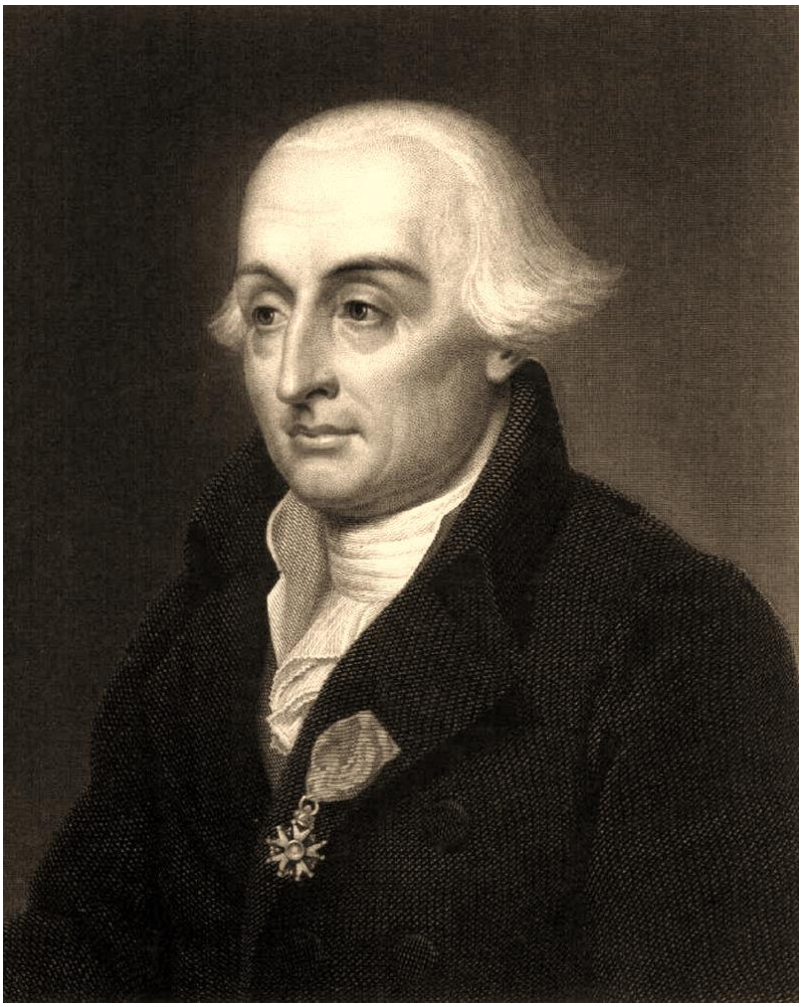
I CINQUE PUNTI DI LAGRANGE IN TERMINI SEMPLICI

Parte I: PRESENTAZIONE INTUITIVA SENZA EQUAZIONI

Parte II: PRESENTAZIONE CON QUALCHE SEMPLICE EQUAZIONE

Questa è l'elaborazione di una risposta a una domanda, che è apparsa su Quora (inglese): "In parole povere, qual è il concetto di punti lagrangiani? -In layman's terms, what is the concept of Lagrangian points?". La mia risposta in inglese è già su questo sito (http://dainoequinoziale.it/scienze/scienze-generali/2019/05/09/laylagrange.html)



Giuseppe Luigi Lagrange (Torino, 1735-Parigi, 1813)

DEFINIZIONE (https://it.wikipedia.org/wiki/Punti_di_Lagrange):

Nel "problema dei tre corpi » (https://it.wikipedia.org/wiki/Problema_dei_tre_corpi), i ***punti Lagrangiani o di Lagrange****, tecnicamente chiamati* ***punti di oscillazione****, sono quei punti nello spazio in cui due corpi dotati di grande massa, tramite l'interazione della rispettiva forza gravitazionale, consentono ad un terzo corpo dotato di massa molto inferiore di mantenere una posizione stabile relativamente ad essi. In un sistema planetario ciò comporta che un piccolo oggetto (come un satellite o un asteroide), il quale condivide la stessa orbita di un pianeta e posizionato in un punto di* ***Lagrange****, manterrà costanti le distanze fra i corpi celesti maggiori (la stella e il pianeta con cui condivide l'orbita). Perché ciò accada, la risultante delle accelerazioni gravitazionali impresse dai corpi celesti all'oggetto, deve essere esattamente l'accelerazione centripeta necessaria a mantenere in orbita l'oggetto a quella particolare distanza (dal corpo celeste più grande), con la stessa velocità angolare del pianeta più piccolo.*

PERCHÉ PUNTI LAGRANGIANI?

Il nome deriva da **Joseph Louis Lagrange** (anche **Lagrangia, Lagrange, de Lagrange,** siccome il suo bisnonno paterno era francese), nato nel 1736 a Torino, in via dei Conciatori n. 29 (ora Via… Lagrange), allora capitale del Regno di Sardegna. Nel 1758 fu uno dei co-fondatori della futura "Accademia Reale delle Scienze di Torino". Lasciò la sua città natale a trent'anni, rimase 21 anni a Berlino come presidente dell'Accademia delle Scienze prussiana, degno successore di Eulero. Nel 1787 si trasferì a Parigi e rimase in Francia fino alla fine della sua vita. Nel 1792, in seguito al matrimonio con la Francese Françoise-Adélaide Le Monnier, acquisì la cittadinanza francese. Morì a Parigi nel 1813 ed è sepolto nel Pantheon.

Lagrange fu uno dei massimi matematici della fine del XVIII secolo e apportò contributi significativi ai campi dell'analisi, della teoria dei numeri, della meccanica classica e celeste e della fluidodinamica.

INTRIODUZIONE.

Vorrei fare un tentativo, di dare un'idea di quali siano i cinque punti lagrangiani della meccanica celeste, senza usare una sola formula di matematica o fisica (a parte la Fig.2, che non conterei come equazione). Se dovessi riuscire, non vorrei creare illusioni. È un caso particolarmente favorevole, se l'idea principale dei punti lagrangiani può essere presentata in qualche modo senza ricorrere a una matematica avanzata. Però non si può dimenticare che, come scrisse Galileo, il linguaggio del libro della Natura è la matematica: senza matematica, può esserci solo una conoscenza approssimativa della Natura, basato sulla memoria e/o su argomenti vaghi.

Per completezza, scriverò in annesso, come note al testo, nella **Parte II** le equazioni di base e ulteriori spiegazioni (a livello di matematica e fisica delle scuole superiori, con qualche risultato – non peraltro ricavato - di livello universitario).

PARTE I.

I. Un'analogia: un campo di battaglia come un campo vettoriale (il Campo di Fuga, F-Campo).

Consideriamo una ristretta porzione di un campo di battaglia della fanteria della prima guerra mondiale. È una " terra di nessuno", dove sono state combattute battaglie precedenti. Sulla destra, ci sono i soldati Blu, con una fila di mitragliatrici nascoste, indicate come brevi linee blu (M). I soldati Bianchi, ignari delle mitragliatrici, avanzano da sinistra a destra, abbandonando la loro linea di sicurezza, che si trova su A. Sul campo di battaglia, che dovrebbe essere sostanzialmente piatto, ho messo un bunker (B) appartenente ai Bianchi, due cocuzzoli (C, D), un cratere creato da una bomba (E), una vecchia trincea abbandonata (T) davanti alle mitragliatrici. Una volta che i Bianchi arrivano ben oltre la trincea, vicino alla linea di mitragliatrici, queste aprono il fuoco.

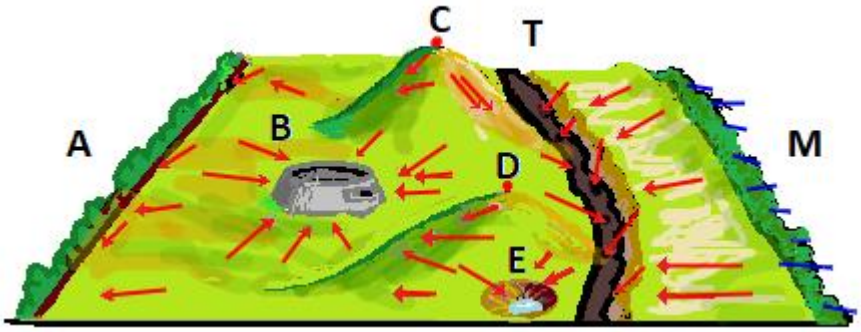


Fig.1

Una “terra di nessuno” nella prima guerra mondiale. La distanza dalla linea A alla M è di circa 500 m. I Bianchi avanzano da sinistra a destra, ignari della linea di mitragliatrici M. Quando la prima

linea dei Bianchi si trova a meno di 100 m da M, le mitragliatrici aprono il fuoco. I bianchi corrono al riparo.

A questo punto i bianchi corrono al riparo. Possiamo mettere sulla mappa delle piccole frecce che indicano cosa farebbe un soldato bianco se fosse esattamente nel punto in cui disegniamo la coda della freccia. Faremo la convenzione che la lunghezza della freccia indichi la velocità con cui correrebbe il soldato. Ora, per quanto il soldato possa correre in qualsiasi direzione, presto si svilupperà uno schema. Sicuramente scapperebbe dalle posizioni esposte, specialmente quelle davanti alle mitragliatrici. Se il soldato è in prima linea, tra la trincea e le mitragliatrici, senza dubbio correrà verso la trincea, sperando di raggiungere la linea amica (A) più tardi. Molto probabilmente, se gli fosse data una possibilità, si dirigerebbe verso il bunker (B) come il posto più sicuro (generalmente un bunker è l'ingresso di una struttura sotterranea, e possiamo sperare che i Bianchi abbiano avuto abbastanza buon senso da mettere l'entrata nel bunker di fronte alle loro linee). Un soldato potrebbe rimanere lì permanentemente. Oppure potrebbe gettarsi nel cratere della bomba (E), ma cercherebbe di scapparne, perché i Blu potrebbero chiamare in azione dei mortai e il posto potrebbe diventare pericoloso.

Chiameremo lo schema di tutte le frecce nel campo “Campo di Fuga” o F-Campo. Se un fisico dovesse guardare il diagramma senza sapere a cosa si riferisce (si immagini una mappa con le sole frecce, senza tutti i piccoli disegni a colori per spiegare di che cosa si tratta,) vedrebbe solo una freccia disegnata in ogni punto e direbbe che il diagramma rappresenta un "campo vettoriale". Questo è il minimo che potrebbe dire. In meccanica classica, infatti, dalla metà del XIX secolo i vettori sono rappresentati da frecce. ”Vettore” è una parola abbastanza generica per indicare qualsiasi “grandezza”, che ha una dimensione, una direzione e un verso. Gli spostamenti sono vettori, le velocità sono vettori, le accelerazioni sono vettori, le forze sono vettori e molte altre grandezze fisiche sono vettori. Ci sono anche grandezze fisiche più complesse che non sono vettori, ma qui non ce ne occuperemo. Se volessimo disegnare tutte le frecce, il diagramma diventerebbe presto un groviglio inestricabile, anche perché su un piano, un vettore ha due componenti (positive o negative), nello spazio ne ha tre, come in Fig. 2. Nel presente esercizio, ci limiteremo ai campi a due dimensioni, 2D.

