

$$x + 1 = x$$

## (Dialogo di tre vecchi amici)

Risposta alla domanda, comparsa su Quora:

### Come può avere senso un'equazione tipo $x+1=x$ ?

*Una mattina tre amici che sanno un po' di matematica decisero di viaggiare in seconda classe da Milano a Monza e si misero a chiacchierare del più e del meno. C'erano altri passeggeri sul treno, intenti a badare ai fatti loro: operosi extra-comunitari, ragazzi e ragazze tutti affaccendati col loro cellulare, impiegati in giacca e cravatta con il loro laptop. Ma i nostri tre pensionati erano ancora impegnati nell'arcaica pratica di conversare, il che attirava loro occhiate oblique da parte dei vicini.*

FILIPPO: Bei tempi, quando tutto lo scompartimento chiacchierava. Generalmente si incominciava con le malattie di famiglia...

LEOPOLDO: Già, ho imparato tante cose, chiacchierando in seconda classe.

FILIPPO: Per esempio?

LEOPOLDO: Mah, che nel 1992 c'era un signore di Bergamo che aveva un alluce valgo.

GIANFRANCESCO: Bei tempi! E c'era un tipo di Alghero che faceva canestri con foglie di palma nana. Chissà come sta.

FILIPPO: Io ho anche incontrato un Cavallo.

LEOPOLDO: Per favore, siamo seri. Viaggiavi in carro bestiame?

FILIPPO: No, era un tale di Modica che faceva Cavallo di cognome. Mi ha anche detto che, a Modica, Cavallo era uno dei due cognomi più diffusi.

*(Il treno dopo di aver lungamente rallentato, si arresta. Di fianco al treno c'è un lungo muro incrostato di graffiti).*

GIANFRANCESCO: Ed eccoci fermi. Non so perché, non c'è verso di andare da Milano a Monza senza fare soste impreviste in luogo e durata. E dire che questa credo sia la seconda ferrovia più antica d'Italia.

FILIPPO: Forse il problema è proprio quello. Intanto, nessuno ci dice niente.

LEOPOLDO: *(Guardando fuori del finestrino)*: Guardate là quei graffiti!

GIANFRANCESCO: Belli. Ai miei tempi non si usavano. Penso che mancasse il materiale per farli con efficienza.

LEOPOLDO: Ma questi sono solo scarabocchi! Nessun valore artistico.

FILIPPO: Non direi, il graffito è ora una forma d'arte, o addirittura di filosofia. Guardate quello là: dice " $x+1 = x$ ".



LEOPOLDO: Cavolate. Non c'è nessun numero reale  $x$  (inclusi i numeri naturali) per cui valga questa proprietà. Chi ha scritto era pazzo. L'equazione non ha senso.

GIANFRANCESCO: Spiacente, ma la matematica è l'arte di dare un senso a espressioni apparentemente prive di senso. (*Facendo una voce nasale*) "Usasi correntemente il dominio dei numeri reali allargato, o insieme reale esteso, che aggiunge due punti, più e meno infinito, alla linea reale", e poi ci fa i conti come se fossero numeri come gli altri – con qualche regola in più. Nel sito inglese o americano ([https://en.wikipedia.org/wiki/Extended\\_real\\_number\\_line](https://en.wikipedia.org/wiki/Extended_real_number_line)) trovi anche le operazioni aritmetiche, quali  $a + \infty = \infty$ , purché non sia  $a = -\infty$ , dato che  $\infty - \infty$  è una forma indeterminata. Qui,  $a = 1$ .

LEOPOLDO: Per favore, lasciamo perdere le forme indeterminate.

GIANFRANCESCO: (*continua senza ascoltarlo*) Naturalmente, con questa estensione, si perdono alcune delle proprietà che fanno di un insieme un "campo".

LEOPOLDO: Non hai idea di quanto me n'importi.

GIANFRANCESCO: Infatti, non ho ancora incontrato nessuno a cui importi. Ma è inutile fare gli struzzi, l'infinito viene usato allegramente: se ti chiedo l'integrale di  $\exp(-x)$  da 0 a  $\infty$ , sai che cosa ti chiedo e sai quanto vale, *solo perché attribuisce il valore zero a  $\exp(-\infty)$* . E poi tutti sanno che certe funzioni sul piano complesso hanno punti singolari (o poli di vario ordine) in cui il valore è infinito: per esempio, nella teoria della funzione Zeta di Riemann, che va tanto di moda, la funzione Gamma ha dei poli nei numeri pari negativi che

cancellano giusto giusto gli zeri della funzione Zeta, i cosiddetti zeri banali, per cui possiamo lavorare su una funzione, in genere detta  $\xi(x)$ , la quale...

