INTRODUZIONE AD UN TRIANGOLO FAMOSO

(Per audaci matematici pedoni)

Prerequisiti: addizioni e moltiplicazioni.

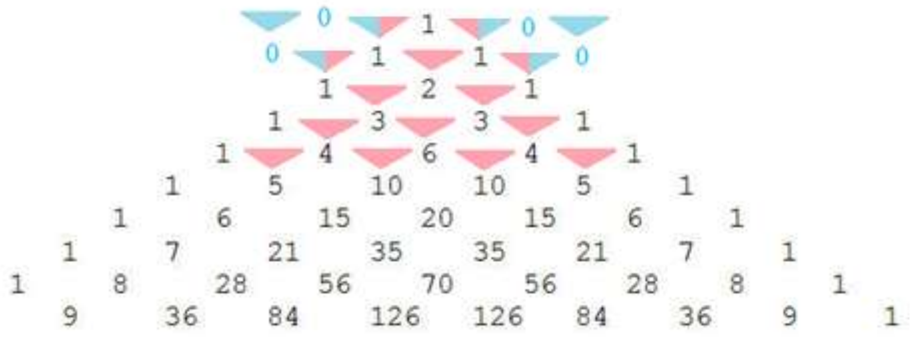
Niccolò TARTAGLIA (1499-1557)   Blaise PASCAL (1623-1662)

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0b/Niccol%C3%B2_Tartaglia.jpg
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/66/Pascal-old.png
By see signature (an old book) [Public domain], via Wikimedia Commons

INTRODUZIONE

Vediamo ora una strana tabella che ci dà dei numeri curiosi.



Vedete come si forma questo triangolo. Si comincia con un 1 in alto (quello ce lo dobbiamo proprio mettere noi) e poi sotto ogni numero si mette la somma dei due numeri sovrastanti della riga superiore. E' chiaro che nella seconda riga ci sono solo due numeri.

E' come se seminando un 1 in un campo di zeri ottenessimo una superba pianta. Una pianta che ha almeno due nomi da due grandi matematici: gli Italiani lo chiamano triangolo di Tartaglia - non ridete, l'inventore non si chiamava così, ma Niccolò Fontana era un povero ragazzino, che a dodici anni fu ferito da una sciabolata alla faccia durante il sacco della sua città di Brescia e non riuscì mai più a parlare bene, per cui fu soprannominato Tartaglia. I Francesi lo chiamano triangolo di Pascal, dal nome di un altro matematico prodigio che scoprì questi numeri indipendentemente cento anni più tardi. I numeri della tavola, per una ragione che magari vedremo, si chiamano **"coefficienti binomiali"**.

Già, ma che cosa vogliono dire questi numeri? Servono a qualcosa?

Questi numeri che escono quasi dal nulla hanno diverse applicazioni.

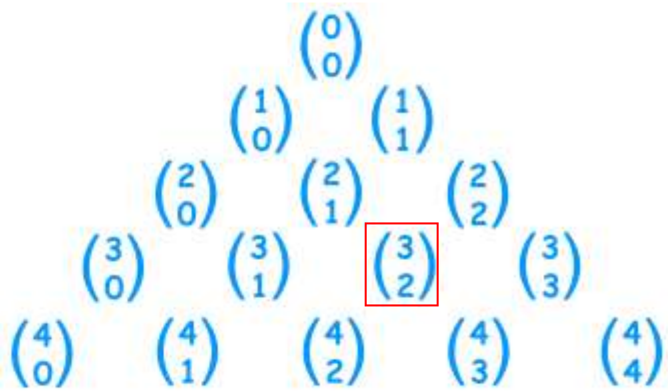
Supponiamo che siate cinque in una classe di scacchi, e vogliate formare un torneo in cui ogni giocatore incontra una volta ogni altro giocatore. Quante partite andranno giocate? Ci si arriva per tentativi, ma bisogna organizzarsi bene.
Si dice: gli scolari sono A, B, C, D, E.
le partite di A sono AB, AC, AD, AE (quattro)
Le partite di B sono BA, BC, BD, BE: sembrano 4, perché è chiaro che ogni giocatore dovrà giocare con gli altri quattro uno alla volta, ma facciamo attenzione, BA è lo stesso che AB. Quindi le partite nuove sono solo 3, cioè BC, BD e BE.
Le partite di C, facendo lo stesso ragionamento, sono 2, CD e CE, perché CA e CB sono già state notate come AC e BC rispettivamente.
Resta un'unica partita nuova, DE. Totale: 10 partite.