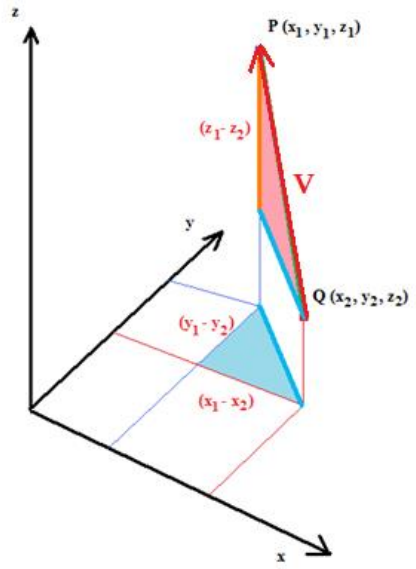


Fig.2:
Un vettore è disegnato come una freccia e ha tre componenti in uno spazio 3D (triangolo rosso) e due in un piano 2D, della forma x (1) -x (2), y (1) -y (2) , [z (1) -z (2)]. Il segno delle componenti è dato dal senso del vettore (punta della freccia meno coda).

Ora possiamo chiedere: C'è un "metodo" nello F-Campo? C'è qualche ragione per cui qualsiasi soldato posto in un certo punto, in media correrebbe in una certa direzione con una certa velocità? In quale direzione un soldato correrà da un punto determinato? Sul posto, molti pensieri, sentimenti, impulsi istintivi, ecc. potrebbero portare a una scelta più o meno irragionevole, ma una breve riflessione rivela che *l'obiettivo dominante, oggettivo, comune a tutti, è quello di fuggire al più presto da una posizione di "pericolo elevato" a uno di "basso pericolo"*. È come l'acqua, che, lasciata a sé stessa, passa dalle posizioni di alta quota a quelle di bassa quota. O come una biglia su una superficie non piana e soggetta alla forza di gravità, che scende dall'alto al basso. O come una positiva carica elettrica positiva, che va da un punto di alto potenziale elettrico a un punto di potenziale più basso. Per i "campi vettoriali più semplici" ("campo semplice" è un'espressione vaga, che i fisici hanno perfezionato **(1)**) si può sempre semplificare il problema creando un nuovo campo, la "madre" del **campo vettoriale F**, in cui il problema della direzione e della velocità di "dove andare", cioè la lunghezza, la direzione e il senso del vettore di fuga, sono tutti determinati da una mappa in cui un singolo numero, una sorta di altezza o "altitudine", è assegnato a ogni punto, e *il "movimento naturale" sarà sempre dai punti di maggiore altitudine ai punti di bassa quota nel modo più veloce*, cioè seguendo il cammino più ripido. Eulero (1707-1783), usò per questo numero il nome latino di "**Altitudo**" (= altezza). Al giorno d'oggi si usa il nome generico di "**Potenziale**" **(2).**

II. L'analogia continua: un campo di battaglia come un campo "potenziale" (il campo P).

La considerazione che abbiamo appena fatto può suggerire che disegniamo un diagramma più semplice. Invece dell'intricato campo vettoriale, potremmo escogitare un altro diagramma per lo stesso campo di battaglia, di un nuovo campo, che chiamiamo campo "PERICOLO" o **P-campo.** Ad ogni punto del campo di battaglia viene quindi assegnata un'altezza (su scala appropriata) proporzionale al "pericolo", che minaccia il soldato bianco se rimane lì, e noi supponiamo che i

soldati, come ho appena scritto, scappino naturalmente dalle regioni di alto pericolo a quelle di basso pericolo. Il pericolo è alto vicino alle mitragliatrici (M) e sulle due posizioni elevate (C, D), ma dietro a C e D il pericolo scende a valori molto bassi. La trincea (T) ha bassi valori di pericolo e mostrerebbe nel nostro diagramma "Campo D" una profonda concavità. Lo stesso sarebbe vero per il cratere della bomba (E). Il bunker (B) potrebbe apparire come un buco senza fondo, il punto di pericolo più basso. Potremmo chiamarlo un punto di "attrazione".

Disegnare il nuovo campo è un bel vantaggio, perché nel campo P assegniamo ad ogni punto un singolo valore, l'altitudine, mentre nel campo F avevamo bisogno di due o tre valori per ogni punto, cioè i valori dei due o tre componenti del vettore associato a quel punto (fig.2), rispettivamente in due dimensioni e tre dimensioni. Per un campo vettoriale planare, invece del complicato schema di frecce bidimensionali, potremmo costruire un paesaggio pulito, con colline (astratte) e depressioni, e sarebbe facile dedurre in quale direzione e con quale velocità un soldato correrebbe o dovrebbe correre se si trovasse in qualsiasi pnto del P-campo. Si dovrebbe solo osservare quanto è ripida la buca o la collina e trovare il percorso di massima pendenza. Si noti che i soldati, che all'apertura del fuoco si trovano sulla cima di uno dei due punti più alti (C, D) di fronte alla mitragliatrice, hanno due opzioni principali: o correre dietro il piccolo cocuzzolo o gettarsi nella trincea. Dietro i due cocuzzoli, abbiamo così le due piccole "depressioni", "c" e "d" di pericolo inferiore (qualche pericolo può ancora provenire da tiri di fianco). Se quando le mitragliatrici incominciano a sparare un soldato Bianco viene sorpreso in cima a uno dei due punti più alti, allora sa che deve allontanarsi il più velocemente possibile, ma potrebbe essere indeciso sulla direzione da prendere, se verso la trincea o dietro il cocuzzolo, e potrebbe essere bloccato lì per pochi secondi fatali. Potremmo chiamare i due punti che ho segnato in rosso sulla sommità dei cocuzzoli C e D due punti "di equilibrio instabile".

È immediato osservare che ciò che conta sono solo le differenze di elevazione, non le elevazioni stesse. Il nostro campo di battaglia potrebbe essere un altopiano a 2000 m, come spesso fu sul fronte italo-austriaco nella prima guerra mondiale, o appena sopra il livello del mare, come fu nelle Fiandre durante la stessa guerra.

Un matematico ne concluderebbe, piuttosto pomposamente, che "il Potenziale è sempre definito a meno di una costante additiva".

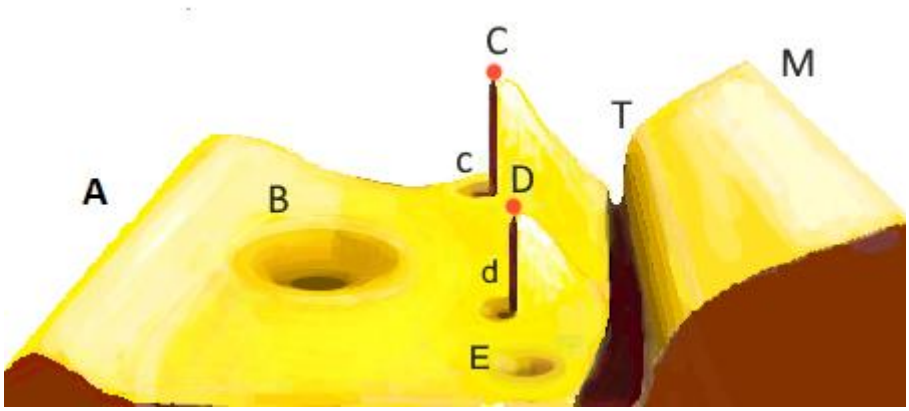


Fig.3
Il campo P relativo al campo F di figura 1
Le discontinuità dietro ai cocuzzoli C e D sono visibili, così come le zone a basso pericolo c, d: non appena un soldato si nasconde dietro il cocuzzolo, è al sicuro dal fuoco M, anche se tiri laterali possono ancora raggiungerlo.

Un matematico potrebbe studiare il diagramma astrattamente e dare indicazioni ai soldati Bianchi, urlando o in qualche altro modo. Ma, come ho detto, ciò che conta è che si può facilmente passare dal campo P, una mappa in cui a ogni punto è assegnata un'elevazione, al campo F, in cui a ogni punto viene assegnata una freccia. Ancora meglio: si può pensare di realizzare un modello 3D in legno o in gesso del campo P. Quindi, se si mette una biglia in un punto del modello 3D, essa scivolerà nelle regioni di pericolo più basso, come dovrebbe fare un soldato Bianco. Ad esempio, una biglia in C o D ci resterebbe (probabilmente per poco tempo) in equilibrio instabile, proprio come un soldato indeciso se deve correre in c o in T.

III. Il Potenziale, più in generale.

Certo, i soldati potrebbero avere varie ragioni, giuste o sbagliate, per non seguire le frecce "ideali" e non andare nei luoghi di pericolo più evidenti. Così sia. Abbandoniamo i nostri soldati al loro destino, augurando loro buona fortuna, e spostiamoci verso il cielo rarefatto della meccanica classica, che **Leonardo da Vinci** definì come "Il paradiso delle scienze matematiche". La meccanica celeste tratta argomenti "più semplici", con oggetti non dotati di libero arbitrio e cerca di dare soluzioni matematiche. Ad esempio, le frecce potrebbero rappresentare le forze e, invece del campo Fuga, avremmo un campo Forza. Ma, come abbiamo fatto per il campo F, possiamo costruire un campo le cui pendenze punto per punto sono le forze. Il nostro "campo P", in meccanica classica, diventerebbe un "campo di potenziale". Dedurre le forze del vettore dal potenziale non è un affare troppo complicato. *Tuttavia, come ho promesso, non avremo nemmeno bisogno neppure di quel semplice calcolo. I punti lagrangiani che stiamo cercando sono punti di equilibrio, dove la forza netta totale è zero, e di conseguenza, la pendenza è zero, come alla cima dei cocuzzoli C e D, nel diagramma P.*

IV. I problemi dei tre corpi. La ricerca di una soluzione generale.

Nel XIX secolo, due problemi nella meccanica analitica si rivelarono così difficili che tutti i grandi matematici ci si misero alla prova - Erano:
1) Trovare la soluzione generale per il moto di un corpo rigido. Una soluzione generale non fu mai trovata. Esistono soluzioni complete solo per una manciata di casi particolari. Ma il movimento del corpo rigido qui non ci riguarda.
2) Trovare le orbite di tre corpi che si attraggono reciprocamente sotto la legge di gravitazione universale, usata da Newton (il “problema dei tre corpi”.) Una soluzione generale non fu mai trovata **(3).** Sembra che di orbite a lungo termine non ne siano state

trovate neppure dalla stessa Natura. Forse non esistono. Tuttavia, i metodi numerici possono aiutare a breve termine.

Ironia della sorte, un secolo e mezzo fa i due problemi presentavano un interesse puramente accademico e nessuna evidente interrelazione. Tuttavia, con l'avvento dell'era spaziale, si lanciarono satelliti artificiali, e entrambi i problemi divennero importanti nello stesso contesto. I satelliti, che dovevano effettuare lunghe osservazioni sulla Terra, o il Sole o la Luna, erano naturalmente nelle cosiddette orbite di alone (in inglese "Halo" o "aureola") intorno a tre dei punti di equilibrio (che sono appunto i Punti Lagrangiani) . Il controllo di aspetto dei satelliti, poi, è governato dalla dinamica del corpo rigido. Una discussione esauriente sull'argomento dei satelliti artificiali attorno ai punti lagrangiani è fornita in https://en.wikipedia.org/wiki/Halo_orbit; il soggetto del controllo di aspetto è presentato in https://en.wikipedia.org/wiki/Attitude_control.