LEOPOLDO: Basta, basta. Di queste cose non ne capisco nulla. E ti dirò che della congettura di Riemann me n'importa ancora meno di quanto importasse a Riemann. Sei righe a stampa.

GIANFRANCESCO: Sì, ma non credere, quella è solo la punta dell'iceberg. Ci aveva fatto molti conti: non è facile calcolare uno zero della funzione Zeta! E lui ne aveva calcolati parecchi. A mano. Comunque ricorda soltanto che zero moltiplicato per infinito nella maggior parte dei casi è un numero finito. E quello che voglio dire è che  $\infty+1 = \infty$ , per cui *la soluzione del problema del graffito è  $x = \infty$  (nel dominio dei numeri reali allargato).*

FILIPPO: Ma scusa, io mi ricordo che in geometria proiettiva mi avevano detto che una retta ha un solo punto all'infinito, non due, come tu sembri suggerire per la retta reale estesa.

GIANFRANCESCO: Non parlarmi male della geometria proiettiva. È forse il campo più elegante della matematica che io abbia mai incontrato.

FILIPPO: Ti è mai stata utile, la geometria proiettiva?

GIANFRANCESCO: No. Mai. Almeno fino ad oggi. Ad ogni modo l'idea è che ogni retta ha un punto all'infinito, in cui incontra la retta all'infinito. Se avesse due punti all'infinito da bande opposte, allora avremmo due rette (la nostra retta originaria e quella all'infinito) che si incontrano in due punti, mentre un assioma inciso sul granito da Euclide è che due rette possono avere un solo punto in comune. Altrimenti, anatema. E questo senza andare a cercare le temperature negative.

LEOPOLDO: Altra idiozia. Tutti sanno che le temperature negative, cioè inferiori allo zero assoluto, non esistono. La temperatura è interpretabile come energia cinetica della particella. Se la particella è ferma, la temperatura è zero. Meno che ferma non può essere, *ergo....*

GIANFRANCESCO: Già, ma la definizione termodinamica della temperatura è  $T = \Delta E / \Delta S$ . *In genere* aumentando l'energia  $E$  (per lo più energia cinetica delle particelle del sistema) si aumenta il disordine, rappresentato da  $S$ , che è l'entropia. Per cui, dal momento che *in genere* sia  $\Delta E$  che  $\Delta S$  hanno lo stesso segno, la temperatura è positiva. Ma solo *in genere*. Ci sono dei sistemi a livello particelle elementari in cui diminuendo l'energia aumenta il disordine... C'è ancora qualcuno che si arrampica sugli specchi per strillare che non è vero, o al massimo che importa poco. Ma ti prego, Leopoldo, non schierarti con loro! *Ad ogni modo, nella termodinamica di questi sistemi,  $T = -\infty$  e  $T = +\infty$  coincidono. Se sia più o meno infinito dipende dalla strada che hai fatto per arrivarci. Tanto, proprio all'infinito non ci arrivi.*

LEOPOLDO: (*sarcastico*) Ecco una buona notizia che spiega tutto.

FILIPPO: Ma l'espressione che vediamo,  $x+1 = x$ , chi ci dice che sia un'equazione valida? Non potrebbe essere stata scritta, che so io, come un tentativo di trovare, in geometria analitica, l'intersezione della retta  $y = x+1$  con la retta  $y = x$  ?

LEOPOLDO: Ottima idea. La soluzione non esiste. Le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare ( $m= 1$ , chissà perché tutti i libri che ho trovato ai miei tempi usavano il coefficiente  $m$ ) e quindi sono parallele e quindi non si incontrano e quindi non c'è soluzione.

GIANFRANCESCO: E invece la soluzione l'abbiamo appena detta: si incontrano all'infinito.

LEOPOLDO: Cioè mai.

GIANFRANCESCO: Cioè in un punto improprio.

LEOPOLDO: Allora mettiti a camminare su un binario (senza fine) e fermati solo nel punto improprio dove le due rotaie si incontrano. Ammettendo naturalmente che la Terra sia piatta e infinita. Secondo me, ti dovresti mettere subito in marcia. Ciao.

FILIPPO: (Si alza e gli stringe la mano) Finalmente un terrapiattista in carne e ossa! Credevo che i terrapiattisti non esistessero e fossero stati inventati dai "poteri forti" per confondere le idee al popolo. E ci sono pure riusciti! (Si siede di nuovo).

