano agli incroci delle varie vie, può essere esteso "al continuo", cioè a tutti punti del piano.

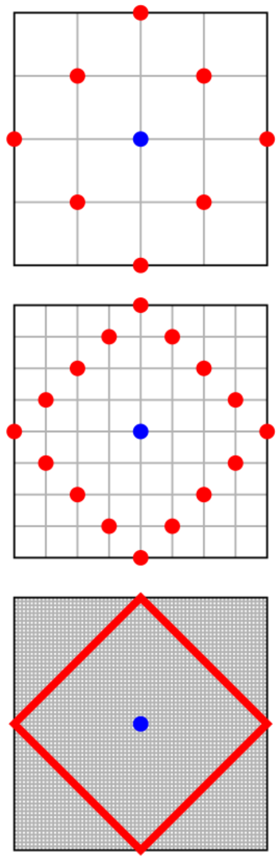


Fig.5
Passaggio dal discreto al continuo per il cerchio nella geometria di Manhattan

Possiamo dare una formulazione matematica a questo tipo di distanza?
Nel piano continuo, non diviso in isolati quadrati o di altra forma, se abbiamo due punti Q(q1, q2) e R (r1,r2), la loro distanza nella geometria di Manhattan vale:

II $$T = |q1-r1| + |q2-r2|$$

(in questo modo cade la stranezza del fatto che due punti siano sempre alla stessa distanza qualunque percorso abbiamo seguito, perché l'introduzione dei valori assoluti esclude l'introduzione di una direzione positiva e una negativa).

E **l'equazione del cerchio di raggio 1** centrato sull'origine? Semplice:

$$|x|+|y| = 1$$

E il **valore di π?**
In questa geometria la lunghezza di ogni lato è 2 in Fig. 5 (si applichi la definizione (II) e non la (I), Euclidea, mi raccomando), il perimetro – ovvero circonferenza - è 8, il diametro è 2, e quindi

$$\pi=4$$

E con questo, adesso l'eventuale lettore conosce i fondamenti della geometria del tassista, o geometria di Manhattan (e ci sono molti altri nomi). I matematici preferiscono chiamarla geometria L^1 (e L^2 quella Euclidea). Fondata su questo tipo di distanza si può costruire un'intera geometria con i suoi teoremi, in parte eguali, in parte diversi da quelli della geometria Euclidea (1). Per completezza di informazione, questa geometria non fu inventata da un taxista, ma fu studiata da H. Minkowski (1864-1909), nato presso Kaunas e classificato come Lituano, Tedesco, Polacco, Russo. Però in parte era stata già individuata da R.J Boskovich SJ (1711-1787), di Ragusa/Dubrovnik, moderna Croazia.

IV. Ancora altre distanze e geometrie.

Oltre alla distanza Euclidea, a quella dei taxisti, e a quella dei montanari (quest'ultima poco usata, bisogna dirlo), esistono altre distanze e altre geometria su di esse fondate.

Un'altra distanza ancora è data nel **gioco degli scacchi**. La distanza di due caselle sulla scacchiera seguendo le mosse del Re (per l'amor del cielo non quelle del Cavallo!) non è la distanza Euclidea, e neppure quella di Manhattan.

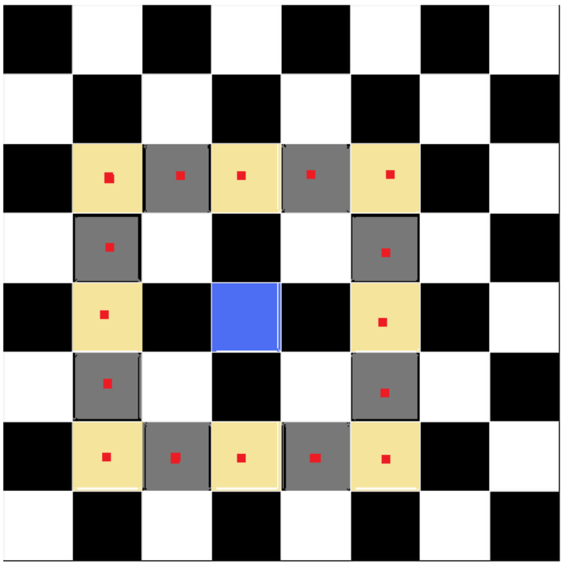


Fig.6
Cerchio di raggio 3 come appare usando la distanza di Chebyshev (numero di mosse a partire dalla casella blu)

Le caselle contrassegnate da un punto rosso sono tutte allo stesso numero di mosse del Re, cioè alla stessa distanza, dalla casella centrale blu. Questa distanza si chiama anche distanza di **Chebyshev**

Un celebre esempio in cui è utile questa distanza è quando in un finale di re e pedone bianchi contro re nero, con re bianco lontano, si vuol sapere se il re nero può raggiungere il pedone prima che questo arrivi a Dama.

La regola è: "Se il re, muovendo, entra nel quadrato che ha per lato la distanza dal pedone a dama, riuscirà a fermare il pedone, altrimenti no". Ovvero, se la distanza dal pedone a dama è maggiore della distanza dal Re a dama, il Re lo raggiunge.

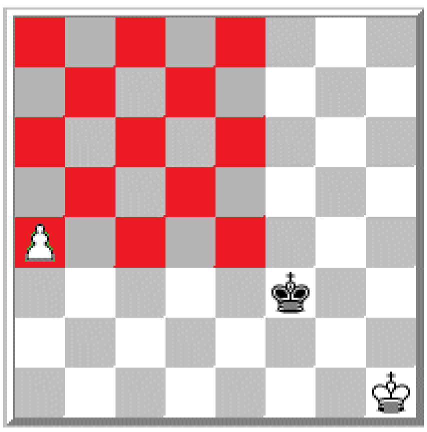


Fig.7.
Uso della distanza di Chebyshev per comprendere se il re nero raggiungerà il pedone bianco.