Disperando di trovare soluzioni generali, matematici (e qui intendo matematici di prima classe, come **Leonhard Euler (1707-1783),Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Giuseppe-Luigi Lagrange (1736-1813),**) vedendo che non avevano modo di trovare un soluzione generale, cercarono di esaminare problemi semplificati e vedere se esistessero soluzioni per casi particolari. Eulero scoprì che c'era una soluzione in cui tre corpi allineati ruotavano sempre rigidamente attorno al loro centro di gravità. Ma la condizione era che un corpo doveva avere una massa trascurabile rispetto alla massa degli altri due corpi. Tale condizione permetteva di separare il movimento dei due corpi più grandi, che non erano perturbati dalla presenza del terzo corpo, e quindi trovare i punti di equilibrio per il terzo corpo. Non molto tempo dopo, Lagrange scoprì che nelle stesse condizioni (una massa molto più piccola delle altre due), c'erano altri due punti di equilibrio inaspettati, fuori dalla linea che unisce i due corpi più grandi. Si potrebbero posizionare satelliti in quei punti e, almeno in linea di principio, l'intero sistema ruoterebbe rigidamente come in Fig.4, o, meglio, come nella dimostrazione che si trova in https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_point.
Possiamo dire che i cinque punti lagrangiani sono punti di equilibrio del problema dei Tre corpi, in un sistema rotante, prodotto dalla rivoluzione di due corpi principali l'uno intorno all'altro, sotto l'effetto della forza gravitazionale.

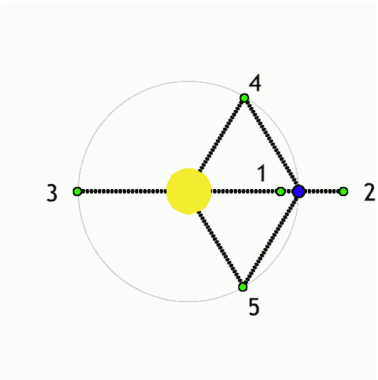


Fig.4

I cinque punti Lagrangiani (sistema Sole (giallo) - Terra(blu)).
Anynobody [CC BY-SA 3.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)]
La Fig.4 è l'inizio di un'animazione che si trova su Wikipedia, edizione inglese.

Come ho spiegato, si può rappresentare il campo di forze disegnando un nugolo di frecce. Se uno facesse questo, scoprirebbe che nei cinque punti specifici le forze totali sono nulle, il che significa che un corpo piazzato lì, ci resterebbe.

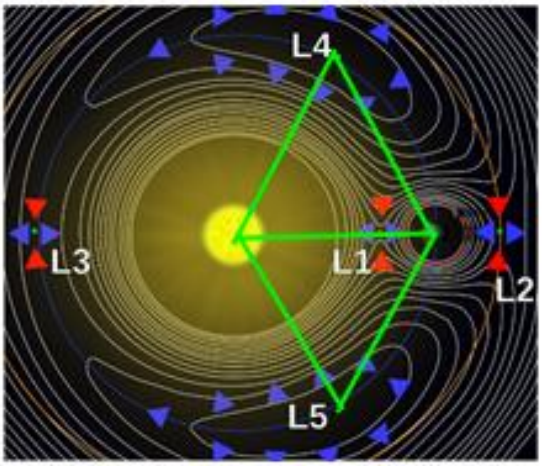


Fig. 5:
I cinque punti lagrangiani: il campo di forza (frecce blu e rosse: le frecce rosse tendono a stabilizzare il punto, le frecce blu lo destabilizzano) è sovrapposto al diagramma delle curve di livello del potenziale "effettivo", che dedurremo. Ho aggiunto i due triangoli equilateri, che citerò più avanti nel testo. Le forze rosse stabilizzano: una biglia che si allontana dal punto di equilibrio, ci viene riportata dalle forze rosse; le forze azzurre destabilizzano: esse tendono ad allontanare la biglia dal punto di equilibrio.. Ma nei punti L1, L2, L3, ci sono due sistemi di forze, le une (azzurre) che allontanano il punto dalla posizione di equilibrio e le altre (rosse) che ce lo riportano: le prime prevalgono, come si può dedurre dalla ripidità dei pozzi gravitazionali, il cui fondo non è piatto, come potrebbe sembrare a prima vista. Al contrario, le curve di livello sono talmente vicine da non potersi disegnare. Figure più chiare lo mostreranno più avanti.

Come possiamo avere un'idea di come scoprire che ci sono effettivamente 5 punti di equilibrio, che sono nelle posizioni indicate dal diagramma? Disegnare il campo di forza sarebbe un disastro. Fig.5 mostra solo la situazione che circonda i punti lagrangiani ma non garantisce che non ci siano altri punti lagrangiani. Fortunatamente, la Fig.5 mostra anche un grafico delle curve di livello del campo Potenziale, in cui - con un po' di esercizio - è facile vedere dove si trovano i punti di equilibrio. Mostrerò come costruirsi un tale campo potenziale e quale tipo di modello 3D risulterebbe, il che metterà in evidenza senza problemi i punti in cui la pendenza è zero, dai quali la biglia posta sul modello in gesso/legno non si muoverà se non sarà sollecitata da qualche perturbazione.

Ho scelto l'esempio più diretto: ciò che accade nel caso particolare di **due grandi masse uguali e una terza massa piccolissima**. La piccolezza della terza massa è **l'unica** condizione imposta da Eulero e Lagrange. Pertanto, ci aspettiamo che esistano cinque punti anche nel caso da me scelto,

di due masse maggiori eguali, e potrò mostrare su quale ragionamento si basa una soluzione accurata.

Per avere un'immagine della situazione delle "due masse", considererò prima di tutto una "massa unica". Come ho detto per il Bunker nel nostro campo di battaglia, la forza attrattiva di una grande massa è rappresentata da un profondo imbuto (in linea di massima infinitamente profondo). L'imbuto ha un profilo, che è dettato dalla legge di forza **(4).** Se si vuole avere un'idea di quale sia il "profilo" dell'imbuto dovuto alla forza gravitazionale, si può anzitutto dare uno sguardo a uno schema progettato secondo le regole in Fig. 5.

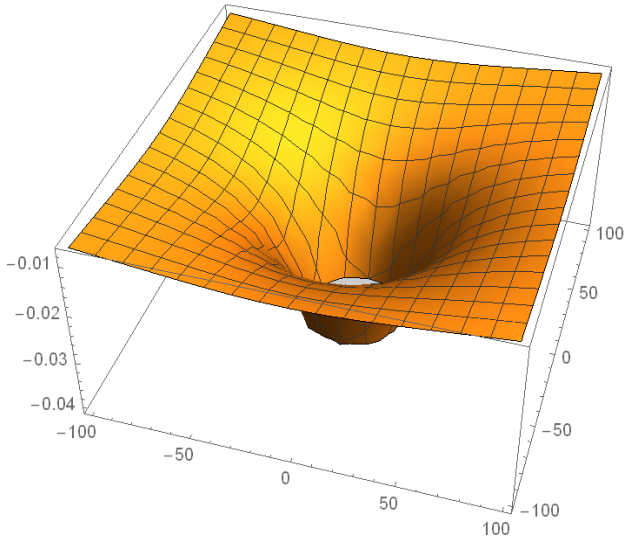


Fig.6
Il campo gravitazionale prodotto da una sola massa

Una volta data un'occhiata alla Figura 6, si può vedere una bella dimostrazione: https://www.youtube.com/watch?v=Q4sh8wY3ESE

La dimostrazione ha un valore in sé, perché, se si interroga un non-fisico, dirà che una biglia rilasciata sul bordo dell'imbuto cadrà direttamente in esso, mentre in un campo gravitazionale ci aspettiamo delle orbite Kepleriane (prima legge di Keplero (1609): *L'orbita di un pianeta è un'ellisse con il Sole in uno dei due fuochi.*) La risposta del non-fisico è corretta solo se la biglia non ha velocità iniziale. Tuttavia, se essa ha una velocità iniziale, non diretta verso la massa responsabile dell'attrazione, che noi supporremo puntiforme, appariranno le orbite Kepleriane. Inoltre, il moto su tali orbite continuerebbe all'infinito: se la dimostrazione invece ha un termine, è semplicemente perché c'è attrito, che rallenta il movimento della biglia e complica le cose. C'è una ragione molto profonda per cui, se solo non ci fosse attrito, la biglia dovrebbe orbitare indefinitamente senza cadere nel fondo della fossa, pur orbitando pericolosamente vicino ad essa: il suo "momento angolare" deve essere conservato. Perché? Sfortunatamente, qualsiasi considerazione relativa al momento angolare tende a diventare subito piuttosto complicata, e ne lascio un semplice accenno a una nota nella Parte II **(5).**

Lasciando da parte questo argomento complesso, su cui non mi soffermerò più del necessario, torniamo ora alla situazione in cui poniamo due masse su un piano. Se le due masse sono abbastanza vicine, creiamo la situazione di Fig.7.

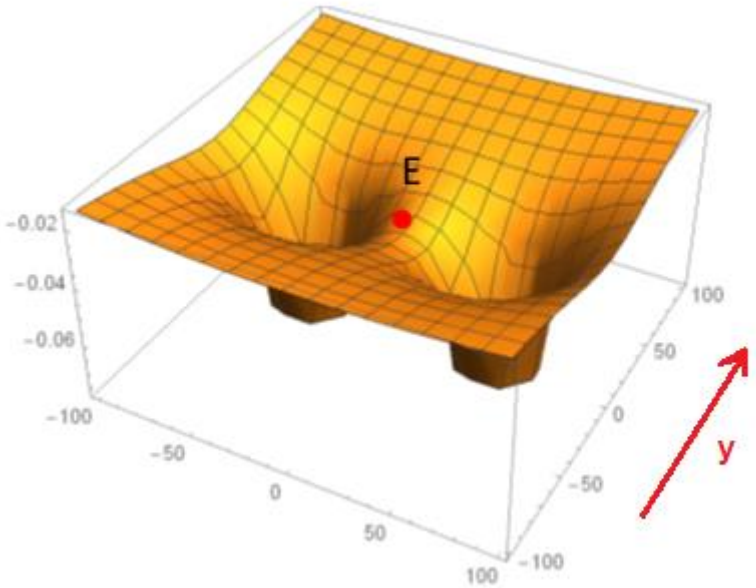


Fig.7
Il campo gravitazionale generato da due masse uguali. Appare un punto di equilibrio instabile (E).

Una piccola massa, una biglia che parte da quasi tutti i punti del plastico, cadrà in uno dei due imbuti, con una eccezione: vediamo che tra i due imbuti, c'è un punto con una tangente orizzontale e zero pendenze, cioè un punto di equilibrio. Tale punto, che è un *minimo nella direzione y* e un *massimo nella direzione ortogonale*, è un punto di equilibrio instabile e, come suggerisce la sua forma, è chiamato "punto sella". È un punto di equilibrio instabile, nel senso che sarebbe un problema posizionare una vera biglia in quel punto, perché tenderebbe a cadere in uno dei due imbuti. Tuttavia, con un po' di pazienza, ci si potrebbe riuscire, a condizione di mantenere il sistema perfettamente immobile e di non toccare più la biglia. Non sorprendentemente, purché il lettore creda nei nostri diagrammi, mentre non c'è alcun punto di equilibrio nell'intero piano, se c'è un'unica massa gravitazionale, otteniamo un punto di equilibrio se ci poniamo due masse. Si potrebbe pensare che aggiungendo la terza massa sulla stessa linea, otterremmo due punti di equilibrio. Tuttavia, non ci è permesso pensarlo (anche se il risultato sarebbe vero). La soluzione di Lagrange è valida solo se la terza massa è così piccola da non provocare un imbuto percettibile sul piano.

Pertanto, dovremmo chiedere, dove sono gli altri quattro punti (Eulero-) di Lagrange?