GIANFRANCESCO: Ma il punto improprio non è un punto che non esiste. È un punto della retta impropria. La cosa la si vede bene usando le *coordinate omogenee*. Sostituisci  $y$ , che qui abbiamo eliminato, con  $Y/Z$ ,  $x$  con  $X/Z$ , moltiplichi per  $Z$  e  $x+1 =x$  diventa  $X+Z=X$ , la cui soluzione è  $Z=0$ , che come tu m'insegni è l'equazione (in coordinate omogenee) della retta all'infinito, la retta impropria.

LEOPOLDO: Peccato che la retta impropria non esista.

GIANFRANCESCO: Se è per quello, hai mai visto una retta propria? Tu hai solo visto delle miserabili approssimazioni con uno spessore. La retta ideale di Euclide ha spessore zero!

LEOPOLDO: Ma almeno le approssimazioni ci aiutano a immaginare una retta propria!

GIANFRANCESCO: Ad ogni modo la retta impropria esiste, tant'è vero che la puoi portare al finito con una trasformazione proiettiva, o, per dare un esempio semplice, con una fotografia. La tua macchina fotografica compie una trasformazione proiettiva, o addirittura prospettica, e l'orizzonte (idealmente) è la retta all'infinito portata al finito.

LEOPOLDO: Ma non puoi raggiungere l'orizzonte!

GIANFRANCESCO: Non posso raggiungerlo sulla Terra (piatta e infinita) ma su una foto sì. Se vedi una foto con una linea orizzontale, mica sai che è l'immagine della retta all'infinito. È una retta come le altre della foto. Per esempio puoi misurare che è a cinque centimetri dalla base della foto. Se mi credi, devi ammettere che, di nuovo, il graffito  $x+1 = x$  è valido per  $x = \infty$ , **punto improprio se preferisci.**

LEOPOLDO: Non preferisco.

GIANFRANCESCO: però mi hai dato un'idea. Chissà se è stato studiato che cosa succede al di là del punto improprio. Pensi che le due rette divergano?

LEOPOLDO: Ti dirò che non me n'importa assolutamente.

GIANFRANCESCO: Adesso che mi ricordo: mettimi davanti a un'ellisse e stirala (magari con una trasformazione proiettiva) fino a renderla tangente con la retta all'infinito, essa diventa una parabola. Se continui a stirarla, ti ritorna alle spalle: è ora in due pezzi o rami, è diventata un'iperbole. Quindi, mi pare, le due parallele dovrebbero ricomparire alle nostre spalle come una copia identica di quelle davanti a noi: queste sembrano convergere verso l'orizzonte e quelle alle nostre spalle sembrano divergere dal punto all'orizzonte, una volta attraversato... l'infinito.

FILIPPO: Scusatemi, ma io sono un'anima semplice. Io mi ricordo che in programmazione, tanti anni fa, si usava l'espressione  $x = x+1$ . Se chi ha scritto  $x+1 = x$  si riferiva a quello, allora forse....

LEOPOLDO: Già, anche se io non ho mai visto un linguaggio di programmazione in cui si osasse scrivere  $x+1=x$ , mentre  $x = x+1$  era un'espressione usatissima. *Ma in ogni caso non è un'equazione. È un assegnamento di un valore a una variabile.* Ammetto però che sul muro non c'è scritto se abbiamo a che fare con un'equazione o un assegnamento.

GIANFRANCESCO: Vero, onesto Leopoldo. Il nostro ignorante pittore di graffiti potrebbe aver confuso  $x=x+1$  con  $x+1=x$ , o magari ci sono linguaggi arcaici che fanno gli assegnamenti in quell'altra maniera: forse bisognerebbe verificare. Tanti anni fa avevo trovato un sito in rete, una sorta di cimitero degli elefanti dei morti programmi, forse un centinaio. In ogni caso, le due  $x$  significano cose diverse. A sinistra in  $x=x+1$ ,  $x$  indica il nome di un contenitore, a destra indica il valore del contenuto del contenitore  $x$  in quel preciso momento dell'esecuzione del programma. Supponiamo che il contenuto valga 1. Se subito dopo eseguita l'istruzione "interrogiamo" la variabile-contenitore  $x$ , ci viene detto che il contenuto è 2. E ancora, se vogliamo aggiungere 1 al contenuto, possiamo scrivere  $x = x+1 = 2+1 = 3$  cioè "La variabile  $x$  ha valore eguale al valore attuale (2) a cui si aggiunge 1. Per cui, una volta eseguita l'istruzione per la seconda volta,  $x=3$ . Il contenuto, naturalmente."