Il numero che si trova al terzo posto (non zero) nella fila che inizia con 1, 5, 10... è dieci.
Dunque è facile trovare la fila, perché il secondo numero ci indica il numero totale di giocatori. ma per trovare la colonna bisogna ricordarsi di aggiungere 1 al numero di componenti della squadra.
Oppure potete pensare che il primo numero, che è sempre 1, risponda alla domanda "quanti gruppi di zero giocatori si possono fare con cinque giocatori?. Risposta, solo uno, perché bisogna

escluderli tutti. Il secondo numero risponde alla domanda: “quanti gruppi di 1 giocatore si possono fare con 5 giocatori?”. La risposta è evidente: 5. Poi abbiamo i gruppi di 2 giocatori, tre giocatori, quattro giocatori. E questi sono meno evidenti e sono il motivo per cui abbiamo costruito la tabella. Se gli allievi sono 8, il numero di partite di scacchi è 28 (terza colonna nella fila 1,8...). E questo già incomincia a essere lungo da calcolare.

Le cose sarebbero assai più complicate se su otto membri di un club di rematori si volessero fare tutti i possibili equipaggi di un "quattro senza". Anche questo conto può essere fatto organizzandosi - ma ci vuole un po’ di tempo. Armati della nostra tavola andiamo a cercare il posto 5 nella fila 8, e troviamo 70. Pensate un po’! con otto rematori si possono fare 70 diversi equipaggi di quattro rematori. Chi l'avrebbe mai detto. Vedremo più avanti perché quello che ho detto è vero.
Tra l'altro, sarebbe anche interessante organizzare un modo razionale di elencare tutti i possibili equipaggi, il che non è banale.

Forse, se si vuole ricordare meglio il significato dei numeri, si può scrivere il “nome” dei vari numeri del triangolo in un’apposita tavola:

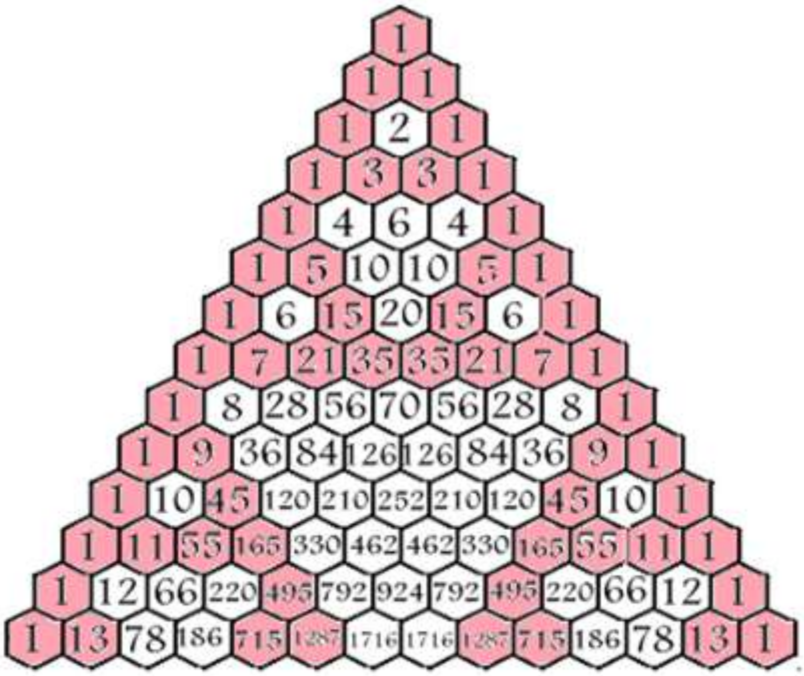


Il simbolo nel rettangolo rosso ci dice quante sono le squadre di **due** diversi rematori presi da un gruppo di **tre** candidati. **DUE sotto, TRE sopra.** Se si va a vedere il nostro triangolo, si vede che sono 3.
Potete dunque farvi i due triangoli, uno che ci dice i numeri, l’al tro che ci dice che cosa significano i numeri.

Il risultato che abbiamo ottenuto, 3, non è irragionevole, perché fare squadre di due diversi rematori da un gruppo di tre candidati, vuol dire lasciarne fuori uno diverso ogni volta. Siccome i candidati sono tre, possiamo fare questa operazione solo tre volte. Esattamente come se facessimo squadre di un rematore. Infatti, ogni volta che facciamo una squadra diversa di due rematori, su tre, facciamo anche una squadra diversa di un rematore su tre. Questo può spiegare la più visibile delle simmetrie nel nostro triangolo.