Il fatto è che noi abbiamo trovato un solo punto di equilibrio perché abbiamo posizionato le due masse in un sistema di riferimento fisso. Tuttavia, sappiamo che due masse si attrarrebbero l'un l'altra per effetto della gravitazione. Possono restare attaccate l'una all'altra e sedersi lì, in linea di principio per sempre, un evento raro, perché in partenza entrambe le masse dovrebbero essere a riposo o in direzione di collisione frontale. Altrimenti, per la già menzionata conservazione del

momento angolare, se le due masse sono libere di muoversi, la meccanica classica ci dice che, in generale, ruoterebbero attorno al loro centro di massa. Il caso più semplice *(non l'unico caso possibile)* è se ruotano in un'orbita circolare. Quindi, dovremmo mettere le due masse in due punti fissi, sì, ma in un sistema di riferimento rotante. Una tale operazione può essere fatta, ma a un costo, quella di sottoporle a una nuova forza, una pseudo-forza, la forza centrifuga, che non è direttamente dovuta alle due masse, ma al sistema rotante che hanno creato. È una forza come quella sperimentata dalle persone che entrano nelle giostre Rotor, popolari nelle fiere del passato **(6),** e quindi spingerà la particella di prova verso l'esterno, con accelerazione tanto maggiore quanto più lontana la particella sarà dal centro di rotazione.

Si può mostrare **(7)** che il nostro piano di un sistema di riferimento fisso diventa una cupola se il sistema ruota. La cupola (che è la rappresentazione matematica del potenziale della forza centrifuga) ha una forma particolare, che è chiamata "paraboloide di rotazione (inverso) ", ed è rappresentata in figura:

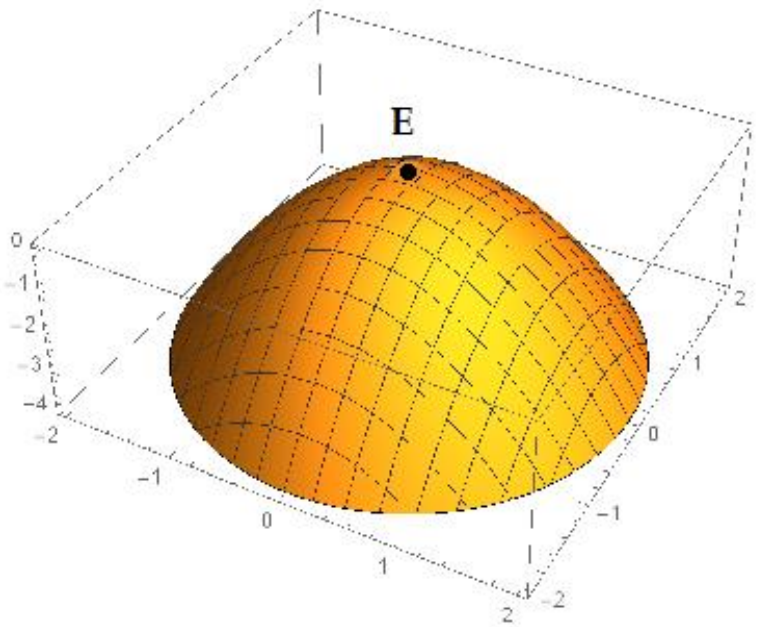


Fig. 8
Il potenziale della forza centrifuga.
Possiamo vedere che la pendenza della cupola è zero in cima alla cupola e aumenta con la distanza radiale. Il risultato è che la biglia si allontana sempre più velocemente dalla parte superiore della cupola, esattamente come una particella di prova si sposta sempre con accelerazione crescente dal centro di una piattaforma rotante : la matematica è la stessa.

Come vedremo, conoscere il nome e la forma matematica precisa della "cupola" non è drammaticamente importante, per avere un'idea ***intuitiva*** dei cinque punti lagrangiani.
Se la terza massa è molto piccola, il movimento circolare delle due grandi masse non è perturbato. La forza totale che agisce sulla massa più piccola è la forza gravitazionale delle due masse, che attira la particella verso il centro di gravità del sistema (cioè, nel caso presente di due masse eguali, a mezza via tra le due masse principali), più una forza centrifuga, che spinge la massa più piccola

lontano dal centro di gravità del sistema. Intuitivamente, ci aspettiamo punti di equilibrio dove la forza centrifuga e la forza attrattiva si equilibrano a vicenda.
I due imbuti che rappresentano le due masse principali dovrebbero quindi essere scavati nella cupola come in Fig. 8, producendo così il seguente diagramma:

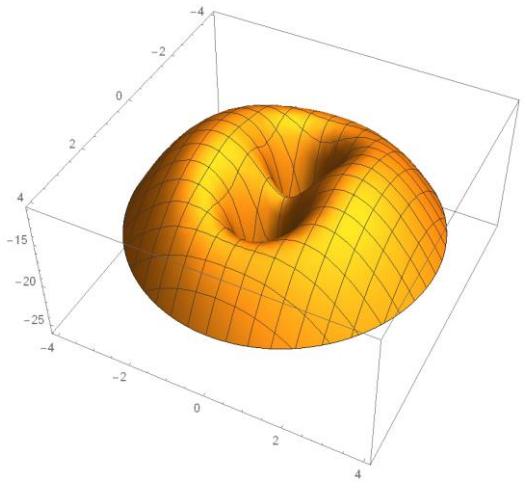


Fig.9
Due masse gravitazionali fisse in un sistema rotante.
La forza centrifuga appare come una cupola deformata dai due imbuti gravitazionali.

Le due masse sono poste nei punti (x = -1, 0) e (x = +1, 0.) Poiché le due masse dovrebbero essere uguali, si può facilmente concludere, per motivi di simmetria, che il centro di gravità è all'origine (0,0), a metà strada tra i due punti.
Come ho già annunciato, per dimostrare l'esistenza dei cinque punti lagrangiani, come vedremo, non è necessario riprodurre la forma perfetta degli "imbuti di attrazione gravitazionale" né della "cupola centrifuga". Troveremo i cinque punti lagrangiani quasi indipendentemente dalla forma precisa della cupola e degli imbuti.

Disegnando uno schema più preciso possibile **(8),** si ottiene la Fig.10:

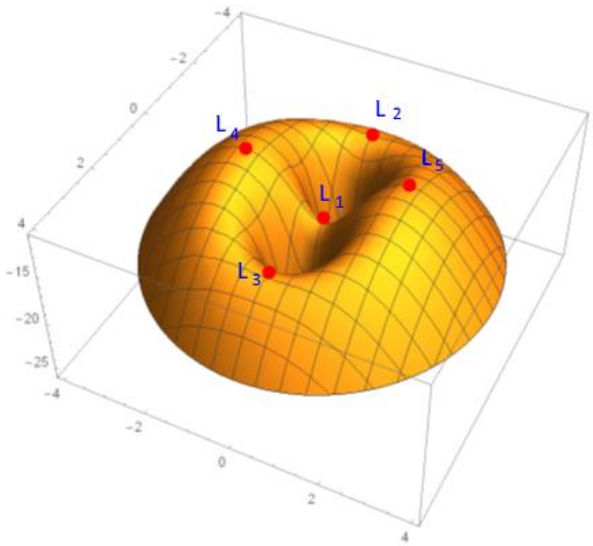


Fig.10

Come nella figura 9, ma i punti di estremo (tangente orizzontale) sono contrassegnati. Sono i 5 punti lagrangiani.

Qui, i cinque punti sono chiaramente riconoscibili e le loro coordinate possono essere lette mediante ispezione (anche grossolana) del diagramma, come segue:

1) Il punto di sella che già conosciamo tra le due masse principali (lo chiamiamo L1), ha coordinate (x = 0, y = 0);

2) Due punti di sella, non così marcati come il primo, sulla linea che unisce le due masse (sarebbe l'asse x, cioè y = 0,) uno a circa x = -2,5, l'altro all'altra estremità, x = 2.5. Li chiamiamo L2 e L3. I valori x = -2.5 e x = +2.5 vengono letti dal diagramma.

3) Due larghi (e piuttosto ripidi) massimi , uno a coordinate x = 0, y = +1.75, l'altro a x = 0, y = -1.75. Sono L4 e L5, e furono il contributo inaspettato di Lagrange. I valori y = +1.75 e y = -1.75 vengono letti direttamente dal diagramma, specialmente se è orientato come in Fig.11.

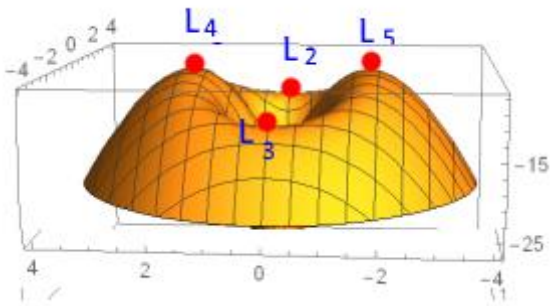


Fig. 11

Una vista che mostra i meno ovvii tra i punti lagrangiani.
La posizione dei due punti L4, L5 a circa y = 1,75 y = -1,75.
L1 è invisibile nella figura.

Ecco dunque (Fig.10) i cinque punti Lagrangiani. A prima vista, sono tutti punti di equilibrio instabile. Una biglia (una massa di prova) posta in uno qualsiasi dei cinque punti lagrangiani sembrerebbe essere in equilibrio instabile, e alla minima perturbazione potrebbe cadere in uno dei due imbuti o al di fuori della cupola. Sembrerebbe che L4 e L5, seduti in cima a due cupole simmetriche, dovrebbero essere i più instabili tra i cinque punti. Nel nostro sistema, con due masse gravitazionali eguali, è di fatto così.
Tuttavia, passando da un sistema fisso a un sistema rotante abbiamo trascurato un termine, che dipende dalla velocità della biglia, ed è chiamato il "termine (o forza) di Coriolis" **(8).**

Poiché la velocità può assumere qualsiasi valore, non possiamo creare in 3D un modello del potenziale, che includa la forza di Coriolis. Ci vorrebbero sei dimensioni e il diagramma diverrebbe estremamente confuso. Pertanto, abbiamo assunto implicitamente che la biglia o massa di prova è posta al punto L4 o L5, ferma. Il termine di Coriolis quindi non è attivo, poiché la velocità è zero. Di conseguenza, l'equilibrio è instabile. Tuttavia, appena la particella inizia a muoversi, la forza di Coriolis viene attivata e spinge la biglia in orbita vicino al punto di equilibrio, in un meccanismo simile alla formazione di un ciclone: non appena una massa d'aria si sposta verso una regione di bassa pressione, la forza di Coriolis *provocata dalla rotazione terrestre* fa ruotare la massa d'aria e si forma un vortice abbastanza stabile. Quindi, il termine di Coriolis garantisce la stabilità, ma si può dimostrare che è efficace solo se il rapporto delle masse è M (più grande) / M (più piccolo)> 25, o, più precisamente **(9):**

$$(M\ (\text{maggiore}))\ /\ (M\ (\text{minore})) \geq (25 + 3\sqrt{69})\ /2=24.9199$$

(Quando compaiono numeri come 24.9199 si capisce che la dimostrazione che ad essi ci conduce non è del tutto banale).