FILIPPO: In questo caso, l'espressione ha senso. Se è stata usata – e sottolineo il "se" - **in programmazione**, non ha soluzione, o meglio, **qualsiasi numero – per lo più, ma ormai**

**non necessariamente – intero può essere la soluzione.** La chiamerei un'espressione indeterminata.

LEOPOLDO: Mi sembra che raggiungiamo troppe conclusioni, che non concordano tra loro. E questo perché voi state assegnando ai numeri e ai segni "più" e "uguale" dei significati a casaccio.

FILIPPO: Non proprio a casaccio. E comunque, chi ce lo vieta? Chi sa che cosa aveva in mente il pittore di graffiti? Difatti, mi è venuta in mente un'altra interpretazione. Quando lavoravo sui circuiti logici, ricordo che usavamo l'algebra Booleana, quella con cui George Boole cercò (1847) di dare forma algebrica alla logica, in realtà alla cosiddetta logica proposizionale. ([https://it.wikipedia.org/wiki/Algebra\\_di\\_Boole](https://it.wikipedia.org/wiki/Algebra_di_Boole))

Se consultate l'articolo di wikipedia, trovate le varie proprietà dell'algebra di Boole. Mi pare che ce ne fosse una di interesse per noi, la cosiddetta "esistenza del massimo". La si capisce meglio analizzando un circuito logico che realizza elettricamente uno degli operatori dell'algebra di Boole, l'operatore OR ("oppure", **frequentemente indicato con il simbolo +**).

OR è una "porta logica" (*gate*) che riceve in ingresso almeno due valori – qui supponiamo precisamente due - e restituisce 1 se almeno un valore di ingresso ha valore 1. Supponi di avere realizzato una porta OR (cioè "+") in cui entrano due cavi e ne esce uno solo. Il cavo di uscita può portare solo un massimo di corrente, che chiameremo 1. Peraltro, immettendo corrente 0, passerà una corrente 0. Quindi abbiamo le regole (a sinistra la corrente immessa dai due cavi, a destra la corrente che passa):

$$0+0=0;$$

$$1+0=1;$$

$$0+1=1;$$

$$1+1=1, \text{ per l'esistenza del massimo.}$$

Si vede allora che l'equazione  $x+1=x$  non ammette la soluzione  $x=0$ , perché  $(x=)0+1=1$ , **che, se fosse eguale a x, dovrebbe valere 0**. Solo  $x=1$  è la soluzione ammessa, perché abbiamo  $(x=)1+1= (x=)1$ .

Questa quindi è la **soluzione in algebra booleana:  $x=1$** .

GIANFRANCESCO: Non so nulla di algebra Booleana, e l'esempio delle correnti mi basta. Ma ti credo.

LEOPOLDO: Oh, finalmente qualcosa che non sai! Ma almeno, Filippo, dovrete dirci che cosa è la logica proposizionale.

FILIPPO: Supponi di avere una "proposizione" di cui voglio sapere se è vera o falsa. Per fare un esempio a proposito, mi metto alla finestra e guardo. La proposizione di cui voglio sapere se è vera o falsa è "Sta piovendo". So che piove se tutti i passanti hanno l'ombrello aperto, oppure (OR) se vedo gocce d'acqua cadere nelle pozzanghere. Vedo che tanto la

prima quanto la seconda proposizione sono vere (valore di verità =1), cioè i rari passanti hanno l'ombrello aperto, e nelle pozzanghere cadono gocce d'acqua. Concludo che piove. Riconoscerai da quel che ho detto prima, che siamo nel caso  $1+1=1$ . Qui c'è un rozzo esempio di come la logica proposizionale cerchi di meccanizzare questi ragionamenti sulle proposizioni, miranti a sapere se sono vere o false, mediante un alfabeto di simboli (per le proposizioni e per gli svariati operatori, come OR, e altri di comodo) i quali sono raccolti in sequenze che rispettano una opportuna sintassi. Ne esce un'espressione che ci dice se la proposizione che interessa (qui era la semplicissima "sta piovendo") è vera o falsa (valore di verità 1 o 0 rispettivamente).

LEOPOLDO: Va bene, qualcosa ho capito. Ma ci devo pensare.

GIANFRANCESCO: Riferendomi a quello che aveva detto Leopoldo, noi in effetti stiamo trovando che esistono diversi sistemi di numeri, di simboli, e di regole di calcolo, che possono dare ciascuno un significato all'espressione  $x+1=x$ . Sapete qualcosa dei numeri transfiniti?