Nel caso in figura, se il re nero riuscirà o no a fermare il pedone bianco dipende da chi deve muovere. Se tocca al nero, il re entrerà nel quadrato, e fermerà il pedone. Se tocca al bianco, niente da fare.
Si può definire una distanza di Chebyshev anche nel continuo? Certo: la distanza, nel piano, tra due punti di coordinate P(x1,y1) e Q(x2, y2) = **massimo (|x1-x2|, |y1-y2|).**
Provare per credere.

Se poi uno vuole, può provare a studiare la scacchiera qui sotto, in cui indicate in blu le caselle sulla "circonferenza del Cavallo" di raggio 1 dalla casella rossa, ed in grigio quelle sulla "circonferenza del Cavallo" di raggio 2. La prima circonferenza è di sole caselle blu, la seconda di sole caselle bianche – ma non proprio tutte (mancano le caselle verdi, che sono a distanza 4 dalla casella rossa).

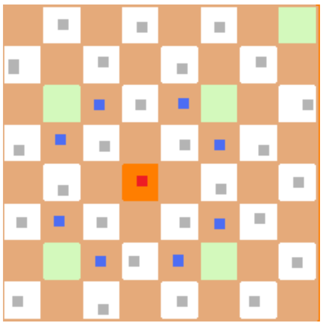


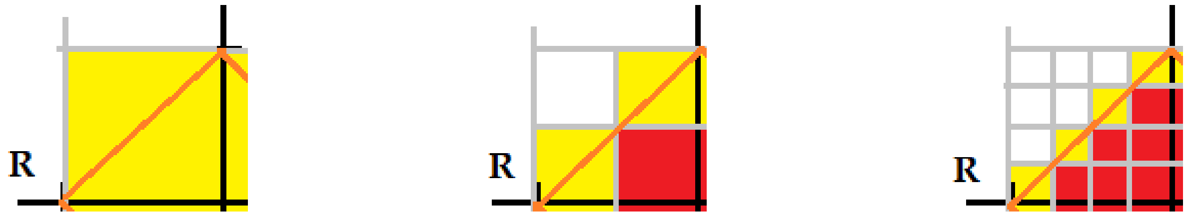
Fig.8
Distanza =1, distanza=2 e distanza =4 (mosse) dal Cavallo (situato nella casella rossa)

Ma **l'alfiere muove con una distanza di Manhattan** ruotata di 45 gradi sulle caselle dello stesso colore.
Eppure un bambino di dieci anni gioca a scacchi usando tre tipi di distanza (di Manhattan, di Chebyshev, del cavallo) , nessuna delle quali è l'ovvia geometria euclidea, senza nessun problema!

NOTE
(1) In rete è facile trovare molte pagine, soprattutto in inglese, che trattano la geometria del tassista o di Manhattan, in cui si trovano molte interessanti esposizioni di questa geometria, più o meno sofisticate.

Devo però confessare che non ho trovato in rete una definizione unica e chiara dell'area. Quasi tutti coloro che illustrano, anche con molti esempi, la geometria di Manhattan a livello introduttivo (come vuol essere questo saggio) preferiscono non parlare **dell'area del cerchio**. Altri ne parlano, ma dicono che il concetto è ambiguo e non danno una formula. Altri sono formalisti e dicono di brutto che l’area deve essere **S** = **π R², con π =4,** il che dà presto dei valori assurdi.

Come ho detto, in rete non ho trovato una soluzione. Ma, se dovessi inventarla, pena la morte, proporrei di seguire coloro secondo i quali il valore è ambiguo se ci troviamo in un piano “discreto”, ed è compreso fra un valore minimo (figura rossa), e uno massimo (figura gialla, che include la figura rossa). Mentre non ho trovato una formula, è evidente che i due valori si avvicinano sempre di più se si diminuisce la “grana” della matrice di punti.



a b c

Fig.9
L’area del cerchio nella geometria di Manhattan passando al limite della quadrettatura infinitamente piccola.

Ciascuna delle figure 9(a) , 9(b), 9(c) presenta **un quarto dell’area di un cerchio di raggio R**, con una quadrettatura di lato 1 in a, ½ in (b) , ¼ in (c).
Se si suppone che R sia diviso in **n** parti, ogni quadretto elementare di lato R/n ha un’area q = (R/n)^2. L’area gialla vale

$$S_g = \frac{n(n+1)}{2}\, q = \frac{n^2}{2}\frac{R^2}{n^2} + \frac{n}{2}\frac{R^2}{n^2} = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2n}$$

L’area rossa vale:

$$S_r = \frac{n(n-1)}{2}\, q = \frac{n^2}{2}\frac{R^2}{n^2} - \frac{n}{2}\frac{R^2}{n^2} = \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2n}$$

Si trova così che al limite per n $\rightarrow \infty$, $Area\ del\ cerchio = \ 4\,S_g = \ 4S_n = 2R^2$, che **è l’area euclidea** del quadrato di diagonali 2, e sembra indicare un nuovo valore **π=2.**   La differenza delle due aree è data da R(R/n), un *rettangolo* che ha per base R e per altezza R/n, come si può verificare dalle figure, ed è quindi infinitamente sottile per n $\rightarrow \infty$.

Tuttavia, questa formula non l’ho trovata in rete. Mi pare abbastanza logica, ma lascio ai lettori più diligenti il compito di correggerla.