Ne consegue che nel caso semplice che ho esaminato, con due masse uguali, anche L4 e L5 sono punti di equilibrio instabili, come L1, L2, L3. D'altra parte, nel caso della Terra e del Sole, la massa della Terra è $3.003\ 10^{-6}$ volte la massa solare e L4, L5 sono punti di equilibrio stabili. Paradossalmente, la forza di Coriolis trasforma in due punti di equilibrio stabile i due punti lagrangiani che sembrano essere i punti dell'equilibrio meno stabile, perché sono sulla cima di una cupola e quindi instabili in tutte le direzioni, a differenza di L1, L2, L3, tre punti sella, quasi stabili in una direzione.

Data la grossolanità della rete di coordinate nei diagrammi, i valori +1.75 e -1.75 per le coordinate y di L4, L5 sono solo modeste approssimazioni. Tuttavia, se si eseguono calcoli precisi **(9),** (che ammontano a trovare i massimi, i minimi e i punti di sella della superficie)

si troverà che i valori sono +1.73 e -1.73, cioè più e meno la radice quadrata di tre. Il che significa che ognuno dei punti L4 e L5 è a una distanza √ (1 + 3) = 2 dalle due masse principali, che, a loro volta, sono a una distanza = 2 l'una dall'altra. In altre parole, L4 e L5 formano due triangoli equilateri con le due masse principali (Fig.5).

Il caso di due grandi masse rotanti uguali in un'orbita circolare attorno al loro centro di gravità non è eccezionale. Le condizioni di Lagrange richiedono solo che la terza massa sia trascurabile, se confrontata con le due grandi masse, ma non impone limiti alle dimensioni relative delle due masse più grandi. ***In tutti i casi che rispettano le condizioni di Lagrange, ci sono cinque punti lagrangiani, e, per di più, (M1, M2, L4) e (M1, M2, L5) formano due triangoli equilateri (Fig.5.) e NOTA (9).***

Ho scoperto che pochissime persone hanno una chiara idea di come i punti lagrangiani emergano dalla meccanica celeste. È divertente pensare che possono addirittura emergere dalla cucina: se si prende un panino rotondo *non cotto* e simmetrico e si infilano due dita verticalmente nella pasta, vicino alla cima, si formano due buchi profondi e abbastanza larghi (devono essere abbastanza profondi da formare il punto di sella tra di loro). Ne segue in quattro e quattr'otto un modello dei cinque punti lagrangiani. È ancora più divertente considerare che il modello ha un senso fisico perché se si mette una piccola biglia su di esso, si potranno individuare i cinque punti di equilibrio *instabili* come quelli di una massa di prova nel campo di due masse più grandi uguali (o anche non uguali).

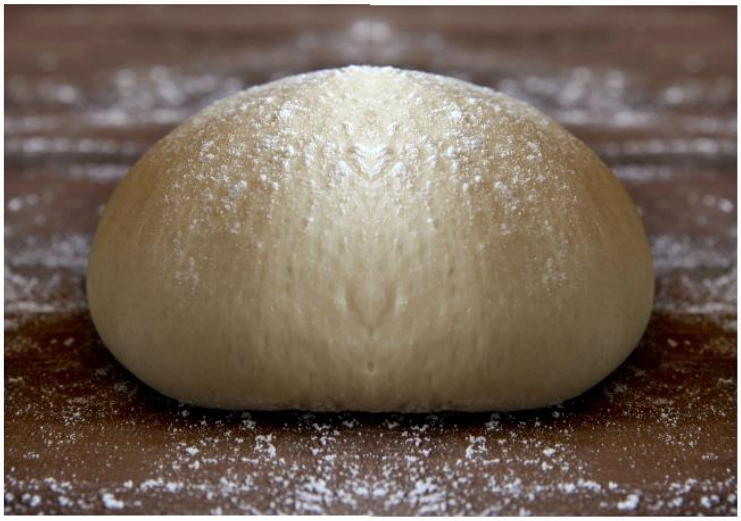


Fig.12
A round uncooked bun, ready to demonstrate the five Lagrangian points.

E con questo credo di aver dato un'idea di perché i cinque punti lagrangiani siano cinque, come si formano, e più o meno dove sono. Chi vuole avere qualche nozione in più dovrebbe leggere le NOTE in Parte II.

PART II

NOTE (livello di scuola media superiore).

(1) ***Un "campo semplice" è un'espressione vaga, che i fisici hanno raffinato ".***

Hanno anche inventato un nome appropriato: un campo "semplice" è un campo "conservativo" (e "irrotazionale"). Alcuni esempi sono riportati nella nota (2). La piena comprensione della nozione di campo conservativo richiede qualche nozione di calcolo integrale. Se si vuole saperne di più, si consulti https://en.wikipedia.org/wiki/Conservative_vector_field.

(2) Approfondimenti su "altitudo" e potenziale.

Alla fine della sua vita, Galileo aveva dimostrato, dopo la pubblicazione del suo libro *"Discorsi e dimostrazioni matematiche relative a due nuove scienze"*(1638), che corpi in caduta libera, non soggetti ad alcuna forza d'attrito, se scendono di dislivelli uguali raggiungono sempre le stesse velocità. Per Eulero, quindi, le differenze di elevazione erano trasformate in forza vitale "vis viva", cioè una quantità proporzionale al quadrato della velocità, indipendentemente dal percorso di discesa. Così, introdusse il suo concetto di "Altitudo" (come Newton, scriveva in un buon latino,) o altezza, come qualcosa che "potenzialmente" potrebbe diventare velocità.

Supponiamo di avere qualche profilo di una "montagna", la linea blu in Fig.13.

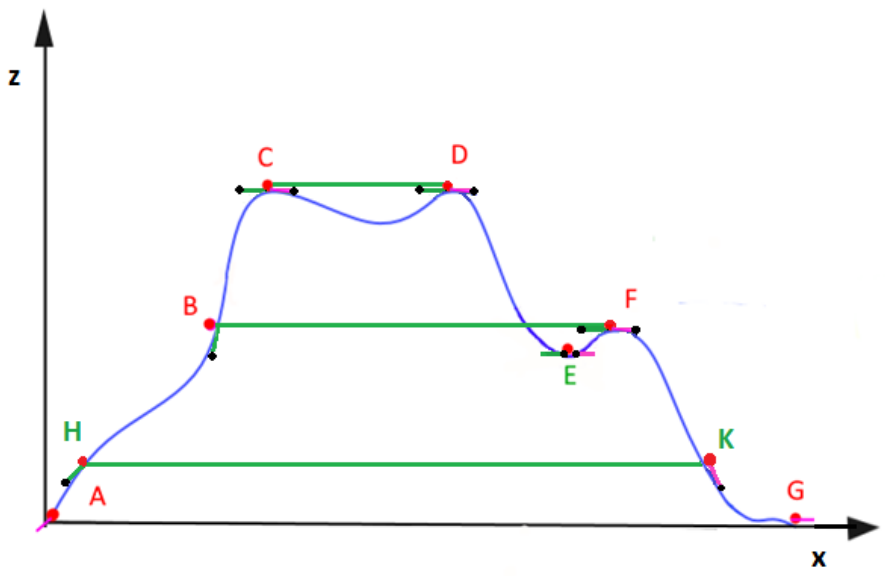


Fig.13.

Fig.13 dice una serie di cose:
(i) Nei punti A, B, C, D, E, F, G, H, K ho segnato (indicativamente) le forze, porpora verso destra, verdi verso sinistra. La piccola sfera nera indica dove punta la forza. Le forze sono lungo la tangente del profilo della montagna, la linea blu.
(ii) Biglie in C, D, E, F sono sottoposte a forze uguali e opposte. Quindi la biglia è in equilibrio. Tuttavia, la situazione non è la stessa in tutti i punti di equilibrio. In C, D, F, le forze tendono a spostare la biglia dalla sua posizione (il punto nero punta nella direzione lontana dalla posizione della biglia). In E è il contrario. Quindi, le biglie poste in C, D, F tenderanno a lasciare la posizione di equilibrio, che è una "posizione di equilibrio instabile". Invece, E è una posizione di equilibrio stabile. Tutto coincide con la nostra intuizione. Se proveremo a mantenere una biglia in C, D, F, saremo in difficoltà, in E invece no. Si noti che nei punti di equilibrio la tangente al profilo della montagna è orizzontale.
(iii) Supponiamo che una biglia a sia a C, punto alla stessa altezza di D. Se la rilasciamo, spostandola leggermente verso destra, cadrà e salirà precisamente alla stessa altezza a D - in assenza di attrito. (L'osservazione è dovuta a Galileo, che sembra avere un talento eccezionale per eliminare l'attrito dalla sua visione, sebbene l'attrito sia la forza più onnipresente nel nostro universo, senza la quale non potremmo neppure vivere.)
(iv) Passando da C a B, la biglia acquisirà la stessa velocità di una biglia che vada da D a F.
(v) Passando da B a H, una biglia acquisirebbe la stessa velocità che raggiungerebbe passando da F a K; e lo stesso andando da C a B e da D a F.
(vi) Seguendo Galileo, dobbiamo credere che se sulla destra del diagramma ci fosse una montagna simile, una biglia che parta da D verso destra dovrebbe essere in grado di salire sulla cima di quella montagna.

Tuttavia, sono necessari alcuni commenti:

A) Se vogliamo tracciare le forze che agiscono sulle biglie nei vari punti del profilo della montagna, dobbiamo tracciare, in questo caso, due componenti, una verticale e una orizzontale. O mettiamo frecce ovunque, o facciamo due diagrammi invece di uno. Se lavoriamo in tre dimensioni, abbiamo bisogno di tre diagrammi. C'è un'eccezionale economia di pensiero nel disegnare una singola montagna e poi calcolare le pendenze in tre direzioni: lo si fa quando se ne ha bisogno. Le pendenze hanno i loro nomi matematici: sono chiamate, in determinate condizioni, derivate o gradienti e, data la superficie di una "montagna", ci sono regole per disegnarle e calcolarne i valori. Ma, come già accennato, di queste regole non ci curiamo: nel nostro approccio "laico", abbiamo utilizzato semplicemente i casi facilmente identificabili dei punti di equilibrio: qui la pendenza è nullo, come mostra la Fig. 13.

B) Eulero notò abbastanza presto che conoscere il dislivello di due punti A e B su una "montagna" era sufficiente per conoscere il quadrato della velocità che un “punto materiale pesante” avrebbe acquisito (o perduto, a seconda di quale punto ha la maggiore altezza) andando da A a B seguendo qualsiasi percorso (il che è notevole). La formula è ben nota:

$$\text{(differenza di altezza =) } h = v^2 / 2g$$

Per qualsiasi sistema di forze (siano esse gravitazionali, elettriche, elastiche) tali che equazioni

simili possano essere scritte,

Forza = pendenza di una "montagna"

V (2) - V (1) = Kv ^ 2

se, essendo valide certe condizioni, possiamo produrre un paesaggio di montagna privo di attrito, chiamato V, "funzione potenziale", che ci dice in quale direzione e con quale accelerazione una biglia rotolerebbe (o, meglio, scivolerebbe) e dove potrebbe rimanere in equilibrio. Allo stesso tempo, ci darebbe il moto e i punti di equilibrio delle particelle soggette alle stesse forze, a condizione che la loro massa o carica sia così piccola da non deformare il paesaggio. A causa di questa possibilità di disegnare un paesaggio di montagna per rappresentare il "potenziale" dovuto a una data forza o sistema di forze, Eulero diede alla variabile il nome altitudine o "elevazione" (*Mechanica*, I.3 (1736),) perdendo così il privilegio di essere riconosciuto come il matematico che diede all'altitudine il nome di "potenziale". Il nome, almeno, fu introdotto da **W. Rankine (1820-1872),** ma, ai suoi tempi, il concetto era ormai di uso comune.