FILIPPO e LEOPOLDO: Molto poco.

GIANFRANCESCO: Temo allora di non poter fare altro che dirvi i risultati, con qualche cenno di dimostrazione. Prendiamo i numeri naturali. Come abbiamo visto, se non estendiamo la retta dei numeri reali fino a includere gli infiniti positivo e negativo, per noi **l'infinito non è un numero, e l'equazione  $x+1=x$  non ha soluzione**. Ma su questi concetti il primo a lavorare sistematicamente fu Georg Cantor (1845-1918), un tedesco nato a ...San Pietroburgo, di tutte le città tedesche, che in pratica fondò la teoria degli insiemi....

LEOPOLDO: ...la quale ha rovinato l'insegnamento della matematica negli Stati Uniti....

GIANFRANCESCO: Non raccolgo. Cantor, una volta stabilite le basi della teoria (cosiddetta *ingenua*) degli insiemi, incominciò a sondare l'infinito, oltre il "non numero" di cui abbiamo parlato. Prima lo studiò come numero cardinale (i numeri cardinali sono quelli che definiscono la grandezza o quantità di elementi di un insieme) – e siamo nel 1873 circa; e poi – ma ci fu un esaurimento nervoso in mezzo - lo studiò come numero ordinale (i numeri ordinali corrispondono a primo, secondo, terzo etc.) – e siamo nel 1883, dieci anni dopo. Si era infatti reso conto del fatto che *numeri cardinali e ordinali davano origine a diversi tipi di infiniti*, per cui dovette ideare anche le differenti regole delle aritmetiche dei numeri transfiniti, cardinali e ordinali rispettivamente. Scoprì un certo numero di concetti e teoremi. Tanto per dire, concluse che ci sono infiniti numeri transfiniti...

FILIPPO: Che sarebbero?

GIANFRANCESCO: Dammi un momento. Diciamo che sarebbero l'uno più infinito dell'altro. Ad ogni modo Cantor sembrò spaventarsi del mostro che aveva creato, e fece

l'ipotesi che esistesse un "infinito assoluto", indicato con Omega maiuscolo, un numero maggiore di qualsiasi numero immaginabile o *inimmaginabile*....

FILIPPO: Ummm....

GIANFRANCESCO: Difatti, non si deve pensare che queste idee siano state universalmente applaudite, anche perché Cantor, devoto luterano, legò il concetto di "infinito assoluto" a Dio....col risultato che, oltreché da matematici e da filosofi, fu ferocemente osteggiato anche da teologi (anche luterani). E non erano gente da poco. Suo acerrimo nemico fu Kronecker, capo del dipartimento di matematica a Berlino, che gli ostacolò l'ingresso nella facoltà di Berlino fin che poté. Lo chiamava "corruptore della gioventù". E pensare che adesso per corrompere la gioventù basta un cellulare.

FILIPPO: Sono cambiati i tempi. E un cellulare è molto di più di un oggetto. Ben usato, è tutto l'universo che conosciamo. Be', quasi.

GIANFRANCESCO: Forse hai ragione. Comunque Cantor entrò in corrispondenza anche con Papa Leone XIII...

FILIPPO: Ma, per favore, torniamo a  $x+1=x$ . Va bene che avevi parlato di cardinali, e quindi un Papa ci sta, ma...

GIANFRANCESCO: Va bene. I numeri cardinali transfiniti descrivono la "grandezza" degli insiemi infiniti.

LEOPOLDO: Per me, un infinito vale l'altro.

GIANFRANCESCO: No. Ci sono diversi infiniti. Prendiamo per esempio i numeri cardinali, che indicano la grandezza o numero di elementi di un insieme. Noi possiamo scrivere la successione delle grandezze degli insiemi, incominciando con quelli finiti,

**0, 1,2,3...n....Aleph(zero), Aleph(uno), Aleph(due)....Aleph(alpha)...**

Gli infiniti Aleph costituiscono un insieme ben ordinato di infiniti, ordinati secondo i numeri ordinali. Aleph(zero), il più piccolo e primo di questi infiniti, è l'infinito *numerabile*, cioè i cui elementi possono essere messi in corrispondenza con i numeri naturali. Cantor provò che tanto i numeri razionali quanto i numeri irrazionali algebrici (cioè soluzioni di equazioni polinomiali a coefficienti interi) sono numerabili, cioè hanno tutti la cardinalità Aleph(zero). Poi, nel 1874, provò che i numeri reali avevano una cardinalità superiore, che egli chiamò "del continuo". Provò ancora un teorema che ci tocca da vicino, cioè che c'è un numero cardinale transfinito più piccolo degli altri (il nostro Aleph(zero), infinito numerabile) e che ogni numero transfinito ha un successore. A questo punto si trattava di definire quale Aleph era il Continuo,  $\mathfrak{C}$ . Fece l'ipotesi, che non riuscì a provare, che il Continuo avesse cardinalità Aleph(uno), nel senso che non esistevano numeri transfiniti tra Aleph(Zero) e  $\mathfrak{C}$ .