Naturalmente, il bello della nostra tavola è che non occorre impararla a memoria. La si può costruire immediatamente, data una matita e un pezzo di carta. Si fa molto più in fretta a costruire la tavola a partire dal numero 1 fino alla fila numero 8 che a contare tutte le diverse combinazioni di otto rematori quattro per volta. Qui vediamo il triangolo in forma piramidale, in cui ogni numero è la somma dei due sovrastanti.
Notate anche che i numeri dispari (in rosa) non sono disposti a caso nel nostro triangolo, ma riproducono una figura che magari incontreremo di nuovo.

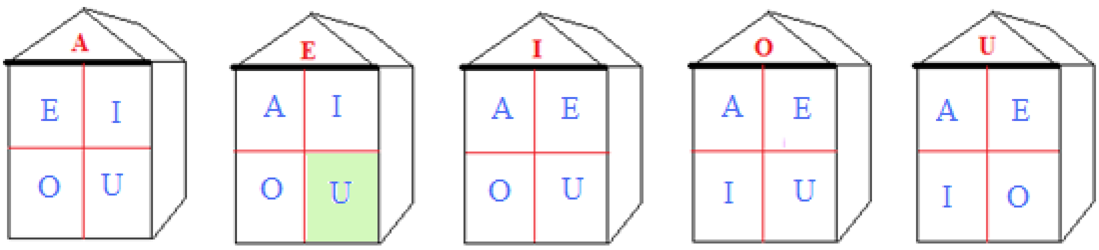
In realtà potremmo vedere la situazione al contrario considerando la cosa dal punto di vista dei numeri pari. Allora con qualche esperimento troveremmo che non sono solo i numeri pari e dispari che formano strani triangoli, ma anche i multipli di qualsiasi numero.



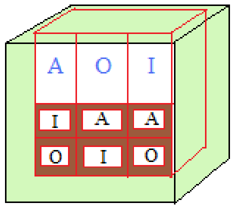
CALCOLO DIRETTO.

Naturalmente qualcuno si può chiedere se si possano calcolare direttamente i termini del triangolo di Tartaglia/Pascal (per noi TP) senza doverlo costruire partendo da 1. Naturalmente sì: tutto (o quasi) è possibile in matematica, se è corretto.

Il primo passo verso la soluzione è risolvere il seguente problema.
Date N (per esempio *cinque*) lettere diverse dell'alfabeto, quanti anagrammi di N lettere diverse si possono fare? Supponiamo di avere case con stanze, nelle stanze degli armadi, negli armadi dei cassetti, nei cassetti delle scatole.
Noi possiamo scegliere come prima lettera una qualunque, per esempio, delle cinque vocali A, E, I, O, U. Ne mettiamo una per casa e quindi occupiamo cinque case. Ogni casa avrà come nome questa prima lettera. In ogni casa possiamo mettere una qualunque delle **quattro lettere restanti**, una per stanza, e la stanza prenderà il nome di questa lettera. Avremo così quattro stanze per casa.



Nella casa A avremo, ad esempio, le stanze AE, AI, AO, AU. Ma nella casa E avremo le stanze EA, EI, EO, EU eccetera. Ad esempio, la stanza AE differisce dalla EA, essendo in due case diverse: “L’ordine importa”, infatti il problema è proprio quello di trovare in quanti modi diversi possiamo **ordinare** le cinque vocali. Occupiamo quindi quattro stanze per casa, in tutto 5 x 4 = 20 stanze occupate.
In ogni stanza possiamo mettere una qualunque delle **tre lettere restanti** ciascuna in un armadio, a cui darà il suo nome. In questo modo occupiamo 3 armadi per stanza, 4 x 3 per casa, 5 x 4 x 3=60 armadi in tutto. Ad esempio nella stanza EU (in verde nella figura) avremo i tre armadi EU-A, EU-O, EU-I.
Ora prendiamo una qualunque delle due lettere restanti e le mettiamo ciascuno in un cassetto, occupando così 5 x 4 x 3 x 2 cassetti in tutto. Per esempio, nell’armadio EU-A avremo i cassetti EUA-I ed EUA-O.



Casa E, stanza U

Infine potremmo mettere la lettera restante in una scatola, ed avremmo 5 x 4 x 3 x 2 x1 scatole.
I nomi delle 120 scatole saranno i nostri anagrammi.
Quindi, se non ripetiamo le lettere,

il numero totale di anagrammi di N lettere è N x (N-1) x (N-2).. x 2 x 1.