(3) Nota sul problema dei tre corpi.

Heinrich Bruns (1887) e **Henri Poincaré (1888-1899)** dimostrarono infine che *il "problema dei tre corpi" non ha una soluzione generale in forma chiusa*. Persino le soluzioni numeriche non sono facili da gestire. Anche madre Natura, apparentemente, ha problemi con il problema dei Tre corpi, e il movimento di tre corpi gravitanti non ha orbite ripetitive a lungo termine, tranne casi specifici.

(4) Sulla forza gravitazionale di Newton.

Supponiamo che una grande massa, particella puntiforme, sia posta all'origine del piano (x, y). Essa eserciterà una forza del tipo che regola l'attrazione gravitazionale tra le masse puntiformi, cioè, seguendo la legge

$$F_g = -\frac{A}{r^2}$$

dove r è la distanza tra una massa di prova e la massa-sorgente, e A è una costante adatta che dipende dalla massa- sorgente. Ancora, supponiamo che la massa di prova sia così piccola da non perturbare il campo generato dalla massa della sorgente.

Perché la legge -A / r ^ 2? Newton non lo sapeva. La legge del "quadrato inverso" semplicemente produceva i risultati corretti, come, ad esempio, le leggi di Keplero. Il lettore interessato può leggere i *Principia, Libro I, Sezione II, Proposizione IV, Corollaria* (= conseguenze) *e Scholia* (= note). Qui Newton attribuisce la scoperta della legge a **Wren, Halley e Hooke**. Gli studiosi moderni affermano che esistevano anche altri precursori, e il concetto di legge del quadrato inverso era piuttosto comune alla fine degli anni 1670 (Newton menziona anche **Bullialdus e Borelli**). Inoltre,

Newton aveva formulato, nelle *Proposizioni 43-45 del Libro I e sezioni associate di Libro III,* una ragionevole prova dell'accuratezza della legge dell'inverso del quadrato, dimostrando che solo se la legge della forza è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza, le direzioni degli assi principali delle ellissi orbitali dei pianeti rimangono costanti come si osservano, a parte piccoli effetti attribuibili a perturbazioni interplanetarie (da Wikipedia, edizione inglese.) Per una minuta parte di questi effetti occorre invocare anche la relatività generale.

Per Newton, la legge della gravitazione universale era una legge empirica trovata per "induzione". Per quanto lo riguardava, Newton ammise di non aver trovato una ragione precisa per cui le masse si dovessero attirare a vicenda con la legge dell'inverso del quadrato. Nella sua edizione del Principia del 1713, alla fine del suo lavoro, scrisse uno "*Scholium generale*" (commento generale) che conteneva la sua celebre frase "**hypotheses non fingo**" ("non invento ipotesi"). Più tardi, matematici e medici cercarono spiegazioni appropriate. Ma vogliamo davvero saperne fin dall'inizio più di Newton stesso?

Se tracciamo il "potenziale", la pendenza equivale a -A / r (uno studente in matematica riconoscerebbe che -A / r = - Integrale (-A / r ^ 2). L'integrazione è un po' come l'opposto di trovare la pendenza, cioè trovare la differenza di elevazione conoscendo la pendenza .) Così, nel nostro paesaggio, una massa attrattiva sembra un imbuto posto all'origine del nostro aereo, con pendenza crescente se ci si avvicina al centro.

(5) Momento angolare e implicazioni.

C'è una ragione profonda, perché la biglia dovrebbe orbitare indefinitamente senza cadere nel fondo della buca, per quanto orbiti pericolosamente vicina ad esso: il suo "momento angolare" è conservato. Qui dovrebbe essere sufficiente dire che se all'inizio della caduta nell'imbuto la velocità della palla non è zero, e/o la biglia non punta direttamente verso la fonte attrattiva (il centro dell'imbuto,) la biglia ha un momento angolare iniziale diverso da zero, mentre, una volta che è ferma sul fondo dell'imbuto, il suo momento angolare è zero. La ragione sta nell'espressione del momento angolare, che è la seguente: il momento angolare della massa di prova m è dato da: *mvr = (massa della massa di prova) per (velocità in qualsiasi punto del percorso) per (distanza più vicina avvicinamento al centro di attrazione se la particella continua lungo la direzione di v.)* Per andarsi a posare sulla massa principale (r = 0) con velocità nulla, la massa di prova deve aver perso tutto il suo momento angolare. Quindi, il suo momento angolare non è stato conservato: è stato perso, a causa dell'azione di una forza di attrito, che, fortunatamente per noi, esiste, ma nel sistema solare è quasi trascurabile. Tuttavia, una mente curiosa potrebbe chiedersi: "***Perché c'è una legge così strana, la conservazione del momento angolare?***" La risposta è tutt'altro che immediata: si scopre che è legata alla simmetria rotazionale delle leggi fisiche e, in definitiva, all'isotropia dell'universo. Sia chiaro - la dimostrazione del legame generale tra simmetrie e leggi di conservazione, si basa sul cosiddetto **teorema di Noether (da Emmy Noether, 1882-1935**) ed è riservato agli studenti di fisica dopo il terzo o quarto anno di università.

(6) Il rotore.

Su YouTube sono disponibili varie dimostrazioni della giostra rotante o Rotor (di moda circa sessant'anni fa). I partecipanti che entrano nel Rotor si sentono schiacciati contro la parte esterna e, a un'alta velocità di rotazione, potrebbero non essere in grado di muoversi verso il centro del Rotor. Per un'adeguata velocità di rotazione, i partecipanti possono avere l'impressione essere

sdraiati di schiena sulla terra. Si può facilmente risolvere il problema della velocità di rotazione necessaria: essa vale

$$\frac{4\pi^2}{T^2} R = g; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

dove R è il raggio del Rotor e T il periodo di rotazione; g è l'accelerazione della gravità.

Si afferma che Einstein, dopo aver osservato il Rotor, giunse alla conclusione che la gravità causa una deformazione dello spaziotempo: la gravità può essere simulata da una forza centrifuga, originata da una rotazione, che, fornendo una velocità tangenziale, se sufficientemente veloce, potrebbe produrre gli effetti della contrazione della lunghezza relativistica e della dilatazione del tempo e le loro conseguenze sulle misure di lunghezza e tempo.

(7) Il potenziale di forza centrifuga.

Il diagramma di Fig. 7 potrebbe semplicemente rappresentare una collina, e conoscerne l'espressione analitica precisa è superfluo, per l'uso che ne faremo. Tuttavia, è stato riprodotto per illustrare il potenziale di una forza centrifuga. Forse il lettore sa che ci sono tecniche per disegnare la rappresentazione 2D e 3D delle funzioni matematiche. Questi fanno parte della "geometria analitica", una scienza inventata da **René Descartes (1596-1650).** Se il lettore non lo sa, forse può essere contento di sapere (i) che ci sono regole per disegnare rappresentazioni come Fig.5 e Fig .7 di piani, curve, superfici e oggetti matematici più avanzati; (ii) che le figure sono matematicamente rigorose e (iii) che è possibile trarne deduzioni matematiche.

Usando la tecnica della geometria analitica, si potrebbe dimostrare che il "potenziale centrifugo" di Fig. 7 è dato dalla "equazione del paraboloide":

$$V = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2)$$

dove ω è la velocità di rotazione, in radianti al secondo. Se una rivoluzione completa è completata in un tempo T, sapendo che il valore dell'angolo di rotazione totale *in radianti vale* 2π, abbiamo la relazione importante:

$$\omega = 2\pi / T$$

Per quanto riguarda la funzione V, occorre ricordare che il paraboloide di rotazione va capovolto (come ci dice il segno meno) e dobbiamo calcolare la massima pendenza nei vari punto per ottenere un'accelerazione, che in questo caso è sempre nella direzione radiale e spinge verso l'esterno la massa di prova. "Calcolando la massima pendenza", ovvero eseguendo la derivata rispetto a r, cambiando segno e moltiplicando per la massa di prova m, otteniamo la legge della forza centrifuga, che aumenta proporzionalmente alla distanza della massa di prova:

$$F = m\omega^2 r$$

Ma, ancora una volta, a livello introduttivo, tale sforzo matematico non è necessario. Una volta che accettiamo che una biglia non soggetta ad attrito sarà soggetta a forze simili se cade giù dalla collina (sempre più veloce, guidata da un'accelerazione crescente) oppure se sottoposta a una forza centrifuga (guidata da una forza crescente in modo lineare), siamo già a metà strada.

Soprattutto, una cosa deve essere chiara: una biglia situata sul vertice della cupola rimarrà lì in equilibrio, se nessuna forza agirà su di essa (al sommo, la pendenza è zero in tutte le direzioni). Tuttavia, una perturbazione minima comincerebbe a spostarla, dopo di che, non c'è più ritorno. Allo stesso modo, una biglia al centro del Rotore sarebbe immobile, ma una perturbazione minima comincerebbe a spostarla, dopo di che, non ci sarebbe più ritorno. Chiamiamo una tale posizione un punto di equilibrio instabile.

Ricordo che le forze che agiscono nei vari punti sulla superficie possono essere trovate sfruttando la regola "trova le pendenze massime in qualsiasi punto desideri e ottieni le tre componenti della forza."

(8) La forza di Coriolis, 1835 (da Gaspard de Coriolis, 1792-1843.)

La forza di Coriolis e la forza centrifuga non sono vere forze: esse sono piuttosto parti dell'accelerazione in un sistema di riferimento rotante. Sono forze o pseudo-forze improprie, che devono essere moltiplicate per la massa inerziale, per assumere la dimensione delle forze. Allo stesso modo, la forza gravitazionale viene moltiplicata per una massa, che si trova esattamente uguale alla massa inerziale, un fatto che suggerì a Einstein che anche la gravitazione fosse una pseudo-forza di qualche tipo.

Un po' di confusione deriva dallo spostamento di una parte dell'accelerazione al primo membro della seconda legge di Newton: il segno del termine di Coriolis, in quanto forza, è l'opposto del segno del termine di Coriolis, in quanto accelerazione.

La forza agisce su un corpo che si muove in un sistema di riferimento rotante. Dò due esempi tratti da Feynman *(Lectures on Physics, I, 19.8).*

1) Una persona trascina una massa m lungo una rotaia fissata sul diametro di un disco rotante. Ne risulta un movimento curvo tangente al diametro quando si attraversa il centro di rotazione. L'effetto di Coriolis non si arresta, come farebbe l'effetto forza centrifuga, quando la massa fosse al centro di rotazione.

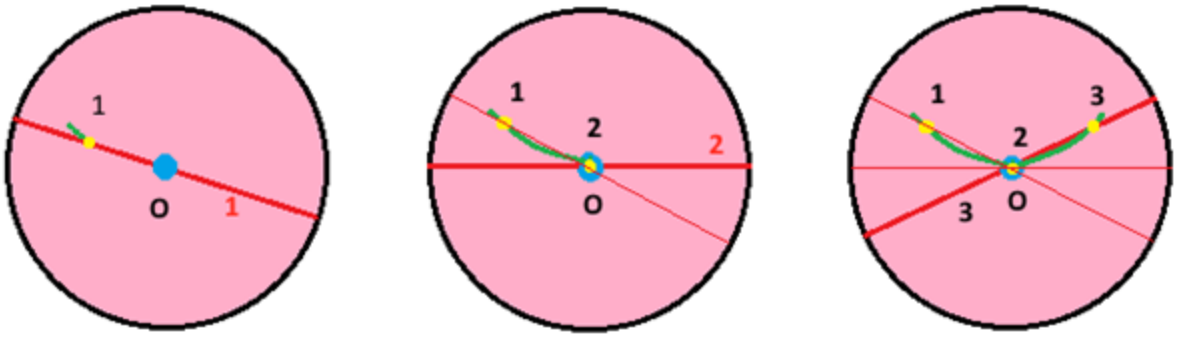


Fig. 14 (a, b, c)

Percorso di una persona che cammina lungo un diametro fisso di un disco rotante in senso antiorario, vista da un osservatore fisso esterno.