*Una vecchietta intenta a fare la calza lì vicino strillò con voce acuta: Ma questa è l'ipotesi del continuo, il problema numero uno di Hilbert! Lo sanno tutti! Non si può dimostrare se sia vera o falsa! come il quinto postulato di Eucl... (Il capotreno la imbavagliò e la portò subito via, perché il suo strillo aveva perturbato l'ambiente semi-silenzioso del treno, e spaventato un criceto che una ragazza, che le era seduta accanto, portava in una gabbietta).*

FILIPPO: Poverina, dopotutto ha ragione. Credo che possiamo avere due universi matematici, uno in cui l'ipotesi è vera, e uno in cui è falsa. Un esempio di ipotesi non decidibile.

GIANFRANCESCO: Ma non si è ancora certi di questo. La soluzione, per quello che ne so, è solo parzialmente accettata. Ma ho almeno una soddisfazione.

FILIPPO: Cioè?

GIANFRANCESCO: Che l'ipotesi del continuo non c'entra niente col problema  $x+1=x$ .

A me basta dire che negli assiomi dell'aritmetica dei numeri transfiniti, l'addizione è commutativa, cioè, dati due insiemi  $\kappa$  e  $\mu$ , almeno uno dei quali infinito, abbiamo  $\kappa + \mu = \mu + \kappa$ . Inoltre  $\kappa + \mu = \max(\kappa, \mu)$ , dove per massimo si intende il numero cardinale più alto.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Cardinal\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Cardinal_number)

In conclusione, **per qualsiasi Aleph della serie abbiamo che  $Aleph(n)+1 = Aleph(n)$** . Ma anche  $Aleph(n)+2 = Aleph(n)$  eccetera. Abbiamo altre infinite soluzioni.

FILIPPO: Da riempire il muro da Milano a Monza.

GIANFRANCESCO: E oltre.

LEOPOLDO: A me fuma la testa.

FILIPPO: Non salta fuori anche un paradosso di Hilbert, con questo sistema? Quel famoso albergo con infinite stanze tutte occupate da  $x = \infty$  clienti, in cui puoi infilare tanti altri clienti quanti vuoi, per cui  $1$  o  $2$  o  $3$  ... +  $\infty = \infty$ . Soluzione  $x+1$ , o  $x+2$ , o  $x+3$  eccetera  $= x$ , se  $x = Aleph(\text{zero})$ .

[https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s\\_paradox\\_of\\_the\\_Grand\\_Hotel](https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_paradox_of_the_Grand_Hotel)

LEOPOLDO: (*sbadiglia*) Ci risiamo.

GIANFRANCESCO: Ci risiamo, è un altro modo di guardare ai soliti numeri. E il paradosso è un paradosso veritiero, diversamente da quello di Achille e relativa tartaruga, che vuole provare un risultato palesemente falso. Questo paradosso è basato sul fatto che ogni sottoinsieme infinito di un insieme con cardinalità transfinita può avere la stessa cardinalità.

LEOPOLDO: Ah sì? Non ci si muove di lì?

GIANFRANCESCO: Ma pensaci un istante. I numeri pari quanti sono? Infiniti (anche perché ogni numero pari è il doppio di un numero naturale). I numeri dispari, quanti sono? Infiniti (anche perché ogni numero dispari è un numero pari -1). E quindi la totalità dei numeri naturali, l'infinito  $\infty$  per eccellenza, pari più dispari, è  $\infty + \infty = \infty$ , non è neppure  $2\infty$ . Anche qui, tutto va bene perché siamo sempre nel campo degli infiniti numerabili, Aleph(zero). In altre parole, ci sono infiniti modi di mettere infiniti ospiti in un albergo con infinite stanze, numerando le stanze in modo da lasciarne infinite vuote. Per esempio, possiamo mettere gli infiniti ospiti originali nelle stanze pari, e abbiamo tutte le stanze dispari libere per altri infiniti ospiti. E si possono trovare soluzioni, che ti lascio cercare (cenno: prova a usare i numeri primi...), se infiniti alberghi con infiniti ospiti bruciano tutti tranne uno: bene, potrai sistemare tutte le infinite di infiniti ospiti in quell'unico albergo che ti è rimasto. È perché si tratta di infiniti tutti numerabili, tutti Aleph(zero). In altre parole, il paradosso di Hilbert sfrutta solo Aleph(zero) e lascia in pace l'infinità di altri Aleph.