Se non si tratta di lettere ma di oggetti qualunque, non parliamo di anagrammi, ma di **permutazioni.** Inoltre il prodotto N(N-1)(N-2)…2 x 1 ha un simbolo suo, che è **N!, e si legge “N fattoriale”.**

Se invece possiamo ripetere le lettere, gli anagrammi sono più numerosi. Ad esempio, se prendiamo cinque lettere e facciamo anagrammi di cinque lettere in cui sono ammesse le ripetizioni, ciò vuol dire che al primo posto possiamo mettere una qualunque delle cinque lettere, al secondo pure, al terzo anche etc, sei volte, fino a che ne avremo $5\times5\times5\times5\times5 = 5^5$=3125.

Supponiamo ora di avere sei scolari e voler vedere quali sono tutti i possibili gruppi di 3 scolari. Supponiamo di avere dei banchi a tre posti. Nel primo posto possiamo mettere uno qualunque dei sei, nel secondo uno qualunque dei cinque restanti, nel terzo posto uno qualunque dei quattro restanti. Totale: 6 x 5 x 4 = 120. Questo numero, se lo si vuol esprimere in modo compatto, si ottiene dividendo due fattoriali:

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \mathbf{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\mathbf{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \left(\frac{6!}{3!}\right)$$

Ricordate però che questa divisione per fattoriali è solo una tecnica per scrivere n(n-1)(n-2).
Fin qui tutto bene. Il risultato è 120. Ma sappiamo che il risultato dovrebbe essere nel nostro triangolo di TP.
Andiamo a vedere il nostro triangolo di TP e troviamo che il numero

$$\binom{6}{3} = 20$$

Dove abbiamo sbagliato?

Qui bisognerebbe chiudere il libro e pensare.

Se pensiamo con calma, forse ci può venire in mente che la squadra Giorgio, Francesco, Giacomo è lo stesso che la squadra Francesco, Giacomo, Giorgio o altre ancora: sono sei in tutto. Tutte le permutazioni dei tre scolari, che come abbiamo visto sono 3!, contano come una sola. Quindi bisogna ancora dividere 120 per 3! che vale 6.

Il risultato è che

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{720}{6 \cdot 6} = 20$$

O, più in generale:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{n!(n-k)!}$$

E' una buona ginnastica mentale cercare di interpretare questa formula. Incidentalmente, l'oggetto $\binom{n}{k}$ si chiama **coefficiente binomiale**. E' sempre quello di prima, solo he questa è la sua espressione generale. Il motivo del nome lo vedremo più avanti. Qualcuno che sta più attento dirà: "Se interpretiamo e calcoliamo in questo modo il coefficiente binomiale, e non direttamente dal triangolo di TP, questo vuol dire che 0! =1. Infatti

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!\,0!}$$

e noi già sappiamo dal triangolo di TP che questo vale 1.
Esatto, tenetelo presente:

0! = 1

Altra cosa che sappiamo da come abbiamo costruito il triangolo di TP è che, ad esempio

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$$

O, in generale:

$$\binom{N+1}{k+1} = \binom{N}{k} + \binom{N}{k+1}$$

Cioè un coefficiente è dato dalla somma dei due che gli sono direttamente sopra nella riga superiore. Che è esattamente il metodo con cui abbiamo costruito il nostro triangolo.

Svolgendo i fattoriali, lo si può dimostrare in altra maniera. Chi se la sente, ci provi.

Le cose si complicano nei nostri anagrammi se non anagrammiamo cinque lettere diverse A E I O U, ma il nome LALLA. Noi ci aspetteremmo 5! soluzioni, cioè 120 anagrammi. Possibile?

In effetti gli anagrammi sono soltanto …dieci!

I dieci anagrammi di LALLA:

AALLL
ALALL
ALLAL
ALLLA
LAALL
LALAL
LALLA
LLAAL
LLALA
LLLAA

Perché? Perché nelle 5! permutazioni, 3 lettere L sono eguali e quindi le loro 6 permutazioni, contano come una sola, e due lettere A, due permutazioni, contano come una sola. Quindi dobbiamo dividere 120 prima per sei e poi per due, che ci lascia 10.

Il triangolo di TP è una foresta di animali matematici. Quando non avete niente da fare, esploratelo, per esempio trovando il significato dei vari allineamenti di numeri, orizzontali (ma questo lo sappiamo), verticali e trasversali.

Lo ritroveremo strada facendo.