Frequentemente (vedi Forza di Coriolis - Wikipedia) si ha l'impressione che l'effetto sia esattamente l'opposto:

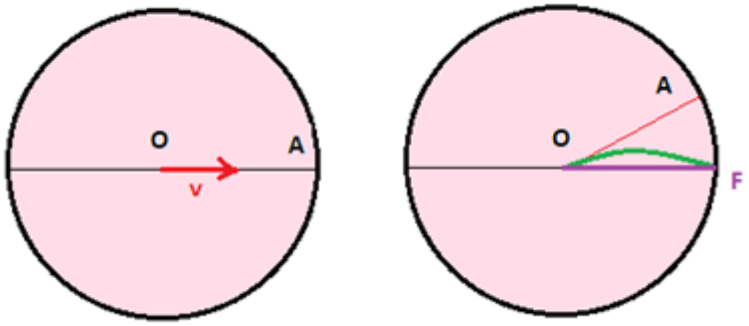


Fig. 15 (a, b)

Di nuovo, la piattaforma ruota in senso antiorario, ma nella Figura (b) vediamo il percorso di un oggetto "in volo", come visto dall'osservatore rotante A, e da un osservatore fisso F. L'osservatore fisso vede il percorso diritto colorato in viola, l'osservatore rotante A vede il percorso curvo "verde".

La differenza (che a mio parere fa molto per confondere le idee) è dovuta al fatto che nel primo caso (Fig.14) il percorso (ad esempio su binari) è fissato sulla piattaforma, e all'osservatore esterno appare curvo (verso sinistra) mentre appare rettilineo all'osservatore rotante, che deve tuttavia applicare una forza per far muovere la massa sul suo cammino. Nel secondo caso, il percorso di un oggetto volante, è fisso - e rettilineo - rispetto all'osservatore esterno, e sembra essere curvo (alla sua destra) all'osservatore rotante. La maggior parte degli effetti della forza di Coriolis sono visti dagli osservatori che ruotano con la Terra: quindi, nell'emisfero settentrionale, i fiumi tendono a erodere la loro sponda destra, e i venti di un uragano tendono a girare in senso antiorario; il piano di oscillazione di un pendolo di Foucault posto al Polo Nord (fissato nello spazio) sembra ruotare da est a ovest, ecc. (Vedi forza di Coriolis - Wikipedia).

2) Caso di un osservatore che corre sulla circonferenza di un disco.

L'osservatore in corsa, M, procede a velocità costante v_M.
Se il disco non ruota, l'osservatore percepisce una forza centrifuga, che deve neutralizzare per seguire la circonferenza. L'osservatore fisso, F, vede che M deve esercitare la una forza centripeta di egual valore.

$$F_M = F_F = -\frac{mv_M^2}{r}$$

Tale forza continua ad agire se, in aggiunta, il disco sta ruotando con una velocità tangenziale ωr. M non ne è consapevole, ma vede forze aggiuntive. Per un osservatore fisso, la forza centripeta dell'osservatore in corsa è

$$F = -m\frac{(v_M + \omega r)^2}{r} = -\frac{mv_M^2}{r} - 2mv_M\omega - m\,\omega^2 r$$

Mentre l'osservatore fisso considererebbe solo una forza centripeta in cui la velocità di M è ($v_M + \omega r$), l'osservatore rotante si considererebbe soggetto a tre forze: il primo termine è la forza centrifuga vista da F e M se il disco non sta ruotando, l'ultimo termine è la forza centrifuga dovuta alla rotazione del disco. Il secondo termine è la forza di Coriolis, che nel caso (1) era normale alla velocità radiale, mentre nel caso presente è normale alla velocità tangenziale, in direzione radiale. Il segno meno la fa agire verso la destra di v, se la rotazione è in senso antiorario. La forza è sempre nella stessa direzione, relativa alla velocità, indipendentemente dalla direzione della velocità.
Finora, abbiamo considerato solo un movimento planare e il vettore di rotazione è normale ad esso.
L'uso del calcolo vettoriale consente di scrivere una formula più generale per F (Coriolis):

$$F_c = -2m\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$

che non dipende dalla distanza r dal centro di rotazione. Se ω e v formano un angolo θ, la grandezza del prodotto è $2m\omega v \sin\theta$.
Una bella demo dell'effetto Coriolis è anche disponibile in
https://it.wikipedia.org/wiki/Forza_di_Coriolis

(9) Una dimostrazione del triangolo equilatero (M1, M2, L4 o L5)

1). per il caso più semplice, M1=M2.

Si deve notare che le masse M(i), la loro distanza R e la velocità angolare ω (= 2π / T come abbiamo visto) sono collegate dalla terza legge di Keplero, che "*Il quadrato del periodo orbitale di un pianeta è direttamente proporzionale al cubo del semiasse principale della sua orbita.*
"

La relazione è data da

$$\frac{T^2}{R^3} = K$$

Se allunghiamo T (il periodo), e quindi diminuiamo la velocità angolare ω, abbiamo bisogno di aumentare la distanza R tra le due masse, per preservare la relazione di cui sopra.

"Fidati di me" (o forse no). Ho fatto il diagramma cercando di garantire che la relazione sopraindicata sia rispettata. La funzione che ho tracciato in 3D con l'aiuto di MATHEMATICA (come la maggior parte dei diagrammi del presente saggio) è:

$$z = -(x^2 + y^2) - 8/\left(\sqrt{[(x+1)^2 + y^2]}\right) - 8/\left(\sqrt{[(x-1)^2 + y^2]}\right)$$

Esistono programmi che trovano automaticamente i valori massimi delle funzioni. Se cerchiamo il massimo della funzione data per x = 0, y> 0, troviamo y = 1.73205, ovvero la radice quadrata di 3, come annunciato per L4. Se invece cerchiamo il massimo nella direzione x positiva, troviamo x = 2.39 per L2 (invece di 2.5, come indicato approssimativamente dal diagramma). L3 si trova in x = -2,39.

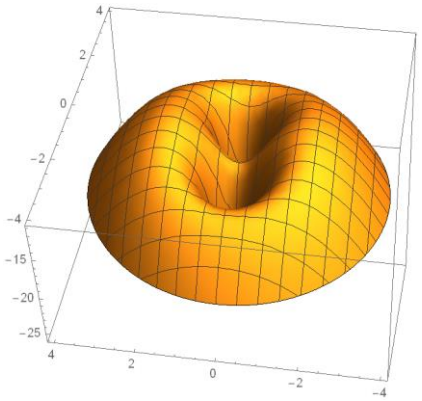


Fig.16

Metodo formale

1) Il movimento di due masse uguali attorno al loro centro di gravità produce la terza legge di Keplero, che può essere scritta come

$$\omega^2 R^3 = 2GM$$

Dove R è la distanza tra le due grandi masse (nel nostro grafico R = 2). Di nuovo, poiché le due masse sono uguali, il terzo corpo giace sull'asse y e le sue distanze r dalle due masse sono uguali.

In forma vettoriale, la forza gravitazionale esercitata da una massa dovrebbe essere scritta come

$$F_g = -\frac{GMm}{r^2}\left(\frac{r}{r}\right)$$

Il termine tra parentesi, di modulo = 1, è necessario per indicare la direzione della forza. Poiché le componenti x delle forze dovute alle due masse sono uguali e opposte, ci interessano solo le componenti y, che sono uguali, hanno lo stesso segno e sono la proiezione di F (g) sull'asse y.

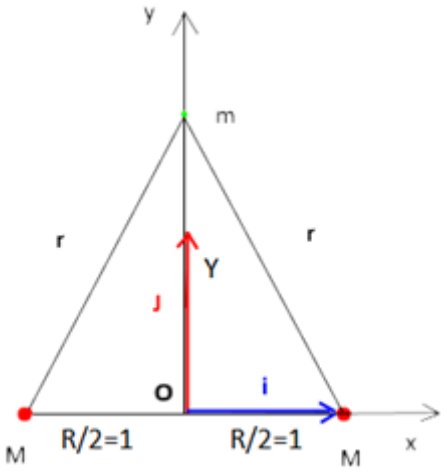


Fig.16

Il caso di due masse uguali di grandi dimensioni.

La forza centrifuga, con centro in O, è totalmente lungo l'asse y (vettore unità j) e può essere scritta come
La forza gravitazionale che agisce sulla massa m non ha componente x, perché il centro di gravità è nell'origine, a metà strada tra le due masse uguali.
Lungo l'asse y, la forza gravitazionale esercitata da ciascuna delle due masse principali sulla massa più piccola è la proiezione (io uso la formula del prodotto interno o del punto: si può semplicemente usare la proiezione di r sull'asse y: (r. j) = r cosθ = Y:

$$F_g = -\frac{GMm}{r^2}\left(\frac{r \cdot j}{r}\right) = F_g = -\frac{GMm}{r^3}\,Y$$

$$\frac{GMm}{r^3}\,Y + \frac{GMm}{r^3}\,Y = \frac{2GMmY}{R^3}$$

Sommando, semplificando 2GMmY, abbiamo:

1 / r ^ 3 = 1 / R ^ 3

Cioè, r = R = 2, e abbiamo un triangolo equilatero. In tal caso, l'altezza del triangolo equilatero Y ha il valore Y = √ (3) = 1.73205, come si può facilmente verificare applicando il teorema di Pitagora.

2) One of the two "source-masses" is much larger than the other.

Si può dimostrare altrettanto facilmente che un triangolo equilatero risulta anche se, chiamando ora le masse gravitazionali M ed m, abbiamo che M >> m, in modo tale che il centro di gravità del sistema di due masse gravitazionali sia nella massa più grande .

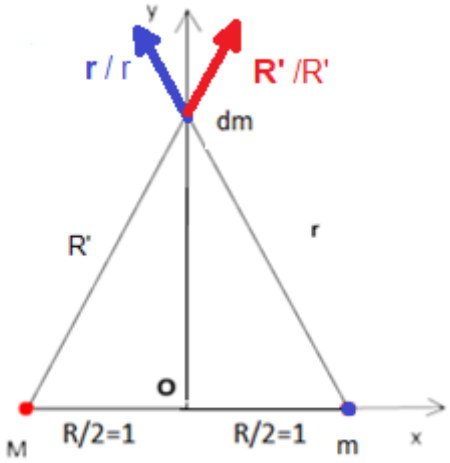


Fig.17
Caso di due masse gravitazionali assai diverse (M>>m). Il centro di massa è ora in M.

In questo caso, la terza legge di Keplero, ancora afferma che

$$\omega^2 R^3 = G\,(M + m)$$

Da cui segue:

$$\frac{G(M+m)\boldsymbol{R}}{R^3} = \frac{GM\,\boldsymbol{R}'}{R'^3} + \frac{Gm\,\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Ma, assumendo che m sia trascurabile rispetto a M,

$$\frac{GM}{R^3} = \frac{GM}{R'^3}$$

E quindi, R = R'.

Possiamo quindi scrivere

$$\frac{G(M+m)}{R^3} = \frac{GM}{R^3} + \frac{Gm}{r^3}$$

Da cui segue r =R. Quindi il triangolo è equilatero.