FILIPPO: Senti, mi hai convinto. *Dichiaro solennemente che esistono modi di dare un significato, e soluzioni, all'equazione  $x+1 = x$ , a meno di volersi limitare ai numeri reali classici (non estesi).*

LEOPOLDO: (*farfuglia*) Chi dichiara? Che cosa? (*si addormenta del tutto a questo punto*).

GIANFRANCESCO: (*a Filippo*) Ma non devi mica accontentarti così presto.

FILIPPO: (*borbotta*) Non mi pare mica presto. Ci sono ancora altri modi?

GIANFRANCESCO: Ma sì, caro. Abbiamo solo parlato dei numeri *cardinali* transfiniti. Ma dobbiamo considerare ancora gli *ordinali* transfiniti, e poi i numeri *iperreali* (Robinson, 1966), e poi i numeri *surreali* di Conway (introdotti da un dialogo ameno di Knuth del 1974, caso unico nella storia della matematica. Mi domando come si possano scrivere dialoghi ameni sulla matematica).

FILIPPO: Non puoi mica riassumere?

[https://en.wikipedia.org/wiki/Ordinal\\_arithmetic](https://en.wikipedia.org/wiki/Ordinal_arithmetic)

GIANFRANCESCO: Sarà bene che mi sbrighi, perché pare che stiamo ripartendo. La prima cosa da sapere è che un numero ordinale viene identificato dando la successione dei numeri che lo precedono. Il primo numero ordinale transfinito che si trova è  $\omega$ , dato dalla successione  $(0 < 1 < 2 < 3 < 4 \dots$  fino all'infinito), in cui l'ordine è definito dal fatto che ogni numero è maggiore del precedente. Si tratta di tutti i numeri naturali. Per fare la somma  $\omega + 1$  occorre mettere **dopo**  $\omega$  una copia dell'ordinale  $1'$ , che identificheremo come  $(0')$  ottenendo  $(0 < 1 < 2 < 3 < 4 \dots < 0')$ . La successione non continua dopo  $0'$ , ma si può dire che è maggiore di  $\omega$ , poiché viene dopo e la successione è per ipotesi crescente. Viceversa, la somma  $1 + \omega = (0 < 0' < 1' < 2' < 3' \dots)$ , la quale, rinumerando i vari termini, riproduce  $\omega$ . L'operazione somma, quindi, non è commutativa, e, mentre  $1 + \omega = \omega$ , si ha che  $\omega + 1$  non è

uguale a  $\omega$ , ma è un numero maggiore di  $\omega$ , e quindi, nella formula  $x+1=x$ ,  $x$  non è uguale a  $\omega$ . È raro che l'addizione non sia commutativa, ma sta di fatto che l'addizione di ordinali transfiniti non lo è. Non ci occorre andare più oltre; siamo, per così dire, sulla spiaggia dell'oceano degli ordinali transfiniti, ma ai nostri scopi è sufficiente.

FILIPPO: Va bene, quindi  $\omega$  non è una soluzione.

GIANFRANCESCO: Non in quell'ordine.  **$1+x=x$  ha per soluzione  $\omega$ ;  $x+1=x$  non ha soluzione nel sistema dei numeri ordinali transfiniti.** Ma chissà se chi ha scritto il graffito vuole la soluzione di  $x+1=x$ , in quel preciso ordine, o la cosa gli è indifferente. In quanto ai numeri cosiddetti iperreali e surreali....., ma il treno sta arrivando in stazione!

FILIPPO: Peccato!

GIANFRANCESCO: Non prendertela; in entrambi i casi (qualunque cosa siano i numeri iperreali e i numeri surreali) viene utilizzata la regola che – sotto determinate condizioni - *una proposizione valida nel campo dei numeri reali deve valere anche nel campo dei numeri iperreali (che ha gli infinitesimi come punto di partenza) e surreali.* Poiché  $x < x+1$  nel campo dei numeri reali, la proposizione resta valida negli altri due sistemi di numeri, e quindi, come è scritta, **l'equazione  $x=x+1$  non ha soluzione, perché anche  $\infty$ , che viene trattato come gli altri numeri in entrambi i sistemi di numeri citati, è minore di  $\infty +1$ .** Leibniz fu un poco il padre di tutto questo (e il cardinale Niccolò Cusano fu il nonno, insieme a Kepler), quando dichiarò che *“tutto quello che succede al finito, succede anche all'infinito”* (Legge di Continuità).