La dimostrazione generale, che produce (due) triangoli equilateri sia il rapporto tra le due masse principali, non è molto più difficile, e può essere trovata in vari siti online, quali https://fr.wikipedia.org/wiki/Point_de_Lagrange.

(10) Un esempio grossolano della stabilizzazione dell'equilibrio in L4, determinato dalla forza di Coriolis.

La stabilità dell'equilibrio nei cinque punti Lagrangiani è analizzata in dettaglio in:

http: //pi.math.cornell.edu/~temp ... ed anche in
https://fr.wikipedia.org/wiki/Point_de_Lagrange.

Sebbene siano abbastanza accessibili, le discussioni sulla stabilità richiedono conoscenze di Calcolo e Meccanica, a livello di un secondo / terzo anno universitario.

Tuttavia fare qualcosa che matematicamente merita l'equivalente di un calcio di rigore nel calcio. Vorrei cioè mostrare in un modo euristico che, almeno per un caso estremo, il punto L4, grazie alla forza di Coriolis, può diventare un punto di equilibrio stabile.

Prima di tutto si tracci:
1) il potenziale centrifugo effettivo in una piastra piana rotante, in assenza di masse gravitazionali;
2) il potenziale effettivo che include la rotazione generata dalle due masse principali e i loro due imbuti gravitazionali, nel caso M (1) = M (2);
3) come sopra, ma le due masse ora stanno nel rapporto M (1) / M (2) = M / m = 500.

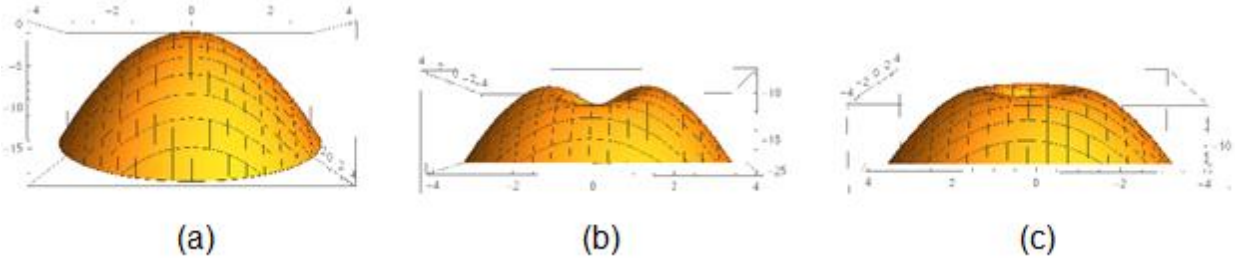


Fig.18
L'appiattimento della "cupola"centrifuga quando le due masse gravitazionali sono assai diverse© in contrasto con il caso (b), in cui sono eguali..

Possiamo vedere graficamente che la presenza di due grandi masse uguali (b) crea due picchi di instabilità piuttosto pronunciati, che diventano invisibili nel caso (c), quando una delle due masse è considerevolmente più piccola della massa maggiore. Come vediamo, in

questo caso, la presenza di una seconda massa anche assai piccola crea un culmine più piatto che in (a). Quindi, la forte instabilità di (b) diventa una zona quasi piana di instabilità più modesta. A questo punto possiamo attivare la forza di Coriolis. Dato che ora la cima è abbastanza piatta, io uso, come dimostrazione, semplicemente l'approssimazione che abbiamo per una piastra rotante. Quello che intendo mostrare è che una biglia posta in uno dei due massimi L4 o L5, se leggermente spostata dal punto di equilibrio, tende a rimanere nelle sue vicinanze.

Consideriamo il movimento vicino al punto L4, che è un punto di equilibrio per una massa non in movimento. Sappiamo dalla nota (8) che il termine Coriolis è dato da un prodotto vettoriale:

$$F(\text{Coriolis}) = -2\,(\omega \times v).$$

Se ω è nella direzione z, il prodotto è dato da:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & k \\ 0 & 0 & 2\omega \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix}$$

Le equazioni del moto, incluso il termine di Coriolis, diventano

$$\ddot{x} - 2\,\omega\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \ddot{y} + 2\,\omega\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

Dove U è il potenziale effettivo. Le derivate prime di U sono puramente simboliche. In effetti, come diremo, l'effetto Coriolis viene dalle derivate seconde di U.
Tuttavia, qualunque sia la sua espressione effettiva, se osserviamo le curve di livello di U in Fig.5, vediamo che esso appare piatto nei pressi di L4 (e L5), su un'estensione di decine di milioni di km (la distanza Sole-Terra è di circa 150 milioni di km).

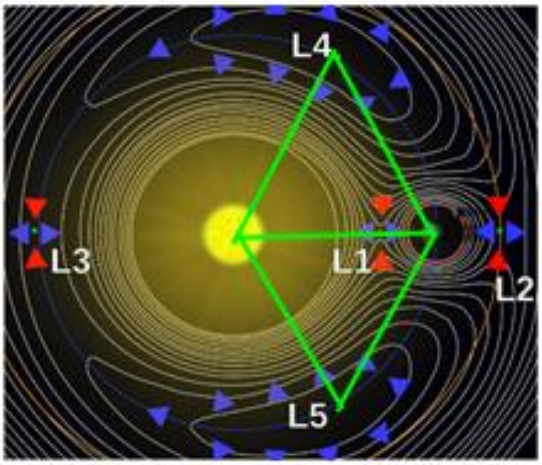


Fig.5 (replica)

Possiamo quindi studiare un'approssimazione "di ordine zero", $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0$, in cui le nostre due equazioni diventano:

$$\ddot{x} - 2\,\omega\dot{y} = 0\,; \quad \ddot{y} + 2\,\omega\dot{x} = 0$$

e introduciamo due nuove coordinate, u, e v, per piccoli spostamenti dall'origine nel punto L4 (con coordinate x e y). L'uso di (x, y) o di (u, v) non influenza il termine di Coriolis (l'unico termine che manteniamo) perché nelle equazioni di Coriolis appaiono solo le derivate e le coordinate di L4 non variano nel sistema di rotazione. Tuttavia, escludere le derivate del potenziale effettivo *non è permesso fisicamente*, perché la forza di Coriolis deriva dal fatto che l'intero sistema ruota con velocità angolare ω, e il potenziale proveniente dal sistema di riferimento rotante è incluso in U. *Una completa derivazione delle condizioni di stabilità, infatti, richiede che manteniamo le seconde derivate di U.*

Continuiamo con la grazia con cui un rinoceronte si muove in un negozio di cristalleria. Formalmente possiamo tentare una soluzione e vedere quali indicazioni otteniamo riguardo a una soluzione completa. Le equazioni per il nostro caso estremo sono ora:

$$\ddot{u} - 2\,\omega\dot{v} = 0\,; \quad \ddot{v} + 2\,\omega\dot{u} = 0$$

Cerchiamo soluzioni u = A exp(αt), v = B exp(αt). Come al solito, abbiamo soluzioni stabili (seni e coseni) se α risulta essere immaginaria, e soluzioni instabili se è reale e positiva (a causa di un termine exp(αt), che cresce in modo esponenziale nel tempo). In alternativa, si potrebbero anche trovare due soluzioni reali stabili, se sono entrambe negative.
Prendendo le derivate, e semplificando i termini exp(αt), le due equazioni ora diventano:

$$A\alpha^2 - 2\,B\,\omega\alpha = 0$$

$$+2A\omega\alpha + \mathrm{B}\alpha^2 = 0$$

Per avere una soluzione non banale, il determinante dei coefficienti deve essere uguale a zero, cioè,

$$\alpha^4 + 4\omega^2\alpha^2 = 0$$

Abbiamo complessivamente quattro soluzioni, che è un risultato corretto. Inoltre, abbiamo due valori per α, da $\alpha^2 = 0$, che producono due soluzioni costanti, u = A e v = B, che sono stabili, in un certo senso. Inoltre, ci sono le due soluzioni con $\alpha = \pm 2i\omega$, che indicano sicuramente una soluzione stabile, oscillante, ma con un periodo che è circa T / 2 (un valore che differisce di un fattore circa 2 dal valore esatto che si vedrà in seguito).
Pertanto, mentre il risultato qualitativo, che il punto L4 (L5) è di equilibrio stabile per un potenziale effettivo "sufficientemente piatto", è corretto, i valori, che si trovano con un calcolo esatto, sono diversi (anche se non incompatibili con i nostri risultati: infatti, una periodicità 2ω include anche una periodicità ω). Inoltre, non abbiamo alcuna indicazione quantitativa su cosa significhi "sufficientemente piatto". In ogni caso, penso che, date le

drastiche approssimazioni che abbiamo utilizzato, abbiamo raggiunto una forte indicazione che il punto L4 è un punto di equilibrio stabile, almeno nel caso in cui una delle due masse sia molto più piccola dell'altra .

Le soluzioni esatte (https://map.gsfc.nasa.gov/ContentMedia/lagrange.pdf) nel caso generale sono:

$$\alpha_{1,2} = \pm i \frac{\omega}{2} \sqrt{2 - \sqrt{27\, q^2 - 23}}$$

$$\alpha_{3,4} = \pm i \frac{\omega}{2} \sqrt{2 + \sqrt{27\, q^2 - 23}}.$$

Mentre la seconda condizione produce sempre $\alpha(3,4)$ immaginaria, per avere $\alpha(1,2)$ immaginaria occorre che sia $q^2 \geq 23/27$.
Siccome $q^2 = (M1-M2) / (M1 + M2)$, il rapporto $r = M1/M2$ (dove M1 è la massa più grande) è dato dalla soluzione di $((r-1) / (r + 1))^2 \geq 23/27$, cioè $r \geq 24.9599$. Dai nostri diagrammi vediamo intuitivamente che quando la massa più piccola aumenta di dimensioni, la stabilità dell'equilibrio in L4 viene persa. I calcoli accurati ora riportati indicano che la forza di Coriolis ha un effetto stabilizzante a condizione che il rapporto tra le due masse (da maggiore a minore) sia maggiore di circa 24,96.

Non deve tuttavia sfuggire all'attento lettore il fatto che la stabilizzazione dovuta alla forza di Coriolis è dovuta alla piattezza" del potenziale effettivo al sommo della "cupola centrifuga", dovuto alla piccolezza della seconda massa gravitazionale rispetto alla prima, come da Fig. 18.

Il lettore attento noterà in letteratura una seconda soluzione, per $r \leq 0.04$, che generalmente non è discusso. Perché? La ragione è semplice: poiché r è il rapporto tra la massa più grande e la massa più piccola, una soluzione $r < 1$ non è coerente con la definizione di r.

Nel caso Sole-Terra, $q^2 = 0.9999988$ e $\alpha_{1,2} = \pm i\,(0{,}00255)\,\omega$ (non molto lontano da 0), che abbiamo ottenuto sopra. D'altro canto,

$$\alpha_{3,4} = \pm i \frac{\omega}{2} \sqrt{2 + \sqrt{27\, q^2 - 23}}$$

che differisce dal nostro risultato, in quanto tende a produrre una frequenza dell'ordine di $\pm i\omega$, invece di $\pm 2i\omega$, come abbiamo ottenuto.

Una discussione completa e chiara dei punti lagrangiani è fornita in https://fr.wikipedia.org/wiki/Point_de_Lagrange, così come in altri siti sul web, come ad esempio: https://map.gsfc.nasa.gov/ ContentMedia / lagrange.pdf