*Il treno si arrestò a questo punto nella stazione di Monza.*

FILIPPO: Bene, adesso mi hai steso del tutto. Vediamo se riusciamo a svegliare Leopoldo e a farlo scendere.

*Non fu facile. Ma notarono che il criceto, ora che la vecchietta era lontana, si era messo a fare girare allegramente la sua ruota guardandoli fisso.*

GIANFRANCESCO (*guardando l'ora sull'orologio della stazione*) Intanto dovevamo arrivare alle 8 e sono le 9:30. Ma quel criceto e questo orologio mi hanno dato un'idea. Se arrivassimo domani mattina, arriveremmo magari a tempo, perché  $8+24 = 8$  (Modulo 24). Potremmo pensare di dividere tutto per 24, e avremmo  $1/3+1= 1/3$ , e quindi ogni  $x$  compreso fra 0 e 1 risolverebbe l'equazione  $x+1=1$ . Ma, ti chiedo, come tratteremmo il modulo, che, per quanto ne so, si applica solo ai numeri interi?

FILIPPO: Non chiedere a me!

GIANFRANCESCO: Ti confesso che non ne ho idea. Me ne è venuta allora un'altra. Facciamo l'ipotesi che tutti i nostri calcoli siano fatti “modulo 1”. Questo significa che tutti i numeri interi divisi per 1 danno resto 0. Quindi se il nostro maligno pittore di graffiti ha sottinteso, o le intemperie hanno cancellato, la frase **“In aritmetica Modulo1.....”** allora

qualsiasi intero  $x$  va bene. Perché  $5 + 1 = 6 = 5$  se tutto è preso Modulo 1, dando 0 in entrambi i membri. **Quindi, in aritmetica Modulo 1, ogni intero  $x$  è soluzione di  $x+1=x$ .** Dovremmo leggere:  $x$  intero, Mod 1 (eguale 0) + 1 intero, Mod1 (totale 0) =  $x$  intero Mod 1 (totale 0). Nota che in questo tipo di aritmetica modulare si esclude il modulo 0, per quel che ho visto, ma non il modulo 1, che produce 0 per tutti i numeri. Anche il programma MATHEMATICA esegue il calcolo senza protestare.

Adesso che ci penso, questo risultato di MATHEMATICA mi ha appena dato un suggerimento: se  $x$  è un numero compreso tra 0 e 1, allora  $x \text{ Mod } 1 = x$ . Così dice MATHEMATICA. Sembra dunque che nella nostra equazione  $8+24=8 \text{ Mod}24$  dobbiamo dividere per 24 anche il Modulo.  $1/3+1=1/3 \text{ Mod}1$  ! Non ti sembra che si possano riassumere tutte le congruenze nel segmento  $(0,1) \text{ Mod}1$ ? Quindi non solo ogni intero Mod 1 sarebbe soluzione di  $x+1=x$ , ma anche ogni numero reale! MATHEMATICA ti dice che  $(\pi + 1) \text{ Mod } 1 = \pi \text{ (Mod}1)$ .

FILIPPO: Non son sicuro che sia lecito, ma è un'idea, e dopo tutto sembra funzionare. E del resto, come dice un celebre paradosso, "come posso riconoscere che un'affermazione è vera se non conosco già la verità?".

GIANFRANCESCO (a Leopoldo): A proposito, sai qual era il nome di Monza in latino medioevale?

LEOPOLDO: No.

GIANFRANCESCO: Era *Modoetia*.

LEOPOLDO: To', si impara sempre qualcosa.

FILIPPO: Non son sicuro che sia lecito, ma è un'idea, e dopo tutto funziona. E del resto, come dice un celebre paradosso, "come posso riconoscere che un'affermazione è vera se non conosco già la verità?".

GIANFRANCESCO: A proposito, sai qual era il nome di Monza in latino medioevale?

FILIPPO: No.

GIANFRANCESCO: Era *Modoetia*.

FiLIPPO: To', si impara sempre qualcosa.

*Il criceto li salutò da lontano agitando una zampetta, con un'espressione vagamente ironica: che fosse stato ad ascoltarli?*

**NOTA:** A parte Leopoldo, che è il nome proprio del grande nemico di Cantor, Kronecker, gli altri due nomi sono i nomi propri di due personaggi di un altro ben più illustre dialogo, ma è un puro caso.